

Федеральное государственное бюджетное учреждение науки
Институт космических исследований Российской академии наук

На правах рукописи

Климачков Дмитрий Александрович

**Нелинейные взаимодействия волн в магнитной
гидродинамике вращающейся плазмы со свободной
границей в поле силы тяжести**

01.04.02 Теоретическая физика

Диссертация на соискание ученой степени
кандидата физико-математических наук

Научный руководитель:

Д.ф.-м.н. Петросян Аракел Саркисович

Москва - 2019

Содержание

Введение	4
Цели работы	8
Научная новизна	8
Практическая и научная ценность работы	9
Обоснованность и достоверность полученных результатов	9
Положения, выносимые на защиту	10
Апробация работы	11
Публикации по теме диссертации	12
Личный вклад автора	12
Структура и объем диссертации	13
Содержание работы	13
1 Волны Пуанкаре в магнитогидродинамических течениях мелкой воды	21
1.1 Введение	21
1.2 Вывод магнитогидродинамических уравнений мелкой воды во внешнем вертикальном магнитном поле	23
1.3 Линейная теория волн магнито-Пуанкаре в магнитогидродинамическом приближении мелкой воды. Качественный анализ дисперсионных соотношений	30
1.3.1 Волны во внешнем вертикальном магнитном поле	30
1.3.2 Волны в горизонтальном магнитном поле	36
1.4 Трехволновые уравнения и параметрические неустойчивости в магнитогидродинамических течениях мелкой воды	40
1.4.1 Трехволновые взаимодействия в течениях во внешнем вертикальном магнитном поле	40
1.4.2 Трехволновые взаимодействия в течениях в горизонтальном магнитном поле	48
1.5 Выводы	51
2 Приближение β-плоскости. Волны Россби в магнитогидродинамических течениях мелкой воды	53

2.1	Введение	53
2.2	Приближение β -плоскости для магнитогидродинамических течений мелкой воды	54
2.3	Линейная теория волн магнито-Россби в магнитогидродинамическом приближении мелкой воды. Качественный анализ дисперсионных соотношений	55
2.3.1	Волны магнито-Россби во внешнем вертикальном магнитном поле	55
2.3.2	Волны магнито-Россби в горизонтальном магнитном поле	59
2.4	Уравнения трехволновых взаимодействий и параметрические неустойчивости волн магнито-Россби	61
2.4.1	Волны магнито-Россби во внешнем вертикальном магнитном поле	61
2.4.2	Волны магнито-Россби в горизонтальном магнитном поле	68
2.5	Выводы	76
3	Эффекты сжимаемости в магнитогидродинамических течениях в приближении мелкой воды	78
3.1	Введение	78
3.2	Вывод магнитогидродинамических уравнений мелкой воды с учетом крупномасштабной сжимаемости	80
3.3	Волны магнито-Пуанкаре в сжимаемых магнитогидродинамических течениях в приближении мелкой воды	87
3.3.1	Линейная теория и качественный анализ волн магнито-Пуанкаре	87
3.3.2	Трехволновые уравнения и параметрические неустойчивости	90
3.4	Волны магнито-Россби в сжимаемых течениях в приближении мелкой воды	94
3.4.1	Линейная теория и качественный анализ волн магнито-Россби	94
3.4.2	Трехволновые уравнения и параметрические неустойчивости	97
3.5	Автомодельные решения магнитогидродинамических уравнений мелкой воды при наличии крупномасштабной сжимаемости	102

3.5.1	Вырождение непрерывных альфвеновских волн в сжимаемых течениях	104
3.5.2	Центрированные магнитогравитационные волны Римана в сжимаемых течениях	106
3.5.3	Соотношения Ранкина-Гюгонио в сжимаемых магнитогидродинамических течениях мелкой воды	108
3.5.4	Магнитогравитационные ударные волны в сжимаемых течениях	111
3.5.5	Разрывные альфвеновские волны в сжимаемых течениях	112
3.5.6	Допустимые разрывы	113
3.5.7	Простые волны на наклонной плоскости в сжимаемых течениях	114
3.6	Задача Римана для магнитогидродинамических течений сжимаемой жидкости в приближении мелкой воды	116
3.6.1	Постановка задачи Римана для сжимаемых течений	116
3.6.2	Конфигурация две волны разрежения и две альфвеновские волны в сжимаемых течениях	119
3.6.3	Конфигурация магнитогравитационная ударная волна, магнитогравитационная волна разрежения и две альфвеновские волны в сжимаемых течениях	123
3.6.4	Конфигурация две магнитогравитационные ударные волны и две альфвеновские ударные волны в сжимаемых течениях	125
3.6.5	Конфигурация две гидродинамические волны Римана и зона вакуума в сжимаемых течениях	127
3.6.6	Решение задачи Римана для сжимаемых течений. Сравнение с решением для несжимаемых течений	128
3.7	Выводы	131

Заключение

135

Введение

Большинство наблюдаемых объектов во Вселенной находится в состоянии плазмы и подвержены вращению. В последнее время активно развиваются теоретические и численные исследования, направленные на решение фундаментальной проблемы описания и изучения многомасштабных течений плазмы путем исследования общих свойств, характеризующих различные астрофизические объекты.

Поведение различных звёзд и планет описывается магнитной гидродинамикой тонких слоев плазмы со свободной границей в поле силы тяжести. Например, течения солнечного тахоклина (тонкого слоя внутри Солнца, находящегося над конвективной зоной) [1], [2], [3], динамика атмосфер нейтронных звезд [4], [5], течения аккреционных дисков нейтронных звезд [6], [7], захваченные приливами экзопланеты с магнитоактивными атмосферами [10], [11], [12]. Полная трехмерная система магнитогидродинамических уравнений вращающейся плазмы достаточно сложна как для аналитического исследования, так и для численного моделирования. Поэтому для описания таких течений астрофизической плазмы используется магнитогидродинамическое приближение мелкой воды [2] и квазигеострофическое приближение в магнитной гидродинамике [14], [15]. Уравнения магнитной гидродинамики вращающейся плазмы в приближении мелкой воды являются альтернативой магнитогидродинамическим уравнениям тяжелой жидкости со свободной границей в случае, когда исследуется слой малой толщины по отношению к характерному горизонтальному линейному размеру задачи, и вертикальными ускорениями в слое можно пренебречь. Практически, речь идет о развитии идей геофизической гидродинамики с учетом существенных отличий в поведении плазменных течений вследствие присутствия силы Лоренца и важности магнитных полей. Магнитогидродинамические уравнения мелкой воды получаются в предположении гидростатичности распределения давлений и малости толщины слоя по отношению к характерному горизонтальному линейному размеру задачи из полной системы уравнений магнитной гидродинамики несжимаемой плазмы усреднением по высоте слоя [2], [16], [17], [18], [19], [20], [21]. В работе [2] получены магнитогидродинамические уравнения в приближении мелкой воды без учета внешнего

вертикального магнитного поля. В работе [4] полученные в [2] уравнения записаны путем введения эффектов внешнего поля в уравнения для горизонтальных скоростей и для горизонтальных магнитных полей. Тем не менее, в работе [4] остается открытым вопрос о корректной формулировке условия бездивергентности магнитного поля в приближении мелкой воды во внешне магнитном поле. Заметим, что предложенное в работе [2] условие бездивергентности не удовлетворяется в модернизированной системе магнитогидродинамических уравнений мелкой воды во внешнем поле. Поэтому актуальной является задача развития последовательной теории как для понимания структуры магнитного поля, так и для постановки корректных начальных условий при численном моделировании. Полученная система играет такую же важную роль в космической и астрофизической плазме, как и классические уравнения мелкой воды в гидродинамике нейтральной жидкости. Заметим, что существенным отличием магнитогидродинамических уравнений вращающейся плазмы по сравнению с нейтральной жидкостью является присутствие условия бездивергентности магнитного поля, выполняющегося тождественно при задании корректных начальных условий.

В линейном приближении система магнитогидродинамических уравнений мелкой воды во внешнем вертикальном магнитном поле имеет решения, описывающие волны магнито-Пуанкаре и магнитострофические волны [4]. Наличие внешнего вертикального магнитного поля характерно для магнитогидродинамических течений в нейтронных звездах [4] и в магнитоактивных атмосферах экзопланет, захваченных приливами несущей звезды [10]. В случае гидродинамики нейтральной жидкости в приближении мелкой воды присутствуют только гравитационные волны Пуанкаре. Закон дисперсии волн Пуанкаре в нейтральной жидкости и нелинейность в уравнениях мелкой воды нейтральной жидкости в случае слабонелинейных волн конечной амплитуды исключают взаимодействие волн Пуанкаре [25], поскольку в этом случае не выполняются условия синхронизма для таких волн. В течениях мелкой воды, характерных для солнечного тахоклина присутствует тороидальное (горизонтальное) магнитное поле [1]. Тем не менее, существование магнито-Пуанкаре волн при наличии горизонтального (полоидального и тороидального) магнитного поля не исследовано и их дисперсионные характеристики не получены. Кроме того, остаётся открытым вопрос

о возможности нелинейных эффектов в магнитогидродинамических течениях мелкой воды как в вертикальном магнитном поле, так и в горизонтальном поле.

Волны магнито-Россби представляют собой крупномасштабные волны во вращающейся плазме, распространяющиеся вследствие неоднородности силы Кориолиса, по аналогии с нейтральной жидкостью. Такие волны определяют крупномасштабную динамику Солнца и звезд [1], [30], [31], [32], динамику магнитоактивных атмосфер экзопланет, захваченных приливами от несущей звезды [10], течения в атмосферах нейтронных звезд [4], [53], [54], [55]. Не смотря на сложность наблюдения волн Россби в астрофизической плазме, они недавно обнаружены на Солнце [33], [58]. Отметим также ряд исследований, косвенно указывающих на их существование на Солнце [34], [35], [36], [37], [38], [39]. Крупномасштабные волны Россби в нейтральной жидкости определяют глобальную динамику планетных атмосфер. Изучение таких волн является предметом многочисленных исследований в геофизической гидродинамике [25], [40]. Для изучения волн магнито-Россби используется система магнитогидродинамических уравнений в приближении мелкой воды на β -плоскости. В этом случае волны рассматриваются на фоне тривиального стационарного состояния (состояния покоя), и теория таких волн развивается с использованием приближения мелкой воды или геострофического приближения. Прямым аналогом волн Россби в геофизической гидродинамике являются дрейфовые волны в плазме [40], [41]. В случае течений астрофизической плазмы теория волн Россби значительно усложняется вследствие наличия нетривиальных стационарных состояний магнитного поля (например, тороидальное и полоидальное поле или внешнее вертикальное магнитное поле) [1], [4], [32], [42], поэтому основные результаты относительно магнитных волн Россби получены в линейном приближении. В работе [4] развита линейная теория волн Россби в внешнем вертикальном магнитном поле. В работах [1], [32] развита линейная теория волн Россби в тороидальном магнитном поле для описания течений солнечного тахоклина, при этом не рассматривается общий случай горизонтального магнитного поля, характерный для других астрофизических объектов. Кроме того, вопрос о наличии нелинейных эффектов в магнитогидродинамических течениях на β -плоскости остается неисследованным как в случае внешнего вертикального магнитного поля, так

и в случае горизонтального магнитного поля.

Важным принципиальным свойством течений в астрофизической плазме является свойство сжимаемости, характеризующее большинство наблюдаемых во Вселенной плазменных течений. Для описания сжимаемых течений, как правило, необходимо использовать полную трехмерную систему магнитогидродинамических уравнений, которая также представляет собой сложную задачу для теоретического рассмотрения и численного моделирования. В работах [44], [45] выведена система уравнений мелкой воды для нейтральной жидкости с учетом крупномасштабной сжимаемости. Полученные в этих работах уравнения не учитывают важнейшие для плазменных течений свойства, такие как вращение и наличие магнитного поля. Поэтому представляется важным обобщить полученные в [44], [45] уравнения для магнитогидродинамических течений, характерных для астрофизической плазмы.

Гиперболичность магнитогидродинамических уравнений мелкой воды определяет, наряду с гладкими, наличие разрывных автомодельных решений. Даже в случае, когда начальные условия являются гладкими, нелинейный характер уравнений, наряду с их гиперболичностью, за конечное время может привести к разрывному решению. В простейшем случае невращающейся плазмы система магнитогидродинамических уравнений допускает полное аналитическое решение в виде простых волн на ровной границе [16] и на наклонной плоскости [17]. Точное явное решение начальной задачи с кусочно-постоянными начальными условиями, известной как задача Римана [47], [49] для уравнений магнитной гидродинамики в приближении мелкой воды на ровной границе найдено в [16] и на наклонной плоскости [17]. Аналогично для случая нейтральной жидкости в работах [44] (на ровной границе), [45] (на наклонной плоскости) найдены решения системы уравнений мелкой воды с учетом крупномасштабной сжимаемости в отсутствие вращения в виде простых волн, а также решена задача распада произвольного разрыва. Учет крупномасштабной сжимаемости позволяет описывать динамику столба плазмы в зависимости от высоты слоя и скорости, но и средней плотности столба жидкости. Вследствие этого учет горизонтального импульса в уравнениях происходит более точно, по сравнению со случаем несжимаемой жидкости, что является преимуществом при приме-

нении этих уравнений для описания космических и астрофизических течений. Полученные в этих работах решения являются точными, сильно нелинейными, являются ключевыми для разработки конечно-объемных численных методов Годуновского типа [50], [48]. Учитывая важность таких решений, представляется важным и интересным обобщить теорию, развитую в [16], [17], [44], [45] для сжимаемых магнитогидродинамических течений в приближении мелкой воды.

Цели работы

1. Теоретическое развитие теории мелкой воды для описания крупномасштабных вращающихся течений тонкого слоя плазмы в присутствии внешнего вертикального магнитного поля. Обобщение развитой теории с учетом крупномасштабной сжимаемости

2. Развитие теории линейных волн Пуанкаре и магнитострофических волн в магнитогидродинамических течениях мелкой воды в горизонтальном магнитном поле, качественный анализ дисперсионных соотношений волн магнито-Пуанкаре и магнитострофических волн во внешнем вертикальном магнитном поле и в горизонтальном магнитном поле, развитие слабонелинейной теории взаимодействий волн и анализ параметрических неустойчивостей.

3. Развитие теории линейных волн Россби в магнитогидродинамических течениях мелкой воды в горизонтальном магнитном поле, исследование дисперсионных соотношений для волн Россби во внешнем вертикальном магнитном поле и в горизонтальном магнитном поле, развитие слабонелинейной теории взаимодействий волн Россби и анализ параметрических неустойчивостей.

4. Нахождение всех автомодельных непрерывных и разрывных решений для невращающихся течений мелкой воды на ровной границе и на наклонной плоскости, решение задачи распада произвольного разрыва на основе полученных решений.

Научная новизна

Впервые система магнитогидродинамических уравнений в приближении мелкой воды во внешнем вертикальном магнитном поле получена из полной трехмерной системы уравнений магнитной гидродинамики для случая сжимаемых

и несжимаемых течений. Показано, что в магнитогидродинамическом приближении мелкой воды во внешнем вертикальном магнитном поле поле скоростей двухкомпонентно, в то время как магнитное поле остается трехкомпонентным. Впервые сформулирована задача о реализуемости трехволновых взаимодействий для волн магнито-Пуанкаре и магнито-Россби в сжимаемых и несжимаемых течениях в приближении мелкой воды. Показано наличие нелинейных трехволновых взаимодействий волн магнито-Пуанкаре и волн магнито-Россби, вычислены коэффициенты взаимодействия трех волн. Найдены инкременты параметрических неустойчивостей. Найдены все автомодельные непрерывные и разрывные решения в магнитогидродинамических сжимаемых течениях мелкой воды на ровной границе и на наклонной плоскости, и решена задача распада произвольного разрыва.

Практическая и научная ценность работы

Полученные магнитогидродинамические уравнения в приближении мелкой воды во внешнем магнитном поле могут быть использованы для описания течений плазмы на Солнце, течений атмосфер нейтронных звезд, для изучения растекания материи в аккреционных дисках нейтронных звезд, магнитоактивных атмосфер экзопланет, захваченных приливами несущей звезды. Выявленная трехкомпонентность магнитного поля в таких течениях, а также учет крупномасштабной сжимаемости представляются важными для анализа недавних экспериментальных наблюдений волн Россби, а также для понимания наблюдательных данных о солнечной активности и в развитии моделей и идей долговременной изменчивости Солнца. Развитая теория волн Россби может быть использована для анализа данных об R-модах солнечных и звездных осцилляций. Полученные в диссертации результаты могут быть полезны при планировании космических миссий и астрофизических наблюдений.

Обоснованность и достоверность полученных результатов

Вывод уравнений мелкой воды магнитной гидродинамики осуществлялся методом усреднения исходной системы уравнений, широко используемым и хорошо себя зарекомендовавшим в геофизической гидродинамике и в физике пла-

нетных атмосфер. Полученные системы магнитогидродинамических уравнений в приближении мелкой воды во внешнем вертикальном магнитном поле и с учетом крупномасштабной сжимаемости в частном случае переходят в классические уравнения нейтральной жидкости и широко известные в астрофизике магнитогидродинамические уравнения без внешнего магнитного поля. Все полученные результаты линейной теории, развитая в диссертации, согласуются с известными результатами для течений нейтральной жидкости и для магнитогидродинамических течений. Для развития нелинейной теории используется хорошо зарекомендовавший себя асимптотический метод многомасштабных разложений. Автомодельные разрывные и непрерывные решения системы магнитогидродинамических мелкой воды с учетом сжимаемости, так же как и решение задачи распада разрыва переходят в соответствующие известные решения в случае отсутствия магнитного поля и в случае отсутствия сжимаемости.

Положения, выносимые на защиту

1. Получена полная система магнитогидродинамических уравнений в приближении мелкой воды во внешнем вертикальном магнитном поле с корректным учетом условия бездивергентности магнитного поля. В полученной системе поле скоростей содержит только горизонтальные компоненты, в то время как магнитное поле остается трехкомпонентным. Полученная система уравнений обобщена на случай сжимаемых течений. Получены уравнения мелкой воды во внешнем вертикальном магнитном поле в приближении бета-плоскости как в сжимаемом, так и в несжимаемом случае.

2. Найдены дисперсионные соотношения для волн магнито-Пуанкаре и для магнитострофических волн в горизонтальном магнитном поле, показано, что волны магнито-Пуанкаре и магнитострофические волны во внешнем вертикальном магнитном поле и в горизонтальном поле испытывают трехволновые взаимодействия. Найдены коэффициенты взаимодействия для всех случаев трехволновых взаимодействий и найдены инкременты параметрических неустойчивостей. Показано, что учет сжимаемости приводит к изменениям в групповой и фазовой скоростях волн магнито-Пуанкаре и магнитострофических волн, а также к изменениям в выражениях для коэффициентов трехволновых взаимо-

действий и инкрементов параметрических неустойчивостей.

3. Найдены дисперсионные соотношения для волн магнито-Россби в горизонтальном магнитном поле, показано, что волны магнито-Россби в магнито-гидродинамическом приближении мелкой воды во внешнем вертикальном магнитном поле и в горизонтальном магнитном поле испытывают трехволновые взаимодействия в слабонелинейном приближении. Найдены коэффициенты взаимодействия волн магнито-Россби в обоих случаях, найдены инкременты параметрических неустойчивостей. Показано, что учет сжимаемости приводит к изменениям в групповой и фазовой скоростях волн магнито-Россби, а также к изменениям в выражениях для коэффициентов трехволновых взаимодействий и инкрементов параметрических неустойчивостей.

4. Для системы магнито-гидродинамических уравнений в приближении мелкой воды в отсутствии вращения с учетом крупномасштабной сжимаемости найдены все автомодельные непрерывные и разрывные решения на ровной границе и на наклонной плоскости. Решена задача распада произвольного разрыва на ровной границе и на наклонной плоскости. Показано, что решение содержит те же самые конфигурации, как решение задачи Римана без учета сжимаемости. Найдено, что учет сжимаемости меняет границы областей начальных условий, в которых реализуются те или иные конфигурации течения. Решение задачи распада разрыва обобщено на случай течения на наклонной плоскости.

Апробация работы

Результаты диссертационной работы докладывались на семинарах сектора 53.9 ИКИ РАН, а также на международных и российских конференциях:

- Конференция молодых ученых ИКИ РАН, Москва, 2016-2019
- Всероссийская научная конференция МФТИ, Москва, 2015-2018
- Курчатовская междисциплинарная молодежная научная школа, Москва, НИЦ "Курчатовский Институт 2015-2017, 2019
- Arcetri Workshop on Plasma Astrophysics, Florence, Italy, 2019
- General Assembly of European Geosciences Union, Vienna, Austria, 2015-2017
- Annual Meeting of the APS Division of Fluid Dynamics, Boston, Massachusetts, USA, 2015, Denver, CO, USA, 2017

- American Geophysical Union Fall Meeting, San Francisco, USA, 2015-2016
- 11th European Fluid Mechanics Conference, Sevilla, Spain, 2016

Публикации по теме диссертации

Результаты диссертационной работы опубликованы в 5 статьях в реферируемых российских и международных журналах, рекомендованных ВАК:

1. Климачков Д.А., Петросян А.С., Нелинейные взаимодействия волн в магнитной гидродинамике астрофизической плазмы в приближении мелкой воды, ЖЭТФ, Том 149, Вып. 5, стр. 965, 2016

2. Климачков Д.А., Петросян А.С., Нелинейная теория магнитогидродинамических течений сжимаемой жидкости в приближении мелкой воды, ЖЭТФ, Том 150, Вып. 3, стр. 602, 2016

3. Klimachkov D.A., Petrosyan A.S., Parametric Instabilities in Shallow Water Magnetohydrodynamics of Astrophysical Plasma in External Magnetic Field, Phys. Lett. A, 381, p.106, 2017

4. Климачков Д.А., Петросян А.С., Волны Россби в магнитной гидродинамике вращающейся плазмы в приближении мелкой воды, ЖЭТФ, Том 152, Вып. 4, стр. 705, 2017

5. Климачков Д.А., Петросян А.С., Крупномасштабная сжимаемость во вращающихся течениях астрофизической плазмы в приближении мелкой воды, ЖЭТФ, Том 154, Вып. 6, стр. 1239, 2018

Полный список работ включает также 21 публикацию в тезисах докладов российских и международных конференций.

Личный вклад автора

Автор принимал участие в постановке задач, проводил все аналитические исследования, принимал участие в интерпретировании полученных результатов, принимал участие в подготовке статей.

Структура и объем диссертации

Диссертация состоит из введения, трех глав и заключения, содержит 145 страниц и 16 рисунков. Список импользуемой литературы содержит 66 наименований.

Содержание работы

В первой главе диссертации развита магнитогидродинамическая теория мелкой воды для вращающейся плазмы со свободной границей в поле силы тяжести, находящейся во внешнем вертикальном магнитном поле (Рис. 1). Полученная система уравнений имеет стационарное решение либо в вертикальном, либо в горизонтальном магнитном поле. Изучаются волны магнито-Пуанкаре и магнитострофические волны как во внешнем вертикальном магнитном поле, так и в горизонтальном магнитном поле.

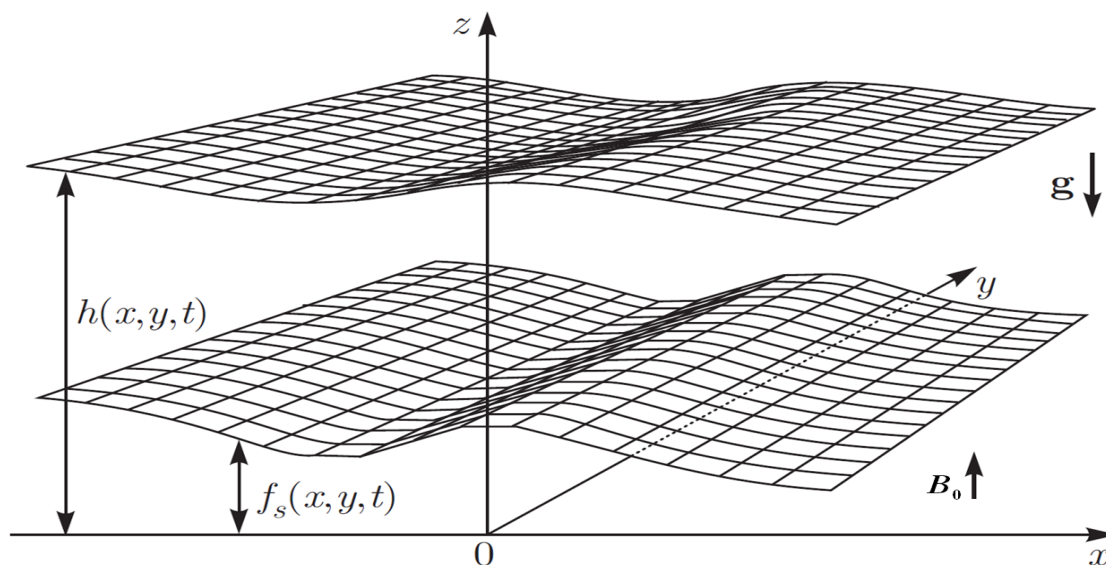


Рис. 1: Тонкий слой плазмы в вертикальном магнитном поле

В разделе 1.2 получена система магнитогидродинамических уравнений вращающейся мелкой воды на неровной границе во внешнем вертикальном магнитном поле. Система получена из исходных трехмерных уравнений магнитной гидродинамики усреднением уравнений по высоте слоя в предположении гидростатичности распределения давления и малости толщины слоя по отношению к характерному горизонтальному линейному размеру задачи. В результа-

те полученная система уравнений записывается относительно переменных высоты слоя, средней по высоте горизонтальной скорости течения и среднего по высоте магнитного поля. В полученной системе уравнений наличие внешнего вертикального магнитного поля приводит к дополнительным слагаемым в уравнениях для изменения импульса и для магнитной индукции и к необходимости учета вертикальной компоненты магнитного поля. Для решения этой задачи необходимо модернизировать вывод магнитогидродинамических уравнений мелкой воды, а именно, пренебречь вертикальными ускорениями только в уравнениях импульса, сохранив при этом усредненные слагаемые для вертикальной компоненты магнитного поля. В разделе получены уравнения для вертикальной составляющей магнитного поля и следствие условия бездивергентности, удовлетворяющееся тождественно при задании корректных начальных условий и содержащее вертикальную компоненту магнитного поля. Таким образом, модернизированные уравнения мелкой воды описывают трехмерную структуру магнитного поля и позволяют глубже понять как линейные, так и нелинейные эффекты в изучаемых плазменных течениях. Уравнение для вертикальной составляющей магнитного поля отделяется от остальных уравнений системы, так что для дальнейшего исследования течений оно не используется. При отсутствии внешнего магнитного поля система уравнений мелкой воды во внешнем вертикальном магнитном поле сводится к известной системе со стационарными решениями в виде горизонтальных (полоидального, тороидального и их суммы) магнитных полей.

В разделе 1.3 приводится система магнитогидродинамических уравнений мелкой воды на ровной границе при наличии вращения во внешнем вертикальном магнитном поле. Получены линейные решения для течений во внешнем вертикальном магнитном поле в виде, удобном для исследования нелинейных эффектов, а также развита линейная теория магнитогидродинамических течений мелкой воды для случая течений в горизонтальном (сумма тороидального и полоидального) магнитном поле. Для существования трехволновых взаимодействий между волнами с разными волновыми векторами \mathbf{k} и частотами ω в общем случае необходимо выполнения условия синхронизма $\omega(\mathbf{k}_1) + \omega(\mathbf{k}_2) = \omega(\mathbf{k}_1 + \mathbf{k}_2)$. Это условие изображено на графике (Рис. 10). Первое слагаемое задает точку

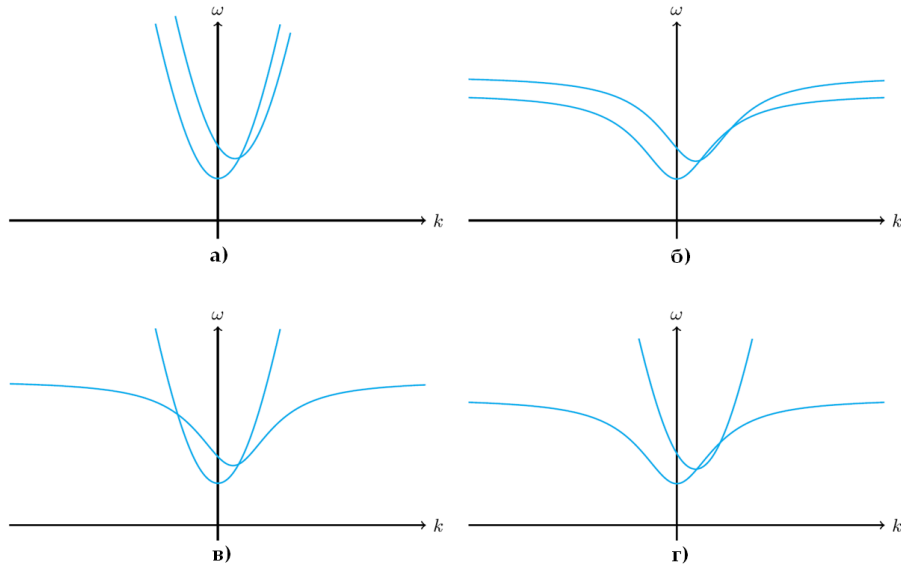


Рис. 2: а) Взаимодействие трех волн магнито-Пуанкаре, б) взаимодействие трех магнитострофических волн, в) взаимодействие двух волн магнито-Пуанкаре и одной магнитострофической волны, г) взаимодействие одной волны магнито-Пуанкаре и двух магнитострофических волн

$(\mathbf{k}_1, \omega(\mathbf{k}_1))$ дисперсионной поверхности одного из решений, второе слагаемое — точку $(\mathbf{k}_2, \omega(\mathbf{k}_2))$ на смещенной на $(\mathbf{k}_1, \omega(\mathbf{k}_1))$ дисперсионной поверхности. Наличие пересечения поверхностей означает существование такого набора из трех волн, который удовлетворяет условию синхронизма. Показано, что закон дисперсии линейных волн во внешнем вертикальном магнитном поле, а также и в горизонтальном магнитном поле обеспечивает выполнение условий синхронизма, необходимых для трехволновых нелинейных взаимодействий. Найдены все возможные трехволновые конфигурации линейных волн, для которых реализуются нелинейные взаимодействия: три волны магнито-Пуанкаре, три магнитострофических волны, две волны магнито-Пуанкаре и одна магнитострофическая волна, одна волна магнито-Пуанкаре и две магнитострофические волны (Рис. 10). В случае отсутствия магнитного поля магнитострофические волны исчезают и в слое распространяются только гравитационные волны Пуанкаре, аналогичные волнам в гидродинамике нейтральной жидкости в поле силы тяжести со свободной границей.

В разделе 1.4 для анализа нелинейного взаимодействия волн используется асимптотический метод многомасштабных разложений. Для каждой рассмот-

ренной конфигурации из трех волн как во внешнем вертикальном магнитном поле, так и в горизонтальном магнитном поле получены нелинейные уравнения взаимодействия медленно меняющихся амплитуд. Полученные уравнения трехволновых взаимодействий описывают физические эффекты слабонелинейного взаимодействия волн магнито-Пуанкаре и магнитострофических волн. Анализ полученных нелинейных уравнений, описывающих трехволновые взаимодействия волн магнито-Пуанкаре и магнитострофических волн, показал существование двух типов неустойчивостей: распадные неустойчивости и параметрическое усиление. Найдено, что существуют следующие четыре типа распадных неустойчивостей: волна магнито-Пуанкаре распадается на две волны магнито-Пуанкаре; магнитострофическая волна — на две магнитострофические волны; волна магнито-Пуанкаре — на одну волну магнито-Пуанкаре и одну магнитострофическую; магнитострофическая волна — на одну магнитострофическую и одну волну магнито-Пуанкаре. Получены инкременты найденных распадных неустойчивостей. Исследованы четыре механизма параметрического усиления: усиление волн магнито-Пуанкаре, магнитострофических волн, а также волны магнито-Пуанкаре в поле магнитострофической волны и магнитострофической волны в поле волны магнито-Пуанкаре. Для каждой исследованной неустойчивости найдены коэффициенты параметрического усиления.

Во второй главе диссертации развивается теория волн Россби в магнитной гидродинамике в вертикальном и в горизонтальном магнитном поле в приближении мелкой воды.

В разделе 2.2 обсуждается приближение β -плоскости для вращающихся магнитогидродинамических течений тонкого слоя плазмы на сфере. Получена система магнитогидродинамических уравнений в приближении мелкой воды во внешнем вертикальном магнитном поле на β -плоскости на неровной границе, включающая модернизированное условие, обеспечивающие бездивергентность магнитного поля. Показано, что магнитное поле в полученной системе принципиально трехмерно. При отсутствии внешнего магнитного поля система уравнений мелкой воды во внешнем вертикальном магнитном поле на β -плоскости сводится к известной системе магнитогидродинамических уравнений на β -плоскости со стационарными решениями в виде горизонтальных (полои-

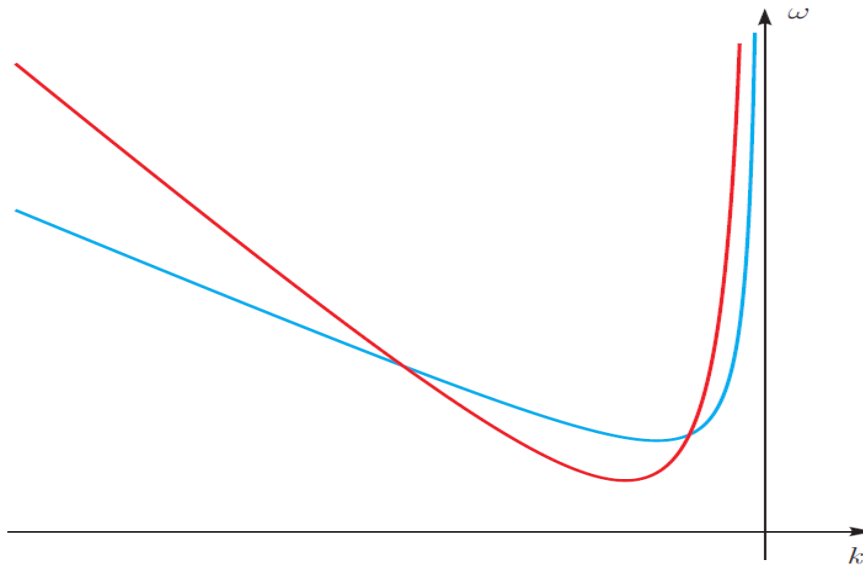


Рис. 3: Взаимодействие трех волн магнито-Россби

дальнего, тороидального и их суммы) магнитных полей.

В разделе 2.3 получены дисперсионные соотношения для волн магнито-Россби как во внешнем вертикальном магнитном поле, так и в горизонтальном магнитном поле. Проведен качественный анализ полученных дисперсионных соотношений, и для каждого случая показано, что выражения для дисперсионных соотношений обеспечивают возможность трехволновых взаимодействий волн магнито-Россби в слабонелинейном приближении (Рис. 3).

В разделе 2.4 методом многомасштабных разложений получена нелинейная система уравнений для медленно меняющихся амплитуд трех взаимодействующих волн магнито-Россби во внешнем вертикальном магнитном поле, а также аналогичная система уравнений для волн магнито-Россби в горизонтальном (тороидальном и полоидальном) магнитном поле. Для обоих случаев установлено наличие двух типов параметрических неустойчивостей: распадной неустойчивости, когда волна магнито-Россби распадается на две волны магнито-Россби, и параметрического усиления когда амплитуда одной волны магнито-Россби растет в поле двух других волн. Получены выражения для инкрементов параметрических неустойчивостей.

В третьей главе изучается влияние крупномасштабной сжимаемости на волны в магнитной гидродинамике во вращающейся плазме в приближении мелкой воды, а также исследуются непрерывные и разрывные автомодельные решения

и задача распада произвольного разрыва для магнитогидродинамических уравнений мелкой воды в сжимаемом приближении.

В разделе 3.2 получены две системы магнитогидродинамических уравнений в приближении мелкой воды во внешнем вертикальном магнитном поле на неровной границе с учетом крупномасштабной сжимаемости: система уравнений на f -плоскости и система уравнений на β -плоскости. Упрощенная система магнитогидродинамических уравнений в приближении мелкой воды, получается из исходных уравнений магнитной гидродинамики сжимаемой плазмы усреднением по высоте слоя в предположении гидростатичности распределения давлений и малости толщины слоя по отношению к характерному горизонтальному линейному размеру задачи и является обобщением системы уравнений, полученной в первой главе диссертационной работы. В этом приближении фильтруются звуковые волны и учитывается зависимость плотности от давления на крупных масштабах, описывающая эффекты сжимаемости. Полученная система уравнений нетривиальным образом зависит от отношения характерного вертикального масштаба течения и масштаба высот, на котором вариация плотности становится существенной. В отличие от магнитогидродинамических уравнений мелкой воды для несжимаемой плазмы, высота свободной поверхности не является определяющей характеристикой для описания течения, так как закон сохранения массы записывается через новую переменную, которая зависит от плотности плазмы и высоты слоя плазмы. Динамика течений, описываемых полученной системой в случаях когда характерная плотностная высота много меньше характерной высоты слоя, существенно отличается от случая несжимаемой жидкости, вследствие различия выражений для скорости распространения слабых возмущений и того, что в качестве эквивалента массы в полных магнитогидродинамических уравнениях используется переменная, нетривиально связанная с высотой слоя.

Развитая в первой главе теория линейных волн магнито-Пуанкаре и магнитострофических волн во внешнем вертикальном магнитном поле и в горизонтальном магнитном поле в разделе 3.3 обобщается на случай сжимаемых течений. Показано, что наличие крупномасштабной сжимаемости приводит к изменению фазовой и групповой скоростей рассматриваемых волн. Проведен

качественный анализ дисперсионных соотношений линейных волн, и сделаны выводы о возможности трехволновых взаимодействий для различных трехволновых конфигураций волн в сжимаемой плазме как во внешнем вертикальном магнитном поле, так и в горизонтальном магнитном поле. Методом многомасштабных разложений получены уравнения трехволновых взаимодействий для найденных конфигураций. Показано наличие параметрических неустойчивостей. Коэффициенты взаимодействия и инкременты неустойчивостей существенно отличаются от случая несжимаемого течения.

В разделе 3.4 на основе системы магнитогидродинамических уравнений в приближении мелкой воды во внешнем вертикальном магнитном поле с учетом сжимаемости получены дисперсионные соотношения для волн магнито-Россби. Показано, что учет крупномасштабной сжимаемости приводит к изменениям в выражениях для фазовой и групповой скоростей волн магнито-Россби. Анализ дисперсионных соотношений показал, что как в случае течений в вертикальном магнитном поле, так и в горизонтальном магнитном поле волны магнито-Россби испытывают трехволновые взаимодействия. Методом многомасштабных разложений получены уравнения трехволновых взаимодействий. Аналогично случаю несжимаемой плазмы исследуются параметрические неустойчивости при взаимодействии трех волн магнито-Россби как во внешнем вертикальном магнитном поле, так и в горизонтальном магнитном поле.

В разделе 3.5 в явном виде получены простые автомодельные решения уравнений магнитной гидродинамики сжимаемой плазмы в приближении мелкой воды над ровной границей при отсутствии вращения: магнитогравитационные волны разрежения, магнитогравитационные ударные волны и альфвеновские волны. Аналогичные решения найдены для магнитогидродинамических уравнений сжимаемой мелкой воды на наклонной плоскости. Для нахождения таких решений используется обобщенное определение простой волны, которое сводится к классическому определению в случае отсутствия источников слагаемого. Показано, что характеристиками системы уравнений в таком случае являются параболы, которые переходят в прямые в случае плоской границы.

В разделе 3.6 получено точное явное решение начальной задачи с кусочно-постоянными начальными условиями для уравнений магнитной гидродинами-

ки в приближении сжимаемой мелкой воды на ровной границе при отсутствии вращения (задача Римана). Показано, что решение представляет собой одну из пяти волновых конфигураций: «две магнитогравитационные ударные волны, две альфвеновские волны»; «левая магнитогравитационная ударная волна, правая магнитогравитационная волна разрежения, две альфвеновские волны»; «левая магнитогравитационная волна разрежения, правая магнитогравитационная ударная волна, две альфвеновские волны»; «две магнитогравитационные волны разрежения, две альфвеновские волны»; «две магнитогравитационные волны разрежения, зона вакуума». Найдены условия на начальные данные, при которых реализуется каждая конкретная конфигурация и исследованы отличия рассматриваемого течения от несжимаемого случая. Несмотря на формальное сходство решений в классическом случае магнитогидродинамических течений несжимаемой жидкости и сжимаемого случая, нелинейная динамика, описываемая полученными решениями, существенно отличается вследствие различия выражений для квадрата скорости распространения слабых возмущений. Решена задача распада произвольного разрыва для магнитогидродинамических течений сжимаемой плазмы в поле силы тяжести в приближении мелкой воды на наклонной плоскости. Решение состоит из пяти волновых конфигураций таких, как и в случае ровной границы. Для каждой конфигурации найдены необходимые и достаточные условия ее реализации. На наклонной границе вместо областей с однородным течением реализуются области равноускоренного течения, характеристики и ударные волны распространяются по параболическим траекториям.

В заключении приведены результаты работы.

1 Волны Пуанкаре в магнитогидродинамических течениях мелкой воды

1.1 Введение

Для описания течений астрофизической плазмы, например, течений солнечного тахоклина (тонкого слоя внутри Солнца, находящегося над конвективной зоной) [1], [13], атмосфер нейтронных звезд [4], течений аккрецирующей материи в нейтронных звездах [7], магнитоактивных атмосфер экзопланет, захваченных приливами несущей звезды [10], [11], [12], используется магнитогидродинамическое приближение мелкой воды [2]. В главе изучаются магнитогидродинамические течения мелкой воды во внешнем вертикальном магнитном поле. Такая конфигурация магнитного поля характерна для атмосфер нейтронных звезд [4], и для магнитоактивных атмосфер экзопланет [10]. В этом случае в магнитогидродинамическом приближении мелкой воды появляются дополнительные слагаемые, приводящие к возникновению в линейном приближении двух типов быстрых волн: волн магнито-Пуанкаре и магнитострофических волн [4]. В главе обобщается линейная теория магнитогидродинамических течений мелкой воды, развитая в [4], на случай волн конечной амплитуды в приближении слабой нелинейности. Показано, что закон дисперсии линейных волн во внешнем вертикальном магнитном поле обеспечивает условия синхронизма, необходимые для нелинейных взаимодействий. В отсутствии же внешнего вертикального магнитного поля, магнитострофические волны исчезают и волны магнито-Пуанкаре переходят в гравитационные волны Пуанкаре в гидродинамике нейтральной жидкости в поле силы тяжести со свободной границей.

Анализ вида дисперсионных соотношений для волн магнито-Пуанкаре и магнитострофических волн во внешнем вертикальном магнитном поле показал, что возможны следующие конфигурации трех взаимодействующих волн: три волны магнито-Пуанкаре, три магнитострофические волны, а также межмодовые взаимодействия: две волны магнито-Пуанкаре и магнитострофическая волна, две магнитострофические волны и одна волна магнито-Пуанкаре. Для описания нелинейного взаимодействия волн использован асимптотический метод многомасштабных разложений [26]. Для всех четырех случаев получены нели-

нейные уравнения взаимодействия амплитуд волн. Анализ полученных нелинейных уравнений, описывающих трехволновые взаимодействия, показал существование двух типов неустойчивостей: распадные неустойчивости и параметрическое усиление волн [27]. Для всех видов неустойчивостей найдены коэффициенты параметрического усиления.

Исследование дисперсионных соотношений для волн в горизонтальном магнитном поле показало наличие трехволновых взаимодействий в слабонелинейном приближении. Для каждой трехволновой конфигурации найдены коэффициенты взаимодействия в нелинейной системе трехволновых взаимодействий для амплитуд волн. Исследование нелинейных уравнений показало наличие двух типов неустойчивостей: распадные неустойчивости и параметрическое усиление волн [27], для которых найдены коэффициенты параметрического усиления.

В разделе 1.2 получены магнитогидродинамические уравнения вращающейся мелкой воды над неровной границе во внешнем вертикальном магнитном поле из исходных уравнений магнитной гидродинамики для слоя плазмы со свободной границей в поле силы тяжести

В разделе 1.3 приведена система магнитогидродинамических уравнений мелкой воды в поле силы тяжести на ровной границе при наличии вращения во внешнем вертикальном магнитном поле, приведены линейные решения этой системы в виде, удобном для дальнейшего анализа нелинейных эффектов. Проанализированы дисперсионные поверхности исследуемых волн и сделаны выводы о наличии синхронизмов, обеспечивающих возможность трехволновых взаимодействий в конечноамплитудном приближении слабой нелинейности. В случае отсутствия внешнего вертикального магнитного поля, приводятся дисперсионные соотношения для линейных волн в горизонтальном магнитном поле. Показано наличие трехволновых взаимодействий в таком течении.

В разделе 1.4 описана процедура асимптотического метода многомасштабных разложений. Получены уравнения медленно меняющихся амплитуд трехволновых взаимодействий волновых пакетов магнитной гидродинамики мелкой воды во внешнем вертикальном магнитном поле. Полученные уравнения трехволновых взаимодействий используются для анализа физических эффектов слабонелинейного взаимодействия магнито-Пуанкаре и магнитострофических волн

во внешнем вертикальном магнитном поле и в горизонтальном магнитном поле. Проанализированы распадные неустойчивости и явления параметрического усиления для обоих случаев.

1.2 Вывод магнитогидродинамических уравнений мелкой воды во внешнем вертикальном магнитном поле

В данном разделе получим систему уравнений вращающейся мелкой воды на произвольной границе во внешнем вертикальном магнитном поле для описания течений слоя вращающейся астрофизической плазмы со свободной границей (Рис. 1). Для этого проинтегрируем в условиях гидростатичности трехмерные уравнения магнитной гидродинамики в поле силы тяжести во вращающейся системе отсчета по вертикали, используя граничные условия на нижней границе и на свободной границе. Из-за малости характерных вертикальных масштабов течения по сравнению с горизонтальными, мы пренебрегаем интегралами от произведений малых флуктуаций. В результате получим систему уравнений для средних по высоте скоростей, средних магнитных полей и высоты слоя.

Уравнения магнитной гидродинамики в поле тяжести во вращающейся системе отсчета с круговой частотой Ω имеют вид:

$$\rho \frac{\partial \mathbf{v}}{\partial t} + \rho(\mathbf{v}, \nabla)\mathbf{v} = -\nabla(p + \frac{B^2}{8\pi}) + \frac{1}{4\pi}(\mathbf{B}, \nabla)\mathbf{B} - \rho\mathbf{g} - 2\rho(\boldsymbol{\Omega} \times \mathbf{v}) \quad (1.1)$$

$$\frac{\partial \mathbf{B}}{\partial t} = \nabla \times (\mathbf{v} \times \mathbf{B}) \quad (1.2)$$

$$\nabla \mathbf{v} = 0 \quad (1.3)$$

$$\nabla \mathbf{B} = 0 \quad (1.4)$$

где ρ - плотность плазмы, \mathbf{v} - скорость плазмы в данной точке, p - давление, \mathbf{B} - магнитное поле, \mathbf{g} - ускорение свободного падения. В системе (1.1-1.4) уравнение (1.1) - закон изменения импульса, (1.2) - уравнение магнитной индукции, (1.3) - уравнение непрерывности для несжимаемой жидкости, (1.4) - условие бездивергентности магнитного поля, которое используется для задания корректных начальных условий и затем выполняется тождественно как следствие уравне-

ния магнитной индукции (1.2). Перепишем уравнение (1.2) в тензорном виде:

$$\begin{aligned}
\left(\frac{\partial \mathbf{B}}{\partial t}\right)_\alpha &= (\nabla \times (\mathbf{v} \times \mathbf{B}))_\alpha = e_{\alpha\beta\gamma} \frac{\partial}{\partial x_\beta} e_{\gamma\mu\nu} v_\mu B_\nu = \\
&= (\delta_{\alpha\mu} \delta_{\beta\nu} - \delta_{\alpha\nu} \delta_{\beta\mu}) \frac{\partial}{\partial x_\beta} v_\mu B_\nu = \\
&= \frac{\partial}{\partial x_\beta} B_\beta v_\alpha - \frac{\partial}{\partial x_\beta} v_\beta B_\alpha \quad (1.5)
\end{aligned}$$

Для того чтобы преобразовать слагаемые $\rho(\mathbf{v}, \nabla)\mathbf{v}$ и $\frac{1}{4\pi}(\mathbf{B}, \nabla)\mathbf{B}$ из уравнения (1.1), а также слагаемые $\frac{\partial}{\partial x_\beta} B_\beta v_\alpha$ и $\frac{\partial}{\partial x_\beta} v_\beta B_\alpha$ из уравнения (1.5), воспользуемся известным математическим тождеством, удовлетворяющимся при $\nabla \mathbf{A} = 0$:

$$\begin{aligned}
(\mathbf{A}, \nabla)\mathbf{A} &= \\
&= A_1 \partial_x \begin{pmatrix} A_1 \\ A_2 \\ A_3 \end{pmatrix} + A_2 \partial_y \begin{pmatrix} A_1 \\ A_2 \\ A_3 \end{pmatrix} + A_3 \partial_z \begin{pmatrix} A_1 \\ A_2 \\ A_3 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} A_1 \\ A_2 \\ A_3 \end{pmatrix} \left(\frac{\partial A_1}{\partial x} + \frac{\partial A_2}{\partial y} + \frac{\partial A_3}{\partial z} \right) = \\
&= A_1 \partial_x \begin{pmatrix} A_1^2 \\ A_1 A_2 \\ A_1 A_3 \end{pmatrix} + A_2 \partial_y \begin{pmatrix} A_1 A_2 \\ A_2^2 \\ A_2 A_3 \end{pmatrix} + A_3 \partial_z \begin{pmatrix} A_1 A_3 \\ A_2 A_3 \\ A_3^2 \end{pmatrix} \quad (1.6)
\end{aligned}$$

Заменим также:

$$B^2 = 4\pi \tilde{B}^2 \quad p + \frac{B^2}{8\pi} = \tilde{p}$$

Применяя тождество (1.6), получим уравнения в матричном виде из уравнений

(1.1) и (1.5) при условии (1.3) и (1.4):

$$\begin{aligned}
& \partial_t \begin{pmatrix} \rho v_1 \\ \rho v_2 \\ \rho v_3 \\ \tilde{B}_1 \\ \tilde{B}_2 \\ \tilde{B}_3 \end{pmatrix} + \partial_x \begin{pmatrix} \rho v_1^2 - \tilde{B}_1^2 + \tilde{p} \\ \rho v_1 v_2 - \tilde{B}_1 \tilde{B}_2 \\ \rho v_1 v_3 - \tilde{B}_1 \tilde{B}_3 \\ 0 \\ v_1 \tilde{B}_2 - v_2 \tilde{B}_1 \\ v_1 \tilde{B}_3 - v_3 \tilde{B}_1 \end{pmatrix} + \partial_y \begin{pmatrix} \rho v_1 v_2 - \tilde{B}_1 \tilde{B}_2 \\ \rho v_2^2 - \tilde{B}_2^2 + \tilde{p} \\ \rho v_2 v_3 - \tilde{B}_2 \tilde{B}_3 \\ v_2 \tilde{B}_1 - v_1 \tilde{B}_2 \\ 0 \\ v_2 \tilde{B}_3 - v_3 \tilde{B}_2 \end{pmatrix} + \partial_z \begin{pmatrix} \rho v_1 v_3 - \tilde{B}_1 \tilde{B}_3 \\ \rho v_2 v_3 - \tilde{B}_2 \tilde{B}_3 \\ \rho v_3^2 - \tilde{B}_3^2 + \tilde{p} \\ v_3 \tilde{B}_1 - v_1 \tilde{B}_3 \\ v_3 \tilde{B}_2 - v_2 \tilde{B}_3 \\ 0 \end{pmatrix} = \\
& = \begin{pmatrix} -2\rho(\Omega_2 v_3 - \Omega_3 v_2) \\ -2\rho(\Omega_3 v_1 - \Omega_1 v_3) \\ -\rho g - 2\rho(\Omega_1 v_2 - \Omega_2 v_1) \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \quad (1.7)
\end{aligned}$$

Считаем, что жидкость вращается с направленной вдоль z круговой частотой $\omega(0, 0, \omega)$, тогда система (1.7) запишется в виде:

$$\begin{aligned}
& \partial_t \begin{pmatrix} \rho v_1 \\ \rho v_2 \\ \rho v_3 \\ \tilde{B}_1 \\ \tilde{B}_2 \\ \tilde{B}_3 \end{pmatrix} + \partial_x \begin{pmatrix} \rho v_1^2 - \tilde{B}_1^2 + \tilde{p} \\ \rho v_1 v_2 - \tilde{B}_1 \tilde{B}_2 \\ \rho v_1 v_3 - \tilde{B}_1 \tilde{B}_3 \\ 0 \\ v_1 \tilde{B}_2 - v_2 \tilde{B}_1 \\ v_1 \tilde{B}_3 - v_3 \tilde{B}_1 \end{pmatrix} + \partial_y \begin{pmatrix} \rho v_1 v_2 - \tilde{B}_1 \tilde{B}_2 \\ \rho v_2^2 - \tilde{B}_2^2 + \tilde{p} \\ \rho v_2 v_3 - \tilde{B}_2 \tilde{B}_3 \\ v_2 \tilde{B}_1 - v_1 \tilde{B}_2 \\ 0 \\ v_2 \tilde{B}_3 - v_3 \tilde{B}_2 \end{pmatrix} + \partial_z \begin{pmatrix} \rho v_1 v_3 - \tilde{B}_1 \tilde{B}_3 \\ \rho v_2 v_3 - \tilde{B}_2 \tilde{B}_3 \\ \rho v_3^2 - \tilde{B}_3^2 + \tilde{p} \\ v_3 \tilde{B}_1 - v_1 \tilde{B}_3 \\ v_3 \tilde{B}_2 - v_2 \tilde{B}_3 \\ 0 \end{pmatrix} = \\
& = \begin{pmatrix} 2\Omega\rho v_2 \\ -2\Omega\rho v_1 \\ -\rho g \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \quad (1.8)
\end{aligned}$$

Над неровной поверхностью $\alpha(x, y)$ в вертикальном внешнем поле $\tilde{\mathbf{B}}_0$ граничные условия выглядят следующим образом:

$$v_3|_{z=\alpha} = v_1|_{z=\alpha} \frac{\partial \alpha}{\partial x} + v_2|_{z=\alpha} \frac{\partial \alpha}{\partial y} \quad (1.9)$$

$$v_3|_{z=h} = \frac{\partial h}{\partial t} + v_1|_{z=h} \frac{\partial \alpha}{\partial x} + v_2|_{z=h} \frac{\partial \alpha}{\partial y} \quad (1.10)$$

$$\tilde{B}_3|_{z=\alpha} = \tilde{B}_0 + \tilde{B}_1|_{z=\alpha} \frac{\partial \alpha}{\partial x} + \tilde{B}_2|_{z=\alpha} \frac{\partial \alpha}{\partial y} \quad (1.11)$$

$$\tilde{B}_3|_{z=h} = \tilde{B}_0 + \tilde{B}_1|_{z=h} \frac{\partial \alpha}{\partial x} + \tilde{B}_2|_{z=h} \frac{\partial \alpha}{\partial y} \quad (1.12)$$

Сделаем замену $\tilde{\mathbf{B}} = \rho^{1/2} \mathbf{B}$. Тогда третье уравнение ситемы (1.8) принимает вид:

$$\partial_t v_3 + (\mathbf{v}, \nabla) v_3 - (\mathbf{B}, \nabla) B_3 + \frac{\partial_z(p + \frac{\rho}{2} B^2)}{\rho} = -g$$

Считаем, что распределение давления слабо отличается от магнитогидростатического:

$$\partial_z(p + \frac{\rho}{2} B^2) = \partial_z \tilde{p} = -\rho g \quad (1.13)$$

Для вывода системы уравнений мелкой воды необходимо проинтегрировать систему уравнений (1.8) по вертикали. Учитывая введенное магнитогидростатическое приближение (1.13), запишем интегрируемые уравнения (1.1) и (1.2) в следующем виде

$$\begin{aligned} \int_{\alpha}^h \partial_t \begin{pmatrix} \rho v_1 \\ \rho v_2 \\ 0 \\ \tilde{B}_1 \\ \tilde{B}_2 \\ \tilde{B}_3 \end{pmatrix} + \int_{\alpha}^h \partial_x \begin{pmatrix} \rho v_1^2 - \tilde{B}_1^2 + \tilde{p} \\ \rho v_1 v_2 - \tilde{B}_1 \tilde{B}_2 \\ 0 \\ 0 \\ v_1 \tilde{B}_2 - v_2 \tilde{B}_1 \\ v_1 \tilde{B}_3 - v_3 \tilde{B}_1 \end{pmatrix} + \int_{\alpha}^h \partial_y \begin{pmatrix} \rho v_1 v_2 - \tilde{B}_1 \tilde{B}_2 \\ \rho v_2^2 - \tilde{B}_2^2 + \tilde{p} \\ 0 \\ v_2 \tilde{B}_1 - v_1 \tilde{B}_2 \\ 0 \\ v_2 \tilde{B}_3 - v_3 \tilde{B}_2 \end{pmatrix} + \\ + \int_{\alpha}^h \partial_z \begin{pmatrix} \rho v_1 v_3 - \tilde{B}_1 \tilde{B}_3 \\ \rho v_2 v_3 - \tilde{B}_2 \tilde{B}_3 \\ \tilde{p} \\ v_3 \tilde{B}_1 - v_1 \tilde{B}_3 \\ v_3 \tilde{B}_2 - v_2 \tilde{B}_3 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2\Omega \rho v_2 (h - \alpha) \\ -2\Omega \rho v_1 (h - \alpha) \\ -\rho g (h - \alpha) \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \quad (1.14) \end{aligned}$$

Проинтегрируем также уравнение несжимаемости $\nabla \mathbf{v} = 0$:

$$\int_{\alpha}^h \left(\frac{\partial v_1}{\partial x} + \frac{\partial v_2}{\partial y} + \frac{\partial v_3}{\partial z} \right) dz = 0 \quad (1.15)$$

и уравнение бездивергентности магнитного поля $\nabla \mathbf{B} = 0$:

$$\int_{\alpha}^h \left(\frac{\partial v_1}{\partial x} + \frac{\partial v_2}{\partial y} + \frac{\partial v_3}{\partial z} \right) dz = 0 \quad (1.16)$$

Для преобразования уравнений системы (1.14) воспользуемся правилом Лейбница дифференцирования функции под знаком интеграла:

$$\frac{\partial}{\partial x} \int_{b(x)}^{a(x)} f(x, z) dz = \int_{b(x)}^{a(x)} \frac{\partial}{\partial x} f(x, z) dz + f|_a \frac{\partial a}{\partial x} - f|_b \frac{\partial b}{\partial x}$$

Тогда уравнение (1.15) преобразуется к

$$\begin{aligned} \frac{\partial}{\partial x} \int_{\alpha}^h v_1 dz - v_1|_{z=h} \frac{\partial h}{\partial x} + v_1|_{z=\alpha} \frac{\partial \alpha}{\partial x} + \\ + \frac{\partial}{\partial y} \int_{\alpha}^h v_2 dz - v_2|_{z=h} \frac{\partial h}{\partial y} + v_2|_{z=\alpha} \frac{\partial \alpha}{\partial y} + v_3|_{z=h} - v_3|_{z=\alpha} = 0 \end{aligned} \quad (1.17)$$

Подстановка граничных условий (1.9,1.10) в (1.17) дает:

$$\begin{aligned} \frac{\partial}{\partial x} \int_{\alpha}^h v_1 dz - v_1|_{z=h} \frac{\partial h}{\partial x} + v_1|_{z=\alpha} \frac{\partial \alpha}{\partial x} + \\ + \frac{\partial}{\partial y} \int_{\alpha}^h v_2 dz - v_2|_{z=h} \frac{\partial h}{\partial y} + v_2|_{z=\alpha} \frac{\partial \alpha}{\partial y} + \frac{\partial h}{\partial t} + v_1|_{z=h} \frac{\partial \alpha}{\partial x} + \\ + v_2|_{z=h} \frac{\partial \alpha}{\partial y} - v_1|_{z=\alpha} \frac{\partial \alpha}{\partial x} + v_2|_{z=\alpha} \frac{\partial \alpha}{\partial y} = 0 \end{aligned}$$

Или, после приведения подобных слагаемых

$$\frac{\partial}{\partial x} \int_{\alpha}^h v_1 dz + \frac{\partial}{\partial y} \int_{\alpha}^h v_2 dz + \frac{\partial h}{\partial t} = 0 \quad (1.18)$$

На свободной границе давление постоянное и равно $\tilde{p}|_{z=h} = p_0$, поэтому из третьего уравнения системы (1.14) получим

$$\begin{aligned} \int_z^h \frac{\partial}{\partial z} \tilde{p} dz = -\rho g(h - z) \\ \tilde{p}(z) = p_0 + \rho g(h - z) \end{aligned} \quad (1.19)$$

Выпишем первое уравнение системы (1.14):

$$\begin{aligned} \rho \int_{\alpha}^h \frac{\partial v_1}{\partial t} dz + \rho \int_{\alpha}^h \frac{\partial(v_1^2 - B_1^2)}{\partial x} dz + \int_{\alpha}^h \frac{\partial \tilde{p}}{\partial x} dz + \\ + \rho \int_{\alpha}^h \frac{\partial(v_1 v_2 - B_1 B_2)}{\partial y} dz + \rho \int_{\alpha}^h \frac{\partial(v_1 v_3 - B_1 B_3)}{\partial z} dz = 2\Omega \rho v_2 (h - \alpha) \end{aligned} \quad (1.20)$$

Уравнение (1.20) преобразуется по правилу дифференцирования. Знаки производных выносим за скобки, при этом третье слагаемое принимает следующий вид:

$$\begin{aligned} \frac{\partial}{\partial x} \int_{\alpha}^h (p_0 + \rho g(h - z)) dz - p_0 \frac{\partial h}{\partial x} + (p_0 + \rho g(h - \alpha)) \frac{\partial \alpha}{\partial x} = \\ = \frac{\partial}{\partial x} (p_0(h - \alpha)) + \rho g h (h - \alpha) - \frac{\rho g}{2} h^2 + \frac{\rho g}{2} \alpha^2 - p_0 \frac{\partial h}{\partial x} + (p_0 + \rho g(h - \alpha)) \frac{\partial \alpha}{\partial x} = \\ = \rho g(h - \alpha) \frac{\partial h}{\partial x} \end{aligned}$$

Тогда после подстановки граничных условий и приведения подобных слагаемых получится

$$\begin{aligned} & \rho \frac{\partial}{\partial t} \int_{\alpha}^h v_1 dz + \rho \frac{\partial}{\partial x} \int_{\alpha}^h v_1^2 dz - \rho \frac{\partial}{\partial x} \int_{\alpha}^h B_1^2 dz + \rho g(h - \alpha) \frac{\partial h}{\partial x} + \\ & + \rho \frac{\partial}{\partial y} \int_{\alpha}^h v_1 v_2 dz - \rho \frac{\partial}{\partial y} \int_{\alpha}^h B_1 B_2 dz - \rho B_0 (B_1|_{z=h} - B_1|_{z=\alpha}) = \\ & = 2\Omega \rho v_2 (h - \alpha) \quad (1.21) \end{aligned}$$

Считаем, что горизонтальные составляющие магнитного поля малы по сравнению с вертикальным полем B_0 . Изменение горизонтальной составляющей вдоль оси z обусловлено, прежде всего, сдвигом в слое, поэтому выражение для производной горизонтальной составляющей магнитного поля примет вид:

$$\begin{aligned} \frac{\partial B_i}{\partial z} &= -\frac{B_i}{h - \alpha}, \quad i = 1, 2 \\ B_i|_{z=h} - B_i|_{z=\alpha} &= \frac{\partial B_i}{\partial z} (h - \alpha) = -B_i, \quad i = 1, 2 \end{aligned}$$

Тогда уравнение (1.21) принимает следующий вид

$$\begin{aligned} & \rho \frac{\partial}{\partial t} \int_{\alpha}^h v_1 dz + \rho \frac{\partial}{\partial x} \int_{\alpha}^h v_1^2 dz - \rho \frac{\partial}{\partial x} \int_{\alpha}^h B_1^2 dz + \rho g(h - \alpha) \frac{\partial h}{\partial x} + \\ & + \rho \frac{\partial}{\partial y} \int_{\alpha}^h v_1 v_2 dz - \rho \frac{\partial}{\partial y} \int_{\alpha}^h B_1 B_2 dz + \rho B_0 B_1 = \\ & = 2\Omega \rho v_2 (h - \alpha) \quad (1.22) \end{aligned}$$

Второе уравнение системы (1.14) преобразуется аналогично

$$\begin{aligned} & \rho \frac{\partial}{\partial t} \int_{\alpha}^h v_2 dz + \rho \frac{\partial}{\partial x} \int_{\alpha}^h v_1 v_2 dz - \rho \frac{\partial}{\partial x} \int_{\alpha}^h B_1 B_2 dz + \rho g(h - \alpha) \frac{\partial h}{\partial y} + \\ & + \rho \frac{\partial}{\partial y} \int_{\alpha}^h v_2^2 dz - \rho \frac{\partial}{\partial y} \int_{\alpha}^h B_2^2 dz + \rho B_0 B_2 = \\ & = -2\Omega \rho v_1 (h - \alpha) \quad (1.23) \end{aligned}$$

Третье уравнение системы (1.14) примет вид (1.19) и используется как выражение, определяющее распределение давления \tilde{p} как магнитогидростатического при интегрировании. Четвертое и пятое уравнения системы (1.14) принимают вид

$$\frac{\partial}{\partial t} \int_{\alpha}^h B_1 dz + \frac{\partial}{\partial x} \int_{\alpha}^h v_2 B_1 dz - \frac{\partial}{\partial y} \int_{\alpha}^h v_1 B_2 dz - B_0 v_1 = 0 \quad (1.24)$$

$$\frac{\partial}{\partial t} \int_{\alpha}^h B_2 dz + \frac{\partial}{\partial x} \int_{\alpha}^h v_1 B_2 dz - \frac{\partial}{\partial y} \int_{\alpha}^h v_2 B_1 dz - B_0 v_2 = 0 \quad (1.25)$$

Из уравнения для вертикальной составляющей магнитного поля в системе (1.14) получим

$$\frac{\partial}{\partial t} \int_0^h B_3 dz + \frac{\partial}{\partial x} \int_0^h B_3 v_1 dz + \frac{\partial}{\partial y} \int_0^h v_2 B_3 dz = 0 \quad (1.26)$$

Уравнение (1.16) после применения правила интегрирования и подстановки граничных условий примет следующий вид:

$$\frac{\partial}{\partial x} \int_0^h B_1 dz + \frac{\partial}{\partial y} \int_0^h B_2 dz + B_3 = 0 \quad (1.27)$$

Уравнение (1.26) играет важную роль для понимания приближения мелкой воды во внешнем магнитном поле, так как уравнение для вертикальной составляющей магнитного поля принципиально важно для описания трехкомпонентного магнитного поля в рассматриваемом течении.

Уравнения (1.26) и (1.27) являются важными в МГД приближении мелкой воды во внешнем магнитном поле не только как технические детали в процедуре вывода уравнений, но и обеспечивают выполнение условия бездивергентности магнитного поля при их усреднении в сжимаемой плазме. Кроме того (1.26) демонстрирует существование z -компоненты магнитного поля в приближении мелкой воды во внешнем вертикальном поле.

Введем средние по высоте скорости и магнитные поля (обозначим при этом $\acute{h} = (h - \alpha)$):

$$v_i = \bar{v}_i + \acute{v}_i = \frac{1}{\acute{h}} \int_{\alpha}^h v_i dz + \acute{v}_i$$

$$B_i = \bar{B}_i + \acute{B}_i = \frac{1}{\acute{h}} \int_{\alpha}^h B_i dz + \acute{B}_i$$

где $i = 1, 2$. Пренебрегая проинтегрированными квадратами штрихованных величин, а также перекрестными членами, заменим индексы 1, 2 на x, y и из уравнений (1.18, 1.22-1.25) получим следующую систему

$$\frac{\partial \acute{h}}{\partial t} + \frac{\partial \acute{h} v_x}{\partial x} + \frac{\partial \acute{h} v_y}{\partial y} = 0 \quad (1.28)$$

$$\frac{\partial (\acute{h} v_x)}{\partial t} + \frac{\partial (\acute{h} (v_x^2 - B_x^2))}{\partial x} + g \acute{h} \frac{\partial \acute{h}}{\partial x} + \frac{\partial (\acute{h} (v_x v_y - B_x B_y))}{\partial y} + B_0 B_x - f \acute{h} v_y = 0 \quad (1.29)$$

$$\frac{\partial(\dot{h}v_y)}{\partial t} + \frac{\partial(\dot{h}(v_x v_y - B_x B_y))}{\partial x} + \frac{\partial(\dot{h}(v_y^2 - B_y^2))}{\partial y} + g\dot{h}\frac{\partial h}{\partial y} + B_0 B_y + f\dot{h}v_x = 0 \quad (1.30)$$

$$\frac{\partial(\dot{h}B_x)}{\partial t} + \frac{\partial(\dot{h}(B_x v_y - B_y v_x))}{\partial y} - B_0 v_x = 0 \quad (1.31)$$

$$\frac{\partial(\dot{h}B_y)}{\partial t} + \frac{\partial(\dot{h}(B_y v_x - B_x v_y))}{\partial x} - B_0 v_y = 0 \quad (1.32)$$

$$\frac{\partial B_z}{\partial t} + B_0 \frac{\partial u_x}{\partial x} + B_0 \frac{\partial u_y}{\partial y} = 0 \quad (1.33)$$

$$\frac{\partial h B_x}{\partial x} + \frac{\partial h B_y}{\partial y} + B_z = 0 \quad (1.34)$$

В полученной системе $f = 2\Omega$ - параметр Кориолиса. Таким образом, в разделе получена система уравнений магнитной гидродинамики с вращением в вертикальном магнитном поле в приближении мелкой воды на неровной границе.

1.3 Линейная теория волн магнито-Пуанкаре в магнито-гидродинамическом приближении мелкой воды. Качественный анализ дисперсионных соотношений

1.3.1 Волны во внешнем вертикальном магнитном поле

В данном разделе приведена система магнитогидродинамических уравнений мелкой воды на ровной границе, описывающая течения слоя плазмы со свободной границей в поле силы тяжести при наличии вращения, приведены линейные решения этой системы. Полученные линейные решения используются для качественного анализа дисперсионных поверхностей линейных волн и исследования условий синхронизма, обеспечивающих возможность межволнового взаимодействия.

Запишем систему магнитогидродинамических уравнений мелкой воды на ровной границе:

$$\frac{\partial h}{\partial t} + \frac{\partial(hv_x)}{\partial x} + \frac{\partial(hv_y)}{\partial y} = 0 \quad (1.35)$$

$$\frac{\partial(hv_x)}{\partial t} + \frac{\partial(h(v_x^2 - B_x^2))}{\partial x} + gh\frac{\partial h}{\partial x} + \frac{\partial(h(v_x v_y - B_x B_y))}{\partial y} + B_0 B_x - fhv_y = 0 \quad (1.36)$$

$$\frac{\partial(hv_y)}{\partial t} + \frac{\partial(h(v_x v_y - B_x B_y))}{\partial x} + \frac{\partial(h(v_y^2 - B_y^2))}{\partial y} + gh\frac{\partial h}{\partial y} + B_0 B_y + fhv_x = 0 \quad (1.37)$$

$$\frac{\partial(hB_x)}{\partial t} + \frac{\partial(h(B_x v_y - B_y v_x))}{\partial y} - B_0 v_x = 0 \quad (1.38)$$

$$\frac{\partial(hB_y)}{\partial t} + \frac{\partial(h(B_y v_x - B_x v_y))}{\partial x} - B_0 v_y = 0 \quad (1.39)$$

$$\frac{\partial B_z}{\partial t} + B_0 \frac{\partial u_x}{\partial x} + B_0 \frac{\partial u_y}{\partial y} = 0 \quad (1.40)$$

$$\frac{\partial(hB_x)}{\partial x} + \frac{\partial(hB_y)}{\partial y} = 0 \quad (1.41)$$

В системе (1.35)-(1.41) h - высота свободной поверхности, v_x, v_y - горизонтальные скорости в приближении мелкой воды в плоскости xy соответственно, B_x, B_y - горизонтальные компоненты магнитного поля в приближении мелкой воды в направлении x и y соответственно, B_z - вертикальная компонента магнитного поля, B_0 - внешнее магнитное поле, направленное перпендикулярно плоскости xy , f - параметр Кориолиса. Первое уравнение системы (1.35) - уравнение изменения высоты слоя, уравнения (1.36), (1.37) - закон изменения импульса, (1.38), (1.39), (1.40) - уравнения изменения магнитного поля, уравнение (1.41) - следствие уравнения бездивергентности магнитного поля в полной системе исходных уравнений магнитной гидродинамики. Уравнение (1.41) при задании корректных начальных условий выполняется тождественно как следствие уравнений (1.38)-(1.40).

Рассмотрим стационарное решение системы (1.35)-(1.39) в виде слоя постоянной высоты h_0 во внешнем вертикальном постоянном поле B_0 , с нулевыми значениями горизонтальных скоростей и горизонтальных компонентов магнитных полей. Линеаризуя уравнения (1.35-1.39) на фоне такого стационарного состояния, получим систему уравнений, описывающую возмущения бесконечно малой амплитуды:

$$\frac{\partial h_1}{\partial T_0} + h_0 \frac{\partial v_{x1}}{\partial X_0} + h_0 \frac{\partial v_{y1}}{\partial Y_0} = 0 \quad (1.42)$$

$$h_0 \frac{\partial v_{x1}}{\partial T_0} + gh_0 \frac{\partial h_1}{\partial X_0} + B_0 B_{x1} - fh_0 v_{y1} = 0 \quad (1.43)$$

$$h_0 \frac{\partial v_{y1}}{\partial T_0} + gh_0 \frac{\partial h_1}{\partial Y_0} + B_0 B_{y1} + fh_0 v_{x1} = 0 \quad (1.44)$$

$$h_0 \frac{\partial B_{x1}}{\partial T_0} - B_0 v_{x1} = 0 \quad (1.45)$$

$$h_0 \frac{\partial B_{y1}}{\partial T_0} - B_0 v_{y1} = 0 \quad (1.46)$$

Ищем решение однородной системы в виде линейных волн:

$$\mathbf{u}_1 = \begin{pmatrix} h_1 \\ v_{x1} \\ v_{y1} \\ B_{x1} \\ B_{y1} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \acute{h}_1 \\ \acute{v}_{x1} \\ \acute{v}_{y1} \\ \acute{B}_{x1} \\ \acute{B}_{y1} \end{pmatrix} e^{i(k_x X_0 + k_y Y_0 - \omega T_0)} \quad (1.47)$$

Тогда из (1.47) получим характеристическую систему алгебраических уравнений:

$$\mathbf{A} \begin{pmatrix} \acute{v}_{x1} \\ \acute{v}_{y1} \\ \acute{h}_1 \\ \acute{B}_{x1} \\ \acute{B}_{y1} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} k_x h_0 & k_y h_0 & -\omega & 0 & 0 \\ -i\omega & -f & igk_x & \frac{B_0}{h_0} & 0 \\ f & -i\omega & igk_y & 0 & \frac{B_0}{h_0} \\ -\frac{B_0}{h_0} & 0 & 0 & i\omega & 0 \\ 0 & -\frac{B_0}{h_0} & 0 & 0 & i\omega \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \acute{v}_{x1} \\ \acute{v}_{y1} \\ \acute{h}_1 \\ \acute{B}_{x1} \\ \acute{B}_{y1} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \quad (1.48)$$

Система уравнений (1.48) имеют нетривиальные решения при условии $\det \mathbf{A} = 0$. Отсюда получим дисперсионное уравнение, описывающее линейные волны исходной системы магнитогидродинамических уравнений вращающейся мелкой воды во внешнем вертикальном магнитном поле B_0 :

$$\omega^5 - \omega^3(gh_0k^2 + f^2 + 2(\frac{B_0}{h_0})^2) + (\frac{B_0}{h_0})^2(gh_0k^2 + (\frac{B_0}{h_0})^2)\omega = 0 \quad (1.49)$$

решение которого имеет вид:

$$\omega^2 = \frac{gh_0k^2}{2} + \frac{f^2}{2} + (\frac{B_0}{h_0})^2 \pm \frac{1}{2} \sqrt{gh_0k^2(gh_0k^2 + 2f^2) + f^2(f^2 + 4(\frac{B_0}{h_0})^2)} \quad (1.50)$$

Заметим, что полученные решения линейной задачи при отсутствии внешнего вертикального магнитного поля переходят в линейные решение уравнений мелкой воды для нейтральной жидкости, со следующим дисперсионным соотношением:

$$\omega^2 = \frac{gh_0k^2}{2} + \frac{f^2}{2} + \frac{1}{2} \sqrt{(gh_0k^2)^2 + 2f^2gh_0k^2 + f^4} = gh_0k^2 + f^2 \quad (1.51)$$

и описывают волны Пуанкаре, аналогичные волнам в нейтральной жидкости. В нашем же случае из-за наличия вертикального поля возникают два типа волн (Рис. 4). Первый тип волн является обобщением линейных волн Пуанкаре с дисперсионным уравнением:

$$\omega^2 = \frac{gh_0k^2}{2} + \frac{f^2}{2} + (\frac{B_0}{h_0})^2 + \frac{1}{2} \sqrt{gh_0k^2(gh_0k^2 + 2f^2) + f^2(f^2 + 4(\frac{B_0}{h_0})^2)} \quad (1.52)$$

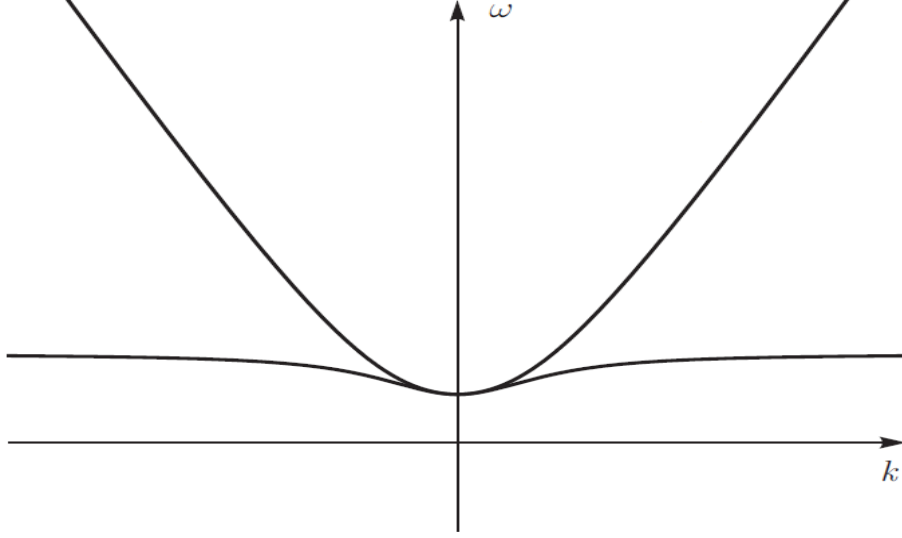


Рис. 4: Общий вид дисперсионных кривых для волн магнито-Пуанкаре (верхняя ветвь) и магнитострофических волн (нижняя ветвь)

решение которого

$$\omega_1 = \sqrt{\frac{gh_0k^2}{2} + \frac{f^2}{2} + \left(\frac{B_0}{h_0}\right)^2 + \frac{1}{2}\sqrt{gh_0k^2(gh_0k^2 + 2f^2) + f^2(f^2 + 4\left(\frac{B_0}{h_0}\right)^2)}} \quad (1.53)$$

соответствует волне, распространяющейся вдоль \mathbf{k} , а решение

$$\omega_3 = -\sqrt{\frac{gh_0k^2}{2} + \frac{f^2}{2} + \left(\frac{B_0}{h_0}\right)^2 + \frac{1}{2}\sqrt{gh_0k^2(gh_0k^2 + 2f^2) + f^2(f^2 + 4\left(\frac{B_0}{h_0}\right)^2)}} \quad (1.54)$$

описывает волну, распространяющуюся в направлении, противоположном \mathbf{k} .

Будем называть полученные линейные решения волнами магнито-Пуанкаре.

Второй тип линейных решений описывает магнитострофические волны, не имеющие аналога в нейтральной жидкости, и имеет дисперсионное соотношение:

$$\omega^2 = \frac{gh_0k^2}{2} + \frac{f^2}{2} + \left(\frac{B_0}{h_0}\right)^2 - \frac{1}{2}\sqrt{gh_0k^2(gh_0k^2 + 2f^2) + f^2(f^2 + 4\left(\frac{B_0}{h_0}\right)^2)} \quad (1.55)$$

решение которого

$$\omega_2 = \sqrt{\frac{gh_0k^2}{2} + \frac{f^2}{2} + \left(\frac{B_0}{h_0}\right)^2 - \frac{1}{2}\sqrt{gh_0k^2(gh_0k^2 + 2f^2) + f^2(f^2 + 4\left(\frac{B_0}{h_0}\right)^2)}} \quad (1.56)$$

описывает магнитострофическую волну, распространяющуюся вдоль вектора \mathbf{k} .

А решение

$$\omega_4 = -\sqrt{\frac{gh_0k^2}{2} + \frac{f^2}{2} + \left(\frac{B_0}{h_0}\right)^2} - \frac{1}{2}\sqrt{gh_0k^2(gh_0k^2 + 2f^2) + f^2\left(f^2 + 4\left(\frac{B_0}{h_0}\right)^2\right)} \quad (1.57)$$

описывает магнитоострофическую волну, распространяющуюся в направлении, противоположном вектору \mathbf{k} . Индексы 1, 2 соответствуют волнам, распространяющимся вдоль \mathbf{k} , а индексы 3, 4 соответствуют волнам, распространяющимся в направлении, противоположном \mathbf{k} для удобства рассмотрения нелинейных взаимодействий. Таким образом, полное решение линейной системы уравнений (1.42)-(1.46) представляет собой сумму четырех линейных волн:

$$\mathbf{u}_1 = \sum_{j=1}^4 \int \varphi_j(\mathbf{k}) \mathbf{a}_j(\mathbf{k}) \exp[i(\omega_j(\mathbf{k}) - (\mathbf{k}, \mathbf{R}_0))] dk_x dk_y + c.c. \quad (1.58)$$

Общий вид дисперсионных кривых для случая $\omega > 0$ представлен на рисунке 4. Верхняя кривая соответствует магнито-Пуанкаре моде, нижняя кривая - магнитоострофической моде. По вертикали отложена частота ω , по горизонтали - k_x , когда дисперсионный вектор \mathbf{k} направлен вдоль оси x . Дисперсионное соотношение $\omega(\mathbf{k})$ задает дисперсионную поверхность $\omega(k_x, k_y)$. Эта поверхность представляет собой поверхность вращения, так как дисперсионное соотношение симметрично относительно k_x и k_y . Для $\omega < 0$, то есть для решений ω_3 (1.54) и ω_4 (1.57), дисперсионные поверхности симметричны поверхностям ω_1 (1.53) и ω_2 (1.56) относительно плоскости $\omega = 0$.

Для того, чтобы оценить возможность межволновых взаимодействий для описанных типов волн, необходимо проанализировать их дисперсионные соотношения, определить асимптотику дисперсионных кривых для обоих типов волн. Условие синхронизма, необходимое для возникновения взаимодействия между волнами с разными волновыми векторами и разными волновыми частотами в общем случае имеет вид:

$$\omega(\mathbf{k}_1) + \omega(\mathbf{k}_2) = \omega(\mathbf{k}_1 + \mathbf{k}_2) \quad (1.59)$$

В выражении (3.50) \mathbf{k}_1 , $\omega(\mathbf{k}_1)$ - волновой вектор и частота первой взаимодействующей волны, \mathbf{k}_2 , $\omega(\mathbf{k}_2)$ - волновой вектор и частота второй взаимодействующей волны, $\mathbf{k}_3 = \mathbf{k}_1 + \mathbf{k}_2$, $\omega(\mathbf{k}_3)$ - волновой вектор и частота третьей взаимодействующей волны. Изобразим это условие на графике. Первое слагаемое задает

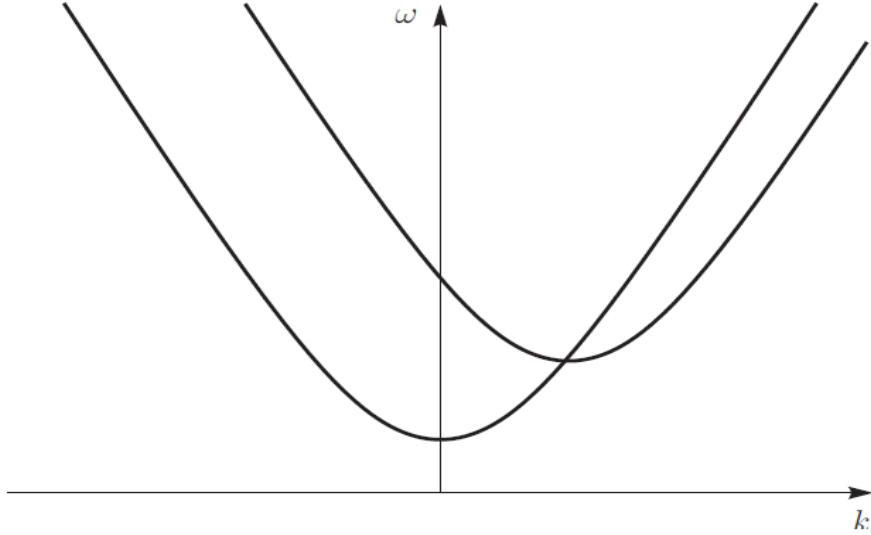


Рис. 5: Условие синхронизма для трех волн магнито-Пуанкаре

точку $(k_1, \omega(k_1))$ на дисперсионной кривой одного из решений, второе слагаемое - точку $(k_2, \omega(k_2))$ на дисперсионной кривой другого решения, и если вторая дисперсионная кривая, смещенная относительно начала координат на $(k_1, \omega(k_1))$, пересечет первую в некоторой точке $(k_3, \omega(k_3))$, то это и будет означать существование таких k_2 и $\omega(k_2)$, что условие синхронизма (3.50) выполнится.

Для магнито-Пуанкаре волн условие синхронизма запишется в виде $\omega_1(\mathbf{k}_1) + \omega_1(\mathbf{k}_2) = \omega_1(\mathbf{k}_1 + \mathbf{k}_2)$, где индекс 1 означает магнито-Пуанкаре волну, распространяющуюся вдоль \mathbf{k} . При малых частотах дисперсионные поверхности для магнито-Пуанкаре моды построенные над плоскостью k_x, k_y выпуклы вниз. На рисунке 5 показано, что кривая $\omega_1(k_x)$ и кривая $\omega_1(k_x - k_{x1}) + \omega_1(k_{x1})$ (второе слагаемое в условии синхронизма) могут пересекаться, а значит и поверхность $\omega_1(\mathbf{k})$ и поверхность $\omega_1(\mathbf{k} - \mathbf{k}_1) + \omega_1(\mathbf{k}_1)$ могут пересекаться вдоль некоторой кривой. Точки пересечения соответствует волне магнито-Пуанкаре с частотой, равной сумме частот, и волновым вектором, равным сумме волновых векторов двух первых волн. Это означает, что условие синхронизма выполняется для трех магнито-Пуанкаре волн, поэтому три магнито-Пуанкаре волны могут нелинейно взаимодействовать.

Условие синхронизма для трех магнитострофических волн имеет вид $\omega_2(\mathbf{k}_1) + \omega_2(\mathbf{k}_2) = \omega_2(\mathbf{k}_1 + \mathbf{k}_2)$. Нижний индекс 2 относится к магнитострофической моде. Для того чтобы понять, может ли реализоваться такое условие, обратимся

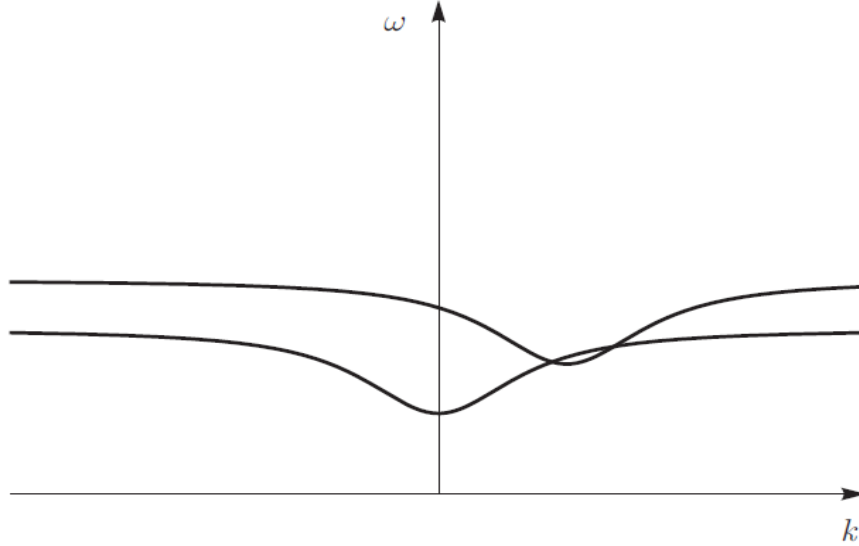


Рис. 6: Условие синхронизма для трех магнито-стروفических волн

к рисунку 6, на котором нижняя кривая - $\omega_2(k_x)$ определяет первое слагаемое в условии синхронизма, верхняя кривая $\omega_2(k_x - k_{x1}) + \omega_2(k_{x1})$ описывает второе слагаемое, а наличие пересечения говорит о пересечении дисперсионных поверхностей, то есть существуют волны с таким волновыми векторами $\mathbf{k}_1, \mathbf{k}_2$, что условие синхронизма выполняется.

В случае взаимодействия одной магнито-стروفической и одной магнито-Пуанкаре волн, может получиться магнито-стروفическая волна (Рис. 7) со следующим условием синхронизма:

$$\omega_2(\mathbf{k}_1) + \omega_1(\mathbf{k}_2) = \omega_2(\mathbf{k}_1 + \mathbf{k}_2) \quad (1.60)$$

или может получиться магнито-Пуанкаре волна (Рис. 8), причем условие синхронизма:

$$\omega_1(\mathbf{k}_1) + \omega_2(\mathbf{k}_2) = \omega_1(\mathbf{k}_1 + \mathbf{k}_2) \quad (1.61)$$

В обоих случаях наличие пересечения поверхностей, означает существование таких \mathbf{k}_1 и \mathbf{k}_2 , при которых условия будут выполнены и может иметь место трехволновое взаимодействие.

1.3.2 Волны в горизонтальном магнитном поле

Исходная система (1.35)-(1.39) имеет стационарное решение \mathbf{u}_0 в виде покоящегося $\mathbf{v} = 0$ слоя плазмы высотой $h = h_0$ с постоянным горизонтальным маг-

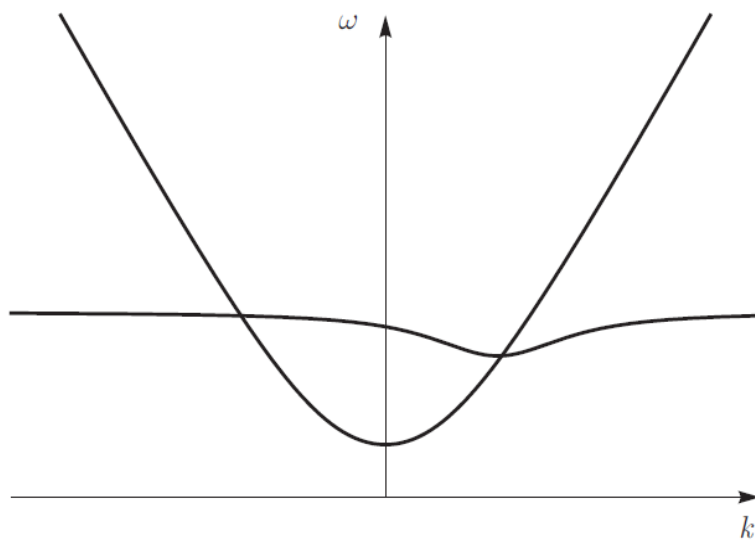


Рис. 7: Условие синхронизма для двух волн магнито-Пуанкаре и одной магнитострофической волны

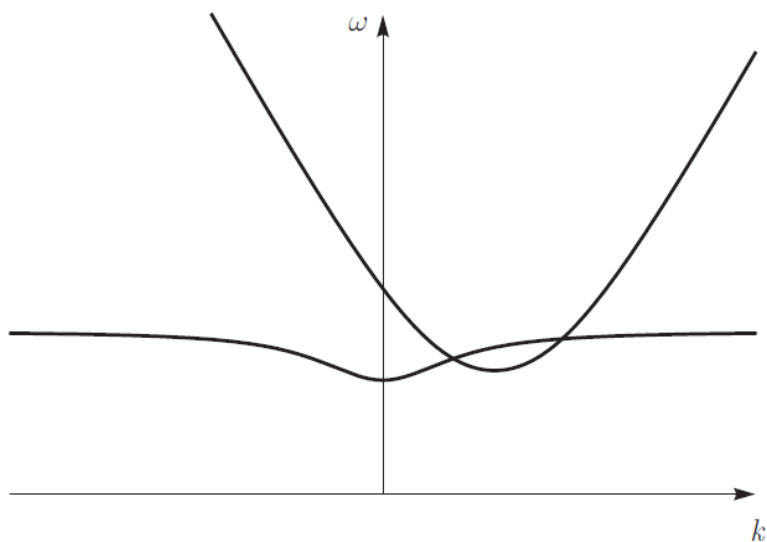


Рис. 8: Условие синхронизма для двух магнитострофических волни одной волны магнито-Пуанкаре

нитным полем $\mathbf{B} = \mathbf{B}_0(B_{x0}, B_{y0})$. Линеаризуя исходную систему относительно стационарного решения, получим систему линейных дифференциальных уравнений:

$$\partial_t h + h_0 \partial_x v_x + h_0 \partial_y v_y = 0 \quad (1.62)$$

$$\partial_t v_x + g \partial_x h - (\mathbf{B}_0, \nabla) B_x - f v_y = 0 \quad (1.63)$$

$$\partial_t v_y + g \partial_y h - (\mathbf{B}_0, \nabla) B_y + f v_x = 0 \quad (1.64)$$

$$\partial_t B_x - (\mathbf{B}_0, \nabla) v_x = 0 \quad (1.65)$$

$$\partial_t B_y - (\mathbf{B}_0, \nabla) v_y = 0 \quad (1.66)$$

Ищем решение системы (1.62)-(1.66) в виде плоской волны:

$$\mathbf{u}_1 = \begin{pmatrix} h_1 \\ v_{x1} \\ v_{y1} \\ B_{x1} \\ B_{y1} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} h' \\ v'_x \\ v'_y \\ B'_x \\ B'_y \end{pmatrix} \exp(i(\omega t - (\mathbf{k}, \mathbf{r}))) \quad (1.67)$$

Подставляя решение (1.67) в систему (1.62)-(1.66), получим систему линейных уравнений:

$$\mathbf{A} \begin{pmatrix} h' \\ v'_x \\ v'_y \\ B'_x \\ B'_y \end{pmatrix} = 0 \quad (1.68)$$

в которой линейный оператор \mathbf{A} имеет следующий вид

$$\mathbf{A} = \begin{pmatrix} i\omega & -ik_x h_0 & -ik_y h_0 & 0 & 0 \\ -igk_x & i\omega & -f & i(\mathbf{B}_0, \mathbf{k}) & 0 \\ -igk_y & f & i\omega & 0 & i(\mathbf{B}_0, \mathbf{k}) \\ 0 & i(\mathbf{B}_0, \mathbf{k}) & 0 & i\omega & 0 \\ 0 & 0 & i(\mathbf{B}_0, \mathbf{k}) & 0 & i\omega \end{pmatrix} \quad (1.69)$$

Система (1.68) имеет нетривиальные решения, когда выполняется условие $\det \mathbf{A} = 0$. Несложными преобразованиями получим из этого условия дисперсионное соотношение:

$$\omega^4 - \omega^2 (gh_0 k^2 + f^2 + 2(\mathbf{B}_0, \mathbf{k})^2) + (\mathbf{B}_0, \mathbf{k})^2 (gh_0 k^2 + (\mathbf{B}_0, \mathbf{k})^2) = 0 \quad (1.70)$$

Полученное дисперсионное уравнение имеет два решения:

$$\omega_{1,2} = \pm \frac{1}{\sqrt{2}} \sqrt{gh_0 k^2 + f^2 + 2(\mathbf{B}_0, \mathbf{k})^2 + \sqrt{g^2 h_0^2 k^4 + 2f^2 gh_0 k^2 + 4f^2 (\mathbf{B}_0, \mathbf{k})^2 + f^4}} \quad (1.71)$$

- дисперсионное соотношение для магнито-Пуанкаре волн, в котором знак $+$ относится к волне, распространяющейся вдоль волнового вектора \mathbf{k} , а знак $-$ к волне, распространяющейся в противоположном направлении,

$$\omega_{3,4} = \pm \frac{1}{\sqrt{2}} \sqrt{gh_0 k^2 + f^2 + 2(\mathbf{B}_0, \mathbf{k})^2 - \sqrt{g^2 h_0^2 k^4 + 2f^2 gh_0 k^2 + 4f^2 (\mathbf{B}_0, \mathbf{k})^2 + f^4}} \quad (1.72)$$

- дисперсионное соотношение, описывающее магнитострофические волны, где аналогично знак $+$ относится к волне, распространяющейся вдоль волнового вектора \mathbf{k} , а знак $-$ к волне, распространяющейся в противоположном направлении. Общий вид дисперсионных кривых волн в горизонтальном магнитном поле аналогичен случаю во внешнем вертикальном магнитном поле (рис. 4).

Решением линеаризованной системы являются плоские волны, при этом собственный вектор колебаний \mathbf{a} имеет следующий вид:

$$\mathbf{a} = \begin{pmatrix} h' \\ v'_x \\ v'_y \\ B'_x \\ B'_y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -\omega^2 gh_0 - i\omega k_x gh_0 f + k_y gh_0 (\mathbf{B}_0, \mathbf{k})^2 \\ -\omega (i\omega f + k_x k_y gh_0) \\ -\omega^3 + \omega (k_x^2 gh_0 + (\mathbf{B}_0, \mathbf{k})^2) \\ (\mathbf{B}_0, \mathbf{k}) (i\omega f + k_x k_y gh_0) \\ \omega^2 (\mathbf{B}_0, \mathbf{k}) - (\mathbf{B}_0, \mathbf{k}) (k_x^2 gh_0 + (\mathbf{B}_0, \mathbf{k})^2) \end{pmatrix} \quad (1.73)$$

В (1.73) $\omega_i = \omega_i(\mathbf{k})$ согласно выражениям (1.71), (1.72). Таким образом, решение \mathbf{u}_1 линейной системы дифференциальных уравнений (1.62)-(1.66) в общем виде выглядит следующим образом:

$$\mathbf{u}_1 = \sum_{i=1}^4 \int dk_x dk_y \mathbf{a}_i(\mathbf{k}) \alpha_i(\mathbf{k}) \exp(i(\omega_i(\mathbf{k})t - (\mathbf{k}, \mathbf{r}))) + c.c. \quad (1.74)$$

где $\omega_i(\mathbf{k})$ определяется выражениями (1.71), (1.72), $\mathbf{a}_i(\mathbf{k})$ - собственные векторы линейного оператора A , $\alpha_i(\mathbf{k})$ - амплитуда волны.

Для исследования нелинейного взаимодействия волн, определим, исходя из общего вида дисперсионных кривых, возможность существования трехволновых взаимодействий. Условие синхронизма для трех взаимодействующих волн

имеет вид:

$$\omega(\mathbf{k}_1) + \omega(\mathbf{k}_2) = \omega(\mathbf{k}_3) \quad \mathbf{k}_1 + \mathbf{k}_2 = \mathbf{k}_3 \quad (1.75)$$

На рисунке 5, аналогично случаю волн в вертикальном магнитном поле, показано, что дисперсионное соотношение для магнито-Пуанкаре волн $\omega_1(\mathbf{k})$ таково, что поверхности $(\omega_1(\mathbf{k}_0) + \omega_1(\mathbf{k}))$ и $(\omega_1(\mathbf{k}))$ пересекаются, поэтому условие взаимодействия трех волн магнито-Пуанкаре в горизонтальном магнитном поле выполняется. Схожая ситуация возникает при рассмотрении возможности взаимодействия трех магнито-Пуанкаре волн (1.72): на рисунке 6 показано наличие трехволновых взаимодействий в этом случае. Для двух волн магнито-Пуанкаре и одной магнито-Пуанкаре волны (рис. 7), а также для триады из одной волны магнито-Пуанкаре и двух магнито-Пуанкаре волн (рис. 8) также возможны трехволновые взаимодействия. То есть найдутся три такие волны магнито-Пуанкаре $(\omega_1(\mathbf{k}_1), \mathbf{k}_1)$, $(\omega_1(\mathbf{k}_2), \mathbf{k}_2)$, $(\omega_1(\mathbf{k}_3), \mathbf{k}_3)$, что условие синхронизма (1.75) будет выполнено. Аналогично для оставшихся трех случаев найдутся три волны, удовлетворяющие условию (1.75), что означает их нелинейное взаимодействие в следующем порядке приближения.

1.4 Трехволновые уравнения и параметрические неустойчивости в магнитогидродинамических течениях мелкой воды

1.4.1 Трехволновые взаимодействия в течениях во внешнем вертикальном магнитном поле

Для получения уравнений трехволновых взаимодействий воспользуемся асимптотическим методом многомасштабных разложений [26]. Решение системы (1.42)-(1.46) представим в виде ряда по малому параметру ε :

$$\mathbf{u} = \mathbf{u}_0 + \varepsilon \mathbf{u}_1 + \varepsilon^2 \mathbf{u}_2 + \dots \quad (1.76)$$

где \mathbf{u}_0 - стационарное решение системы (1.35)-(1.39), \mathbf{u}_1 - решение линеаризованной системы (1.42)-(1.46), \mathbf{u}_2 - поправка, описывающая влияние квадратичной нелинейности. Выписав слагаемые, пропорциональные ε^2 , получим систему линейных неоднородных дифференциальных уравнений относительно \mathbf{u}_2 , со-

державшую в правой своей части резонансные слагаемые, приводящие к линейному росту решения (по времени и по координате). Таким образом, нарушается условие сходимости ряда (1.76) $\varepsilon^2 u_2 \ll \varepsilon u_1$ на больших масштабах. Поэтому, для того чтобы исключить влияние резонансных слагаемых, введем зависимость амплитуды волны от больших временных и больших пространственных масштабов в виде $\mathbf{u}_1(T_1, X_1, Y_1) \exp(i(k_x X_0 + k_y Y_0 - \omega T_0))$. Эволюционное уравнение для медленно меняющейся амплитуды обеспечивает равномерную сходимость асимптотического ряда. Перейдем, таким образом, от аргументов t, x, y к "быстрым" (T_0, X_0, Y_0) и "медленным" аргументам (T_1, X_1, Y_1) в соответствии с соотношениями

$$\frac{\partial}{\partial t} = \frac{\partial}{\partial T_0} + \varepsilon \frac{\partial}{\partial T_1}$$

$$\frac{\partial}{\partial x} = \frac{\partial}{\partial X_0} + \varepsilon \frac{\partial}{\partial X_1} \tag{1.77}$$

$$\frac{\partial}{\partial y} = \frac{\partial}{\partial Y_0} + \varepsilon \frac{\partial}{\partial Y_1}$$

Подставим в исходную систему (1.42)-(1.46) выражения (1.76) и (1.77) и выпишем слагаемые, пропорциональные ε^2 :

$$\begin{aligned}
& \begin{pmatrix} \frac{\partial h_2}{\partial T_0} + h_0 \frac{\partial v_{x2}}{\partial X_0} + h_0 \frac{\partial v_{y2}}{\partial Y_0} \\ h_0 \frac{\partial v_{x2}}{\partial T_0} + gh_0 \frac{\partial h_2}{\partial X_0} + B_0 B_{x2} - f_0 h_0 v_{y2} \\ h_0 \frac{\partial v_{y2}}{\partial T_0} + gh_0 \frac{\partial h_2}{\partial Y_0} + B_0 B_{y2} + f_0 h_0 v_{x2} \\ h_0 \frac{\partial B_{x2}}{\partial T_0} + B_0 v_{x2} \\ h_0 \frac{\partial B_{y2}}{\partial T_0} + B_0 v_{y2} \end{pmatrix} = \\
& = - \begin{pmatrix} \frac{\partial h_1}{\partial T_1} + H \frac{\partial v_{x1}}{\partial X_1} + H \frac{\partial v_{y1}}{\partial Y_1} \\ h_0 \frac{\partial v_{x1}}{\partial T_1} + gh_0 \frac{\partial h_1}{\partial X_1} \\ h_0 \frac{\partial v_{y1}}{\partial T_1} + gh_0 \frac{\partial h_1}{\partial Y_1} \\ h_0 \frac{\partial B_{x1}}{\partial T_1} \\ h_0 \frac{\partial B_{y1}}{\partial T_1} \end{pmatrix} - \\
& - \begin{pmatrix} \frac{\partial h_1 v_{x1}}{\partial X_0} + \frac{\partial h_1 v_{y1}}{\partial Y_0} \\ \frac{\partial h_1 v_{x1}}{\partial T_0} + gh_1 \frac{\partial h_1}{\partial X_0} \\ \frac{\partial h_1 v_{y1}}{\partial T_0} + gh_1 \frac{\partial h_1}{\partial Y_0} \\ \frac{\partial h_1 B_{x1}}{\partial T_0} \\ \frac{\partial h_1 B_{y1}}{\partial T_0} \end{pmatrix} \quad (1.78)
\end{aligned}$$

В правой части полученной системы уравнений стоят нелинейные слагаемые, которые могут вызвать резонанс с оператором левой части. Представим решение линейной системы уравнений (1.42)-(1.46) в виде суммы трех волн, удовлетворяющих условию синхронизма (3.50):

$$\mathbf{u}_1 = \varphi \mathbf{a}(\mathbf{k}_1) \exp i\theta_1 + \psi \mathbf{a}(\mathbf{k}_2) \exp i\theta_2 + \chi \mathbf{a}(\mathbf{k}_3) \exp i\theta_3 + c.c. \quad (1.79)$$

В выражении (1.79) φ, ψ, χ - амплитуды взаимодействующих волн, $\theta_i = -\omega(\mathbf{k}_i)T_0 + k_{xi}X_0 + k_{yi}Y_0$ - фазы волн, \mathbf{a} - собственный вектор оператора \mathbf{A} , \mathbf{a}^* - комплексно сопряженный вектор. Слагаемые в правой части полученных уравнений (1.78) вызывают резонанс с оператором левой части. Действительно, слагаемые вида $\mathbf{u}_1^i \mathbf{u}_1^j$ в правой части дают выражения, резонансные с левой частью, представляющей собой оператор \mathbf{A} , действующий на вектор \mathbf{u}_2 , так как выполняется условие синхронизма (3.50). Для исключения резонансных слагаемых в правой части воспользуемся условием ортогональности правой части (1.78) ядру оператора \mathbf{A} (1.48), известным как условие совместности. Обозначим собственный

вектор оператора \mathbf{A}^* как $\mathbf{z} = (z_1, z_2, z_3, z_4, z_5)^T$. Найдем собственные числа λ и собственные вектора оператора \mathbf{A}^* :

$$\det \begin{pmatrix} -i\omega & ik_x H & ik_y H & 0 & 0 \\ igHk_x & -i\omega H & -f_0 H & B_0 & 0 \\ igHk_y & f_0 H & -i\omega H & 0 & B_0 \\ 0 & -B_0 & 0 & -i\omega H & 0 \\ 0 & 0 & -B_0 & 0 & -i\omega H \end{pmatrix} = 0 \quad (1.80)$$

Откуда получаем (1.49). Собственный вектор $\mathbf{z} = (z_1, z_2, z_3, z_4, z_5)^T$ удовлетворяет следующей системе уравнений:

$$-i\omega z_1 + ik_x H z_2 + ik_y H z_3 = 0 \quad (1.81)$$

$$igHk_x z_1 - i\omega H z_2 - f_0 H z_3 + B_0 z_4 = 0 \quad (1.82)$$

$$igHk_y z_1 + f_0 H z_2 - i\omega H z_3 + B_0 z_5 = 0 \quad (1.83)$$

$$-B_0 z_2 - i\omega H z_4 = 0 \quad (1.84)$$

$$-B_0 z_3 - i\omega H z_5 = 0 \quad (1.85)$$

Выражение для собственного вектора с точностью до постоянного множителя выглядит следующим образом:

$$\mathbf{z} = \begin{pmatrix} igk_x H^4 f \lambda_0 + gk_y \lambda_0^2 H^4 + gk_y H^2 B_0^2 \\ iH^3 f \lambda_0^2 - k_x k_y g H^4 \lambda_0 \\ \lambda_0^3 H^3 + B_0^2 H \lambda_0 + k_x^2 g H^4 \lambda_0 \\ -H^2 f \lambda_0 B_0 - ik_x k_y g H^3 B_0 \\ iB_0 \lambda_0^3 H^2 + iB_0^3 \lambda_0 + ik_x^2 g B_0 H^3 \lambda_0 \end{pmatrix} c \quad (1.86)$$

В (2.45) c - произвольная константа.

Подставим решение в виде (1.79) в систему уравнений (1.78) и выпишем правую часть системы уравнений (1.78), пропорциональную $\exp(i\theta_1)$ после вы-

полнения операций дифференцирования:

$$\begin{aligned}
& - \begin{pmatrix} a_1 \frac{\partial \varphi}{\partial T_1} + a_2 H \frac{\partial \varphi}{\partial X_1} + a_3 H \frac{\partial \varphi}{\partial Y_1} \\ a_2 H \frac{\partial \varphi}{\partial T_1} + a_1 g H \frac{\partial \varphi}{\partial X_1} \\ a_3 H \frac{\partial \varphi}{\partial T_1} + a_1 g H \frac{\partial \varphi}{\partial Y_1} \\ a_4 H \frac{\partial \varphi}{\partial T_1} \\ a_5 H \frac{\partial \varphi}{\partial T_1} \end{pmatrix} - \\
& - \begin{pmatrix} i2k_{x1}a_1a_2\psi^*\chi + i2k_{y1}a_1a_3\psi^*\chi \\ -i2\omega(\mathbf{k}_1)a_1a_2\psi^*\chi + i2k_{x1}ga_1^2\psi^*\chi - f_0a_1a_3\psi^*\chi \\ -i2\omega(\mathbf{k}_1)a_1a_3\psi^*\chi + i2k_{y2}ga_1^2\psi^*\chi + f_0a_1a_2\psi^*\chi \\ -i2\omega(\mathbf{k}_1)a_1a_4\psi^*\chi \\ -i2\omega(\mathbf{k}_1)a_1a_5\psi^*\chi \end{pmatrix} \quad (1.87)
\end{aligned}$$

Домножим систему (1.87) на собственный вектор сопряженного оператора \mathbf{z} (2.45). Используя условие совместности $A^*\mathbf{z} = 0$ и получим следующее уравнение на амплитуду первой волны φ

$$s_{v1}\varphi = f_{v1}\psi^*\chi \quad (1.88)$$

Где s_{v1} - дифференциальный оператор по медленному времени и координатам T_1, X_1, Y_1 и f_{v1} - коэффициент зависят только от начальных условий и характеристик взаимодействующих волн:

$$s_{v1} = r_{v1} \frac{\partial}{\partial T_1} + p_{v1} \frac{\partial}{\partial X_1} + q_{v1} \frac{\partial}{\partial Y_1} \quad (1.89)$$

$$r_{v1} = z_1a_1 + z_2a_2H + z_3a_3H + z_4a_4H + z_5a_5H \quad (1.90)$$

$$p_{v1} = z_1a_2H + z_2a_1gH \quad (1.91)$$

$$q_{v1} = z_1a_3H + z_3a_1gH \quad (1.92)$$

В выражениях (1.89), (1.90), (1.91), (1.92) собственный вектор $\mathbf{a} = \mathbf{a}(\mathbf{k}_1)$

$$\begin{aligned}
f_{v1} = f_{v1}(\mathbf{k}_1, \mathbf{k}_2, \mathbf{k}_3, f_0, \beta, g, H, B_0) = \\
i2z_1a_1(k_{x1}a_2 + k_{y1}a_3) + \\
+ i2z_2a_1(\omega(\mathbf{k}_1)a_2 + k_{x1}ga_1 - f_0a_3) + \\
+ z_3a_1(\omega(\mathbf{k}_1)k_{y1}a_3 - 2k_{y2}k_{y3}ga_1 + i2k_{y1}f_0a_2 + \beta a_2) - \\
- i2\omega(\mathbf{k}_1)a_1(z_4a_4 + z_5a_5) \quad (1.93)
\end{aligned}$$

В выражении (1.93) произведение вида $a_i a_j = (a_i^*(\mathbf{k}_2) a_j(\mathbf{k}_3) + a_i(\mathbf{k}_3) a_j^*(\mathbf{k}_2))/2$.

Таким образом, получена система взаимодействующих амплитуд трех волн для волн Пуанкаре в магнитной гидродинамике в приближении мелкой воды во внешнем вертикальном магнитном поле. Для удобства дальнейшего анализа выпишем полученную систему в следующем виде:

$$s_{v1}\phi = f_{v1}\psi^*\chi \quad (1.94)$$

$$s_{v2}\psi = f_{v2}\phi^*\chi \quad (1.95)$$

$$s_{v3}\chi = f_{v3}\phi\psi \quad (1.96)$$

Таким образом, мы получили систему из трех уравнений на амплитуды взаимодействующих волн ϕ, ψ, χ . Система (1.94), (1.95), (1.96) описывает трехволновые взаимодействия волн Россби, удовлетворяющих условию синхронизма $\omega(\mathbf{k}_1) + \omega(\mathbf{k}_2) = \omega(\mathbf{k}_1 + \mathbf{k}_2)$. В (1.94), (1.95), (1.96) коэффициенты f_{v1} определены в (1.93) операторы s_{v1} в (1.89).

Используем систему (1.94), (1.95), (1.96) для качественного анализа [27] параметрических неустойчивостей волн магнито-Пуанкаре. Рассмотрим случай, когда амплитуда одной из трех взаимодействующих волн в начальный момент много больше амплитуд двух других волн $\phi \gg \psi, \chi$. Тогда амплитуду первой волны можно приближенно считать постоянной $\phi = \phi_0$, при этом обратным влиянием волн с амплитудами ψ и χ на волну накачки с амплитудой ϕ можно пренебречь. Таким образом, система (1.94), (1.95), (1.96) принимает вид:

$$s_{v2}\psi = f_{v2}\phi_0^*\chi \quad (1.97)$$

$$s_{v3}\chi = f_{v3}\phi_0\psi \quad (1.98)$$

Решение полученной линейной системы уравнений ищем в виде:

$$\begin{pmatrix} \psi \\ \chi \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \psi' \\ \chi' \end{pmatrix} \exp(\Gamma T_1) \quad (1.99)$$

Отсюда найдем инкремент неустойчивости

$$\Gamma = \sqrt{\frac{|f_{v2}f_{v3}|}{|r_{v2}r_{v3}|}} |\phi_0| > 0 \quad (1.100)$$

где f_v определен в (1.93), а r_v определен в (1.90).

Таким образом, одна магнито-Пуанкаре волна с волновым вектором \mathbf{k}_1 и частотой $\omega_1 = \omega(\mathbf{k}_1)$ распадается на две магнито-Пуанкаре волны с волновыми векторами \mathbf{k}_2 и \mathbf{k}_3 , частотами ω_2 и ω_3 с инкрементом (1.100).

Возможны два случая развития неустойчивости, когда амплитуды растущих волн становятся сравнимы с амплитудой волны накачки: взрывной рост и насыщение неустойчивости. Рассмотренное выше приближение справедливо, пока амплитуда волны накачки ϕ_0 много больше амплитуды двух других магнито-Пуанкаре волн ψ , χ . Однако на определенной стадии процесса амплитуды растущих волн станут сравнимы с амплитудой ϕ_0 . В рассмотрение, таким образом, необходимо включить уравнение (1.94). При условии $f_{v1} < 0$, амплитуда волны накачки ϕ , так же как и скорости роста амплитуд ψ и χ уменьшаются, что приводит к насыщению параметрической неустойчивости.

При наличии линейного затухания, систему (1.97)-(1.98) запишем в следующем виде [28]:

$$s_{v2}\psi + \eta_2\psi = f_{v2}\phi_0^*\chi \quad (1.101)$$

$$s_{v3}\chi + \eta_3\chi = f_{v3}\phi_0\psi \quad (1.102)$$

В (1.101)-(1.102) слагаемые $\eta_2\psi$ и $\eta_3\chi$ определяют затухание. В этом случае экспоненциально растущие решения вида (2.71) будут существовать только при условии $\phi_0 > \sqrt{\eta_2\eta_3|r_{v2}r_{v3}|/|f_{v2}f_{v3}|}$. Таким образом, существует пороговое значение амплитуды волны накачки ϕ_0^{cr} , начиная с которого развивается неустойчивость:

$$\phi_0^{cr} = \sqrt{\frac{\eta_2\eta_3}{|f_{v2}f_{v3}|}|r_{v2}r_{v3}|} \quad (1.103)$$

с инкрементом

$$\Gamma = \sqrt{\frac{|f_{v2}f_{v3}|}{|r_{v2}r_{v3}|}}\phi_0^{cr} \quad (1.104)$$

Рассмотрим теперь случай, когда амплитуда одной из взаимодействующих волн много меньше амплитуд двух других волн $\phi \ll \psi, \chi$, так что можно считать амплитуды ψ и χ не меняющимися в начальный момент времени $\psi = \psi_0$ и $\chi = \chi_0$, в то время как амплитуда третьей волны испытывает наибольшее изменение. Уравнение для амплитуды ϕ (1.94) принимает вид

$$s_{v1}\phi = f_{v1}\psi_0^*\chi_0 \quad (1.105)$$

Ищем решение уравнения (1.105) в виде:

$$\phi = \phi' \exp(\Gamma T_1) \quad (1.106)$$

Подставляя решение в этом виде, получаем выражение для коэффициента усиления:

$$\Gamma = \frac{|f_{v1}|}{|r_{v1}|} |\psi_0 \chi_0| > 0 \quad (1.107)$$

где f_{v1} определен в (1.93), а r_{v1} определено в (1.90). В данном случае параметрического усиления две начальные магнито-Пуанкаре волны с волновыми векторами \mathbf{k}_1 и \mathbf{k}_2 и частотами $\omega_1 = \omega(\mathbf{k}_1)$ и $\omega_2 = \omega(\mathbf{k}_2)$ усиливают магнито-Пуанкаре волну с волновым вектором $\mathbf{k}_3 = \mathbf{k}_1 + \mathbf{k}_2$ и частотой $\omega_3 = \omega_1 + \omega_2$ с коэффициентом усиления (1.107).

Рассмотренное выше приближение справедливо, пока амплитуда волн накачки ψ_0, χ_0 много больше амплитуды другой магнито-Пуанкаре волны ϕ . Однако на определенной стадии процесса амплитуда растущей волны станет сравнима с амплитудами ψ_0, χ_0 . В рассмотрение, таким образом, необходимо включить уравнение (1.95), (1.96). Амплитуды волн накачки ψ_0 и χ_0 , так же как и скорость роста амплитуды ϕ уменьшаются, что приводит к насыщению параметрической неустойчивости.

При наличии затухания уравнение для амплитуды волны (1.105) записывается в следующем виде:

$$s_{v1}\phi + \eta_1\phi = f_{v1}\psi_0^*\chi_0 \quad (1.108)$$

Где η_1 - линейный коэффициент затухания амплитуды ϕ в (1.108). Таким образом, для развития неустойчивости необходимо, чтобы выполнялось условие $\eta_1 < |\psi_0^*\chi_0| |f_{v1}| / |r_{v1}|$. Это условие определяет пороговое значение для произведения амплитуд волн $(\psi_0\chi_0)^{cr}$, при котором решение возрастает экспоненциально, а именно

$$(\psi_0^*\chi_0)^{cr} = \eta_1 \frac{|r_{v1}|}{|f_{v1}|} \quad (1.109)$$

с инкрементом

$$\Gamma = \frac{|f_{v1}|}{|r_{v1}|} (\psi_0^*\chi_0)^{cr} \quad (1.110)$$

1.4.2 Трехволновые взаимодействия в течениях в горизонтальном магнитном поле

Рассмотрим теперь волны магнито-Пуанкаре и магнитофотические волны в горизонтальном магнитном поле. Подставим в исходную систему (1.35)-(1.39) в отсутствие внешнего вертикального магнитного поля выражения (1.76) и (1.77) и выпишем слагаемые, пропорциональные ε^2 для случая стационарного решения в горизонтальном магнитном поле:

$$\begin{aligned}
& \left(\begin{array}{c} \frac{\partial h_2}{\partial T_0} + h_0 \frac{\partial v_{x2}}{\partial X_0} + h_0 \frac{\partial v_{y2}}{\partial Y_0} \\ \frac{\partial v_{x2}}{\partial T_0} - (\mathbf{B}_0, \nabla_0) B_{x2} + g \frac{\partial h_2}{\partial X_0} - f v_{y2} \\ \frac{\partial v_{y2}}{\partial T_0} - (\mathbf{B}_0, \nabla_0) B_{y2} + g \frac{\partial h_2}{\partial Y_0} + f v_{x2} \\ \frac{\partial B_{x2}}{\partial T_0} - (\mathbf{B}_0, \nabla_0) v_{x2} \\ \frac{\partial B_{y2}}{\partial T_0} - (\mathbf{B}_0, \nabla_0) v_{y2} \end{array} \right) = \\
& = - \left(\begin{array}{c} \frac{\partial h_1}{\partial T_1} + h_0 \frac{\partial v_{x1}}{\partial X_1} + h_0 \frac{\partial v_{y1}}{\partial Y_1} \\ \frac{\partial v_{x1}}{\partial T_1} - (\mathbf{B}_0, \nabla_1) B_{x1} + g \frac{\partial h_1}{\partial X_1} \\ \frac{\partial v_{y1}}{\partial T_1} - (\mathbf{B}_0, \nabla_1) B_{y1} + g \frac{\partial h_1}{\partial Y_1} \\ \frac{\partial B_{x1}}{\partial T_1} - (\mathbf{B}_0, \nabla_1) v_{x1} \\ \frac{\partial B_{y1}}{\partial T_1} - (\mathbf{B}_0, \nabla_1) v_{y1} \end{array} \right) - \\
& - \left(\begin{array}{c} \frac{\partial h_1 v_{x1}}{h_0 \partial T_0} + \frac{\partial(v_{x1}^2 - B_{x1}^2)}{\partial X_0} + \frac{\partial(v_{x1} v_{y1} - B_{x1} B_{y1})}{\partial Y_0} - \left(\frac{\mathbf{B}_0}{h_0}, \nabla_0 \right) h_1 B_{x1} + \frac{g h_1}{h_0} \frac{\partial h_1}{\partial X_0} - \frac{f h_1 v_{y1}}{h_0} \\ \frac{\partial h_1 v_{y1}}{h_0 \partial T_0} + \frac{\partial(v_{x1} v_{y1} - B_{x1} B_{y1})}{\partial X_0} + \frac{\partial(v_{y1}^2 - B_{y1}^2)}{\partial Y_0} - \left(\frac{\mathbf{B}_0}{h_0}, \nabla_0 \right) h_1 B_{y1} + \frac{g h_1}{h_0} \frac{\partial h_1}{\partial Y_0} + \frac{f h_1 v_{x1}}{h_0} \\ \frac{\partial h_1 B_{x1}}{h_0 \partial T_0} + \frac{\partial(B_{x1} v_{y1} - v_{x1} B_{y1})}{\partial Y_0} - \left(\frac{\mathbf{B}_0}{h_0}, \nabla_0 \right) h_1 v_{x1} \\ \frac{\partial h_1 B_{y1}}{h_0 \partial T_0} + \frac{\partial(v_{x1} B_{y1} - v_{y1} B_{x1})}{\partial X_0} - \left(\frac{\mathbf{B}_0}{h_0}, \nabla_0 \right) h_1 v_{y1} \end{array} \right)
\end{aligned} \tag{1.111}$$

В общем виде система имеет следующий вид:

$$\mathbf{H}_0(\mathbf{u}_2) = -\mathbf{P}_1(\mathbf{u}_1) - \mathbf{Q}_0(\mathbf{u}_1, \mathbf{u}_1) \tag{1.112}$$

Условие совместности есть условие ортогональности ядра оператора \mathbf{H}_0 левой части системы и его можно представить в следующем виде:

$$(\mathbf{z}, \mathbf{P}_1(\mathbf{u}_1) + \mathbf{Q}_0(\mathbf{u}_1, \mathbf{u}_1)) = 0 \tag{1.113}$$

где \mathbf{z} - собственный вектор оператора \mathbf{A}^* :

$$\mathbf{z} = \begin{pmatrix} z^1 \\ z^2 \\ z^3 \\ z^4 \\ z^5 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} igk_x f \omega + gk_y \omega^2 - gk_y (\mathbf{B}, \mathbf{k}) \\ gk_x k_y h_0 \omega + i f \omega^2 \\ \omega^3 - gk_x^2 h_0 \omega - \omega (\mathbf{B}, \mathbf{k}) \\ gk_x k_y h_0 (\mathbf{B}, \mathbf{k}) + i f \omega (\mathbf{B}, \mathbf{k}) \\ \omega^2 (\mathbf{B}, \mathbf{k}) - gk_x^2 h_0 (\mathbf{B}, \mathbf{k}) - (\mathbf{B}, \mathbf{k})^3 \end{pmatrix} \quad (1.114)$$

Представим решение в виде суммы трех магнитострофических волн, удовлетворяющих условию синхронизма (1.75), причем амплитуды этих волн φ, ψ, χ зависят от больших горизонтальных масштабов X_1, Y_1 и от медленного времени T_1 :

$$\mathbf{u}_1 = \varphi \mathbf{a}(\mathbf{k}_1) \exp(i\theta_1) + \psi \mathbf{a}(\mathbf{k}_2) \exp(i\theta_2) + \chi \mathbf{a}(\mathbf{k}_3) \exp(i\theta_3) + c.c. \quad (1.115)$$

Здесь \mathbf{a} - собственный вектор магнитострофической (1.72) волны, $\theta_j = i(\omega_3(\mathbf{k}_j) T_0 - k_{xj} X_0 - k_{yj} Y_0)$. Тогда, подставляя это решение и выражение для вектора $\mathbf{z}(\omega_3)$ в уравнение (1.113), найдем три выражения для медленно меняющихся амплитуд, каждое из которых соответствует одному из резонансов ($\exp(\theta_1), \exp(\theta_2), \exp(\theta_3)$):

$$\frac{\partial \varphi}{\partial T} + P_1 \frac{\partial \varphi}{\partial X} + Q_1 \frac{\partial \varphi}{\partial Y} = F_1 \psi \chi \quad (1.116)$$

$$\frac{\partial \psi}{\partial T} + P_2 \frac{\partial \psi}{\partial X} + Q_2 \frac{\partial \psi}{\partial Y} = F_2 \varphi \chi^* \quad (1.117)$$

$$\frac{\partial \chi}{\partial T} + P_3 \frac{\partial \chi}{\partial X} + Q_3 \frac{\partial \chi}{\partial Y} = F_3 \varphi \psi^* \quad (1.118)$$

В приведенной системе коэффициенты при производных и при нелинейном слагеемом имеют следующий вид:

$$F_i = \frac{z_i}{h_0(\mathbf{z}_i, \mathbf{a}_i)} \times \begin{pmatrix} ik_{ix} \xi_{jk}^{12} + ik_{iy} \xi_{jk}^{13} \\ -i\omega_i \xi_{jk}^{12} + ik_{ix} h_0 \left(\xi_{jk}^{22} - \xi_{jk}^{44} + \frac{g}{2h_0} \xi_{jk}^{11} \right) + ik_{iy} h_0 \left(\xi_{jk}^{23} - \xi_{jk}^{45} \right) - i(\mathbf{k}_i, \mathbf{B}_0) \xi_{jk}^{14} + f \xi_{jk}^{13} \\ -i\omega_i \xi_{jk}^{13} + ik_{ix} h_0 \left(\xi_{jk}^{23} - \xi_{jk}^{45} \right) + ik_{iy} h_0 \left(\xi_{jk}^{33} - \xi_{jk}^{55} + \frac{g}{2h_0} \xi_{jk}^{11} \right) - i(\mathbf{k}_i, \mathbf{B}_0) \xi_{jk}^{15} - f \xi_{jk}^{12} \\ -i\omega_i \xi_{jk}^{14} + ik_{iy} h_0 \left(\xi_{jk}^{34} - \xi_{jk}^{25} \right) - i(\mathbf{k}_i, \mathbf{B}_0) \xi_{jk}^{12} \\ -i\omega_i \xi_{jk}^{15} + ik_{ix} h_0 \left(\xi_{jk}^{25} - \xi_{jk}^{34} \right) - i(\mathbf{k}_i, \mathbf{B}_0) \xi_{jk}^{13} \end{pmatrix} \quad (1.119)$$

$$P_i = (h_0 z_i^1 a_i^2 + g z_i^2 a_i^1 - B_{x0} (z_i^2 a_i^4 + z_i^3 a_i^5 + z_i^4 a_i^2 + z_i^5 a_i^3)) / (\mathbf{z}_i, \mathbf{a}_i) \quad (1.120)$$

$$Q_i = (h_0 z_i^1 a_i^3 + g z_i^3 a_i^1 - B_{y0} (z_i^2 a_i^4 + z_i^3 a_i^5 + z_i^4 a_i^2 + z_i^5 a_i^3)) / (\mathbf{z}_i, \mathbf{a}_i) \quad (1.121)$$

В выражении (1.119), (1.120), (1.121) для коэффициентов F_i, P_i, Q_i

$$\xi_{jk}^{mn} = \begin{cases} a_2^{*m} a_3^n + a_2^{*n} a_3^m, & i = 1 \\ a_1^{*m} a_3^n + a_1^{*n} a_3^m, & i = 2 \\ a_1^m a_2^n + a_1^n a_2^m, & i = 3 \end{cases} \quad \begin{matrix} a_i^n = a^n(\mathbf{k}_i), \\ z_i^n = z^n(\mathbf{k}_i) \end{matrix} \quad (1.122)$$

Общий вид векторов \mathbf{a} и \mathbf{z} в зависимости от моды и начальных параметров задачи представлен в выражениях (1.73) и (1.114).

Используем полученную систему уравнений (1.116)-(1.118) для анализа параметрических неустойчивостей взаимодействующих волн. Рассмотрим начальное условие, когда одна из трех взаимодействующих магнитострофических волн много больше двух других ($\varphi \gg \psi, \chi$). Тогда в начальный момент амплитуду первой волны можно считать постоянной $\varphi = \varphi_0$, при этом можно пренебречь обратным влиянием волн с амплитудами ψ, χ на волну накачки. В таком случае система (1.116)-(1.118) линеаризуется и принимает следующий вид:

$$\frac{\partial \psi}{\partial T} + P_2 \frac{\partial \psi}{\partial X} + Q_2 \frac{\partial \psi}{\partial Y} = F_2 \varphi_0 \chi^* \quad (1.123)$$

$$\frac{\partial \chi}{\partial T} + P_3 \frac{\partial \chi}{\partial X} + Q_3 \frac{\partial \chi}{\partial Y} = F_3 \varphi_0 \psi^* \quad (1.124)$$

Полученная линейная система уравнений имеет следующее решение:

$$\begin{pmatrix} \psi \\ \chi \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \psi' \\ \chi' \end{pmatrix} \exp(\Gamma T) \quad (1.125)$$

в котором инкремент

$$\Gamma = \sqrt{|F_2 F_3|} \varphi_0 \quad (1.126)$$

Таким образом, магнитострофическая волна с частотой ω_1 и волновым вектором \mathbf{k}_1 распадается на две магнитострофические волны с частотами ω_2, ω_3 и волновыми векторами $\mathbf{k}_2, \mathbf{k}_3$, которые растут с коэффициентом усиления (2.72).

Рассмотрим теперь случай, когда амплитуда одной из взаимодействующих волн много меньше амплитуд двух других волн $\varphi \ll \psi, \chi$, которых мы можем считать постоянными $\psi = \psi_0, \chi = \chi_0$, пренебрегая влиянием волны с малой амплитудой. Уравнение для амплитуды φ (1.116) принимает вид

$$\frac{\partial \varphi}{\partial T} + P_1 \frac{\partial \varphi}{\partial X} + Q_1 \frac{\partial \varphi}{\partial Y} = F_1 \psi_0 \chi_0 \quad (1.127)$$

Ищем решение уравнения (1.127) в виде:

$$\varphi = \varphi' \exp(\Gamma T) \quad (1.128)$$

Подставляя решение в этом виде, получаем выражение для коэффициента усиления:

$$\Gamma = |F_1| \psi_0 \chi_0 \quad (1.129)$$

В рассмотренном сценарии развития неустойчивости две начальные магнитострофические волны с волновыми векторами \mathbf{k}_1 и \mathbf{k}_2 и частотами $\omega_1 = \omega(\mathbf{k}_1)$ и $\omega_2 = \omega(\mathbf{k}_2)$ усиливают третью магнитострофическую волну с волновым вектором $\mathbf{k}_3 = \mathbf{k}_1 + \mathbf{k}_2$ и частотой $\omega_3 = \omega_1 + \omega_2$ с коэффициентом усиления (2.79).

К аналогичной системе уравнений приводит рассмотрение решения в виде суммы из двух волн магнито-Пуанкаре (1.71) и одной магнитострофической волны (1.72), удовлетворяющих условию (1.75), причём в выражениях для векторов \mathbf{a} и \mathbf{z} выбираются соответствующие $\omega(\mathbf{k})$. Полученная система уравнений также описывает параметрические неустойчивости в виде параметрического усиления и распадной неустойчивости. Инкременты роста описываются теми же уравнениями (1.100), (1.107), в которых меняются выражения для коэффициентов взаимодействующих волн (1.119)-(1.121).

1.5 Выводы

Показано, что структура магнитогидродинамических течений мелкой воды существенно модифицируется в случае наличия внешнего вертикального магнитного поля. Для описания динамики магнитного поля в таких течениях необходим учет вертикальной компоненты магнитного поля. Таким образом, магнитное поле в системе трехкомпонентно, в то время как поле скоростей двухкомпонентно. При этом условие бездивергентности магнитного поля содержит три компоненты вектора магнитного поля и выполняется тождественно как следствие уравнений магнитной индукции при задании корректных начальных условий. При отсутствии же внешнего вертикального магнитного поля, как хорошо известно, в приближении мелкой воды магнитное поле двумерно. Показано, что полученная система уравнений в частном случае отсутствия вертикального

магнитного поля переходит в известную систему магнитогидродинамических уравнений мелкой воды.

Наличие вертикального магнитного поля в магнитогидродинамических течениях в приближении мелкой воды обеспечивает выполнение условий синхронизма. В результате анализа дисперсионных поверхностей исследуемых волн обнаружено, что условие синхронизма выполняется для следующих конфигураций трех волн: три волны магнито-Пуанкаре, три магнитострофические волны, а также две магнитострофические волны и одна магнито-Пуанкаре волна и две магнито-Пуанкаре волны и одна магнитострофическая волна. Волны в горизонтальном магнитном поле в магнитогидродинамическом приближении мелкой воды также удовлетворяют условию синхронизма. Асимптотическим методом многомасштабных разложений исследовано слабонелинейное приближение задачи взаимодействия волн. Для каждого из обнаруженных видов взаимодействий волн во внешнем вертикальном магнитном поле найдены системы нелинейных уравнений для медленно меняющихся амплитуд взаимодействующих волн, в которых коэффициенты определяются начальными условиями задачи и различаются для различных трехволновых конфигураций. Аналогичные системы получены для взаимодействующих волн в горизонтальном магнитном поле. Показано, что в слабонелинейном приближении полученные системы уравнений предсказывают распадные неустойчивости и явления параметрического усиления. Для каждого типа неустойчивости и для каждой конфигурации трех волн найдены коэффициенты усиления.

2 Приближение β -плоскости. Волны Россби в магнитогидродинамических течениях мелкой воды

2.1 Введение

В главе развивается нелинейная теория волн магнито-Россби в тонких слоях астрофизической и космической плазмы в приближении мелкой воды. Волны магнито-Россби определяют крупномасштабную динамику Солнца и звезд [1], [32], [31], [56], [57], динамику магнитоактивных атмосфер экзопланет, захваченных приливами от несущей звезды [10], течения в аккреционных дисках нейтронных звезд [6], [7]. Несмотря на сложность непосредственного наблюдения волн Россби в астрофизической плазме, они недавно обнаружены на Солнце [33], [58]. Для описания крупномасштабных волн магнито-Россби используем приближение β -плоскости по аналогии с вращающимися течениями в геофизической гидродинамике, когда параметр Кориолиса линейно зависит от широты. Получена система магнитогидродинамических уравнений в приближении мелкой воды на β -плоскости. Рассмотрены два типа течений: течения во внешнем вертикальном магнитном поле и течения при наличии горизонтального магнитного поля. Качественный анализ дисперсионных кривых показал наличие трехволновых нелинейных взаимодействий магнитных волн Россби в обоих случаях. В случае отсутствия внешнего магнитного поля динамика волн в слое плазмы аналогична динамике волн в нейтральной жидкости. Асимптотическим методом многомасштабных разложений выведены нелинейные уравнения взаимодействия для медленно меняющихся амплитуд, описывающие трехволновые взаимодействия как во внешнем вертикальном магнитном поле, так и в горизонтальном магнитном поле. Показано, что существуют распадные неустойчивости и механизмы параметрического усиления волн для каждого из рассматриваемых случаев. Найдены инкременты неустойчивостей и коэффициенты параметрического усиления для соответствующих процессов.

В разделе 2.2 обсуждается приближение β -плоскости и условия его применимости для вращающихся магнитогидродинамических течений на сфере. Получена система магнитогидродинамических уравнений в приближении мелкой воды во внешнем вертикальном магнитном поле на β -плоскости.

В разделе 2.3 получены дисперсионные соотношения для волн магнито-Россби во внешнем вертикальном магнитном поле и в горизонтальном (тороидальном и полоидальном) поле. Проведен качественный анализ дисперсионных соотношений и сделаны выводы о возможности трехволновых взаимодействий для этих волн.

В разделе 2.4 методом многомасштабных разложений получены системы уравнений медленно меняющихся амплитуд трехволновых взаимодействий волн магнито-Россби во внешнем вертикальном магнитном поле и в горизонтальном магнитном поле. Установлено наличие параметрических неустойчивостей и найдены их инкременты.

2.2 Приближение β -плоскости для магнитогидродинамических течений мелкой воды

Для описания крупномасштабных волн магнито-Россби используем приближение β -плоскости для силы Кориолиса, по аналогии с вращающимися течениями нейтральной жидкости на сфере. Считаем величину вертикальной компоненты скорости вращения изменяющейся в зависимости от широты θ . Волны, вызванные широтной зависимостью силы Кориолиса, являются аналогами волн Россби в геофизической гидродинамике и называются волнами магнито-Россби. В приближении β -плоскости полагаем изменения параметра Кориолиса f малыми при малых изменениях широты, и представляем в следующем виде:

$$f = 2\Omega \sin \theta \approx 2\Omega \sin \theta_0 + 2\Omega(\theta - \theta_0) \cos \theta_0 = f_0 + \beta y \quad (2.1)$$

Здесь Ω - угловая скорость вращения слоя, $f_0 = 2\Omega \sin \theta_0$ и $\beta = \partial f / \partial y$. С учетом зависимости параметра Кориолиса от широты (2.1), уравнения изменения импульса (1.2) описывают вращающиеся течения на сфере в декартовой системе координат. Для учета β -эффекта в уравнениях в приближении мелкой воды во внешнем вертикальном магнитном поле продифференцируем второе уравнение системы (1.36) по y :

$$\frac{\partial^2(hv_x)}{\partial t \partial y} + \frac{\partial^2(h(v_x^2 - B_x^2))}{\partial x \partial y} + \frac{g}{2} \frac{\partial^2 h^2}{\partial x \partial y} + \frac{\partial^2(h(v_x v_y - B_x B_y))}{\partial y^2} + B_0 \frac{\partial B_x}{\partial y} - f \frac{\partial(hv_y)}{\partial y} - \beta h v_y = 0 \quad (2.2)$$

Таким образом, имеем из (1.1)-(1.4) в качестве исходных уравнений для исследования волн магнито-Россби следующую систему:

$$\frac{\partial h}{\partial t} + \frac{\partial(hv_x)}{\partial x} + \frac{\partial(hv_y)}{\partial y} = 0 \quad (2.3)$$

$$\frac{\partial^2(hv_x)}{\partial t \partial y} + \frac{\partial^2(h(v_x^2 - B_x^2))}{\partial x \partial y} + \frac{g}{2} \frac{\partial^2 h^2}{\partial x \partial y} + \frac{\partial^2(h(v_x v_y - B_x B_y))}{\partial y^2} + B_0 \frac{\partial B_x}{\partial y} - f \frac{\partial(hv_y)}{\partial y} - \beta h v_y = 0 \quad (2.4)$$

$$\frac{\partial(hv_y)}{\partial t} + \frac{\partial(h(v_x v_y - B_x B_y))}{\partial x} + \frac{\partial(h(v_y^2 - B_y^2))}{\partial y} + gh \frac{\partial h}{\partial y} + B_0 B_y + f h v_x = 0 \quad (2.5)$$

$$\frac{\partial(hB_x)}{\partial t} + \frac{\partial(h(B_x v_y - B_y v_x))}{\partial y} - B_0 v_x = 0 \quad (2.6)$$

$$\frac{\partial(hB_y)}{\partial t} + \frac{\partial(h(B_y v_x - B_x v_y))}{\partial x} - B_0 v_y = 0 \quad (2.7)$$

$$\frac{\partial B_z}{\partial t} + B_0 \frac{\partial u_x}{\partial x} + B_0 \frac{\partial u_y}{\partial y} = 0 \quad (2.8)$$

$$\frac{\partial(hB_x)}{\partial x} + \frac{\partial(hB_y)}{\partial y} = 0 \quad (2.9)$$

2.3 Линейная теория волн магнито-Россби в магнитогидродинамическом приближении мелкой воды. Качественный анализ дисперсионных соотношений

2.3.1 Волны магнито-Россби во внешнем вертикальном магнитном поле

Линеаризуя исходную систему (2.3)-(2.7) относительно состояния покоя ($h = H = \text{const}$, $v_x = v_y = B_x = B_y = B_z = 0$), получим:

$$\partial_t h + H \partial_x v_x + H \partial_y v_y = 0 \quad (2.10)$$

$$H \partial_y \partial_t v_x + g H \partial_y \partial_x h + B_0 \partial_y B_x - f_0 H \partial_y v_y - \beta H v_y = 0 \quad (2.11)$$

$$H \partial_t v_y + g H \partial_y h + B_0 B_y + f_0 H v_x = 0 \quad (2.12)$$

$$H \partial_t B_x - B_0 v_x = 0 \quad (2.13)$$

$$H \partial_t B_y - B_0 v_y = 0 \quad (2.14)$$

Используем далее приближение β -эффекта [25], также как и для течений нейтральной жидкости. Ищем решение системы (2.10)-(2.14) в следующем виде:

$$\begin{pmatrix} h \\ v_x \\ v_y \\ B_x \\ B_y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} h_0 \\ v_{x0} \\ v_{y0} \\ B_{x0} \\ B_{y0} \end{pmatrix} \exp(i(k_x x + k_y y - \omega t)) \quad (2.15)$$

Подставляя решение (2.15) в систему (2.10)-(2.14) и в уравнение (??), получим систему линейных уравнений:

$$A \begin{pmatrix} h_0 \\ v_{x0} \\ v_{y0} \\ B_{x0} \\ B_{y0} \end{pmatrix} = 0 \quad (2.16)$$

в которой линейный оператор A имеет следующий вид

$$A = \begin{pmatrix} -i\omega & ik_x H & ik_y H & 0 & 0 \\ -gHk_x k_y & \omega k_y H & -ik_y f_0 H - \beta H & ik_y B_0 & 0 \\ igHk_y & f_0 H & -i\omega H & 0 & B_0 \\ 0 & B_0 & 0 & -i\omega H & 0 \\ 0 & 0 & B_0 & 0 & -i\omega H \end{pmatrix} \quad (2.17)$$

Система (2.16) имеет нетривиальные решения, когда выполняется условие $\det A = 0$. Несложными преобразованиями получим из (2.16) дисперсионное соотношение:

$$\omega^4 - \omega^2(f_0^2 + C_0^2 k^2 + 2(\frac{v_a}{H})^2) - \omega C_0^2 \beta k_x + (\frac{v_a}{H})^2(C_0^2 k^2 + (\frac{v_a}{H})^2) = 0 \quad (2.18)$$

В (2.18) $v_a = B_0$ - альвфеновская скорость и $C_0 = \sqrt{gH}$. В высокочастотном приближении в выражении (2.18) исчезает зависимость параметра Кориолиса от широты, и дисперсионное соотношение описывает моду магнито-Пуанкаре в магнитной гидродинамике в приближении мелкой воды. Данное приближение приводит к дисперсионному соотношению, в котором динамику волны определяют гравитационная сила, вращение и внешнее вертикальное магнитное поле:

$$\omega^2 \approx f_0^2 + C_0^2 k^2 + 2(\frac{v_a}{H})^2 \quad (2.19)$$

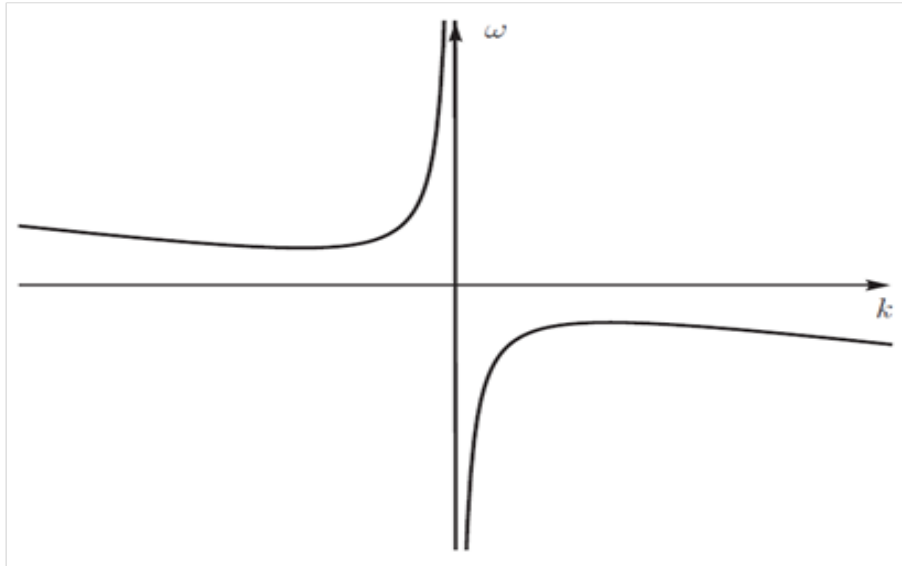


Рис. 9: Общий вид дисперсионных кривых для волн магнито-Россби

В низкочастотном приближении дисперсионное соотношение (2.18) описывает крупномасштабные движения волн Россби. Дисперсионное соотношение для волн Россби в магнитной гидродинамике в приближении мелкой воды видоизменяется в присутствии внешнего вертикального магнитного поля B_0 и принимает вид:

$$\omega = \frac{(\frac{v_a}{H})^2(C_0^2 k^2 + (\frac{v_a}{H})^2)}{C_0^2 \beta k_x} \quad (2.20)$$

Заметим, что в интервале между высокочастотными решениями дисперсионного уравнения в виде мод магнито-Пуакаре и низкочастотными решениями для медленных волн магнито-Россби, дисперсионное соотношение допускает моды быстрых магнито-Россби волн [1].

Соотношение (2.20) описывает волны Россби в приближении мелкой воды, распространяющиеся вдоль направления k . Основной механизм их образования заключается в сдвиге вращающегося потока вследствие того, что сила Кориолиса изменяется в зависимости от широты. Общий вид дисперсионных кривых представлен на рисунке 9.

Решением линеаризованной системы являются волны амплитуды $\alpha(\mathbf{k})$. В общем виде решение \mathbf{u}_1 линейной системы дифференциальных уравнений (2.10)-(2.14) выглядит следующим образом:

$$\mathbf{u}_1 = \int dk_x dk_y \mathbf{a} \alpha(\mathbf{k}) \exp(i(k_x x + k_y y - \omega(\mathbf{k})t)) + c.c. \quad (2.21)$$

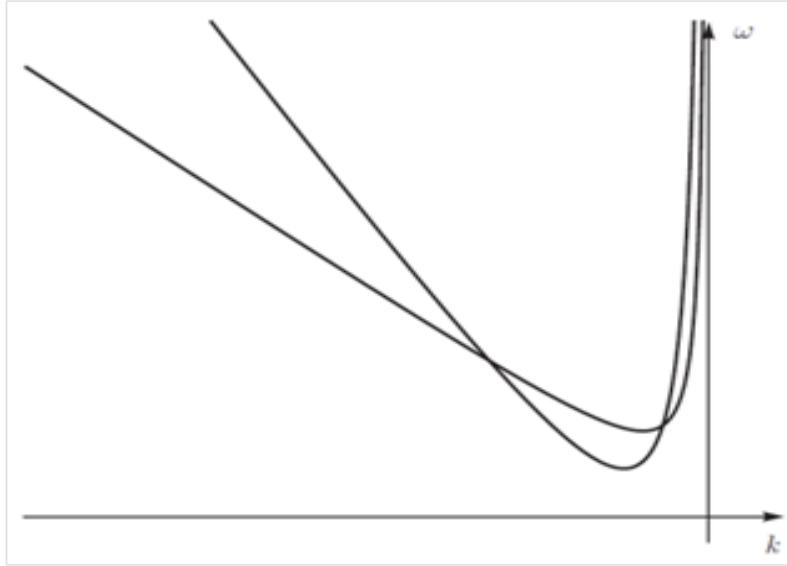


Рис. 10: Условие синхронизма для трех волн магнито-Россби

где $\omega(\mathbf{k})$ определяется выражением (2.18), \mathbf{a} - собственный вектор линейного оператора A :

$$A\mathbf{a} = 0 \quad (2.22)$$

Система (2.22) имеет нетривиальные решения $\mathbf{a} \neq 0$, так как выполняется условие (2.18). Отсюда найдем собственный вектор:

$$\mathbf{a} = \begin{pmatrix} \omega^2 k_x H - k_x H \left(\frac{B_0}{H}\right)^2 - i\omega k_y f H \\ \omega^3 - \omega \left(\frac{B_0}{H}\right)^2 - \omega k_y^2 g H \\ \omega k_x k_y g H - i\omega^2 f \\ -\omega^2 \left(\frac{B_0}{H}\right) - \left(\frac{B_0}{H}\right)^3 - k_y^2 g H \left(\frac{B_0}{H}\right) \\ -k_x k_y g H \left(\frac{B_0}{H}\right) + i\omega f \left(\frac{B_0}{H}\right) \end{pmatrix} = \mathbf{a}(\mathbf{k}) \quad (2.23)$$

В (2.23) $\omega = \omega(\mathbf{k})$ согласно (2.18).

Для того чтобы оценить возможность межволновых взаимодействий для описанной волны, необходимо проанализировать ее дисперсионное соотношение, определить асимптотику дисперсионных кривых. Условие синхронизма, необходимое для возникновения взаимодействия между волнами с разными волновыми векторами и частотами в общем случае имеет вид $\omega(\mathbf{k}_1) + \omega(\mathbf{k}_2) = \omega(\mathbf{k}_1 + \mathbf{k}_2)$. Изобразим это условие на графике (рис. 10). Первое слагаемое задает точку $(\mathbf{k}_1, \omega(\mathbf{k}_1))$ дисперсионной кривой одного из решений, второе слагаемое - точку $(\mathbf{k}_2, \omega(\mathbf{k}_2))$ на смещенной на $(\mathbf{k}_1, \omega(\mathbf{k}_1))$ дисперсионной кривой, и наличие пере-

сечения будет означать существование такого набора из трех волн, который удовлетворяет условию синхронизма. Качественный анализ дисперсионных кривых позволяет определить, могут ли выполняться условия синхронизма для волн Россби во внешнем вертикальном магнитном поле $\omega(\mathbf{k}_1) + \omega(\mathbf{k}_2) = \omega(\mathbf{k}_1 + \mathbf{k}_2)$. На рисунке 10 видно, что дисперсионная кривая $\omega(\mathbf{k})$ пересекает такую же кривую, смещенную от начала координат на $(\mathbf{k}_1, \omega(\mathbf{k}_1))$, а значит найдутся такие три волны, что для них будут выполнены условия синхронизма. Таким образом, в случае вертикального внешнего магнитного поля \mathbf{B}_0 имеют место трехволновые взаимодействия.

2.3.2 Волны магнито-Россби в горизонтальном магнитном поле

Исследуем теперь линейную задачу в отсутствие внешнего магнитного поля. Как указывалось выше, в этом случае система (2.3)-(2.7) имеет стационарные решения в виде горизонтального (тороидального, полоидального и их суммы) магнитного поля. Рассмотрим в качестве исходных уравнений для исследования волн Россби в горизонтальном магнитном поле систему (2.3)-(2.7) при $B_0 = 0$. Линеаризуем эту систему относительно стационарного решения, описывающего горизонтальное поле B^0 : $h = H, v_x = v_y = 0, B_x = B_x^0, B_y = B_y^0$:

$$\partial_t h + H \partial_x v_x + H \partial_y v_y = 0 \quad (2.24)$$

$$\partial_t \partial_y v_x - B_x^0 \partial_x \partial_y B_x - B_y^0 \partial_y^2 B_x + g \partial_x \partial_y h - f_0 \partial_y v_y - \beta v_y = 0 \quad (2.25)$$

$$\partial_t v_y - B_x^0 \partial_x B_y - B_y^0 \partial_y B_y + g \partial_y h + f_0 v_x = 0 \quad (2.26)$$

$$\partial_t B_x - B_x^0 \partial_x v_x - B_y^0 \partial_y v_x = 0 \quad (2.27)$$

$$\partial_t B_y - B_y^0 \partial_y v_y - B_x^0 \partial_x v_y = 0 \quad (2.28)$$

Из последних двух уравнений (2.27), (2.28) следует условие бездивергентности магнитного поля в виде $\partial B_x / \partial x + \partial B_y / \partial y = 0$. Учитывая это условие, после подстановки решения в виде волны, получим систему линейных уравнений:

$$A_h \begin{pmatrix} h_0 \\ v_{x0} \\ v_{y0} \\ B_{x0} \\ B_{y0} \end{pmatrix} = 0 \quad (2.29)$$

в которой оператор A_h имеет вид:

$$A_h = \begin{pmatrix} -i\omega & ik_x H & ik_y H & 0 & 0 \\ -gk_x k_y & \omega k_y & -ik_y f_0 - \beta & k_y(\mathbf{k}, \mathbf{B}^0) & 0 \\ ik_y g & f_0 & -i\omega & 0 & -i(\mathbf{k}, \mathbf{B}^0) \\ 0 & -i(\mathbf{k}, \mathbf{B}^0) & 0 & -i\omega & 0 \\ 0 & 0 & -i(\mathbf{k}, \mathbf{B}^0) & 0 & -i\omega \end{pmatrix} \quad (2.30)$$

Дисперсионное соотношение, с учетом обозначений $\mathbf{v}_a = \mathbf{B}^0$ и $C_0^2 = gh$, имеет вид:

$$\omega^4 - \omega^2(2(\mathbf{k}, \mathbf{v}_a)^2 + f_0^2 + C_0^2 k^2) - \omega k_x C_0^2 \beta + (\mathbf{k}, \mathbf{v}_a)^2 (C_0^2 k^2 + (\mathbf{k}, \mathbf{v}_a)^2) = 0 \quad (2.31)$$

Аналогично случаю с вертикальным внешним магнитным полем (2.20), для низких частот и длинноволновых течений дисперсионное соотношение принимает вид:

$$\omega = \frac{C_0^2 k^2 (\mathbf{k}, \mathbf{v}_a)^2 + (\mathbf{k}, \mathbf{v}_a)^4}{C_0^2 k_x \beta} \quad (2.32)$$

и описывает моду медленных магнитных волн Россби в магнитной гидродинамике в приближении мелкой воды [1]. Общий вид дисперсионных кривых для волн магнито-Россби в горизонтальном магнитном поле аналогичен случаю волн в вертикальном магнитном поле и представлен на рисунке 9.

Проанализируем качественно полученные дисперсионные кривые для того, чтобы выяснить возможность реализации слабонелинейных взаимодействий. Для того чтобы волны Россби испытывали трехволновые взаимодействия необходимо, чтобы три волны удовлетворяли условию синхронизма:

$$\omega(\mathbf{k}_1) + \omega(\mathbf{k}_2) = \omega(\mathbf{k}_1 + \mathbf{k}_2) \quad (2.33)$$

Рассмотрим три волны с дисперсионным соотношением (2.32). Их трехволновые взаимодействия возможны при выполнении условия (2.33), что соответствует наличию пересечения дисперсионных кривых на рисунке 10. Наличие пересечения указывает на возможность трехволновых взаимодействий магнитогидродинамических волн Россби в горизонтальном магнитном поле $\mathbf{B}^0 = (B_x^0, B_y^0)$.

В частном случае тороидального магнитного поля дисперсионное соотношение имеет вид:

$$\omega = \frac{k_x (v_{ax})^2 (C_0^2 k^2 + (k_x v_{ax})^2)}{C_0^2 \beta} \quad (2.34)$$

Такая конфигурация магнитного поля характерна для течений в солнечном тахоклине [31], [32].

В случае полоидального магнитного поля дисперсионное соотношение имеет вид:

$$\omega = \frac{C_0^2 k^2 (k_y v_{ay})^2 + (k_y v_{ay})^4}{C_0^2 k_x \beta} \quad (2.35)$$

В пределе нейтральной жидкости $B_x^0 = 0$, $B_y^0 = 0$, дисперсионное соотношение для волн Россби принимает вид:

$$\omega^3 - \omega(f_0^2 + C_0^2 k^2) - C_0^2 \beta k_x = 0 \quad (2.36)$$

В случае длинноволнового приближения, дисперсионное уравнение (2.36) имеет решение:

$$\omega = -\frac{k_x C_0^2 \beta}{f_0^2 + C_0^2 k^2} \quad (2.37)$$

Заметим, что в случае отсутствия горизонтального магнитного поля линеаризованные уравнения для магнитного поля приводятся к тривиальному виду $\partial B_x / \partial t = 0$ и $\partial B_y / \partial t = 0$. Таким образом, волна перестает быть магнитогидродинамической и дисперсионное соотношение описывает динамику только гидродинамической параметров. В случае отсутствия магнитного поля для получившейся гидродинамической задачи имеют место трехволновые взаимодействия волн Россби [66].

2.4 Уравнения трехволновых взаимодействий и параметрические неустойчивости волн магнито-Россби

2.4.1 Волны магнито-Россби во внешнем вертикальном магнитном поле

Для получения уравнений трехволновых взаимодействий воспользуемся, аналогично случаю трехволновых взаимодействий магнито-Пуанкаре волн, асимптотическим методом многомасштабных разложений [26]. Тогда, подставив в исходную систему (2.3)-(2.7) решение в виде ряда по малому параметру ε и вы-

ражения для производных (1.77), выпишем слагаемые, пропорциональные ε^2 :

$$\begin{aligned}
& \begin{pmatrix} \frac{\partial h_2}{\partial T_0} + H \frac{\partial v_{x2}}{\partial X_0} + H \frac{\partial v_{y2}}{\partial Y_0} \\ H \frac{\partial^2 v_{x2}}{\partial T_0 \partial Y_0} + gH \frac{\partial^2 h_2}{\partial X_0 \partial Y_0} + B_0 \frac{\partial B_{x2}}{\partial y_0} - f_0 H \frac{\partial v_{y2}}{\partial Y_0} - \beta H v_{y2} \\ H \frac{\partial v_{y2}}{\partial T_0} + gH \frac{\partial h_2}{\partial Y_0} + B_0 B_{y2} + f_0 H \partial v_{x2} \\ H \frac{\partial B_{x2}}{\partial T_0} - B_0 v_{x2} \\ H \frac{\partial B_{y2}}{\partial T_0} - B_0 v_{y2} \end{pmatrix} = \\
& = - \begin{pmatrix} \frac{\partial h_1}{\partial T_1} + H \frac{\partial v_{x1}}{\partial X_1} + H \frac{\partial v_{y1}}{\partial Y_1} \\ H \frac{\partial^2 v_{x1}}{\partial T_1 \partial Y_0} + H \frac{\partial^2 v_{x1}}{\partial T_0 \partial Y_1} + gH \frac{\partial^2 h_1}{\partial X_1 \partial Y_0} + gH \frac{\partial^2 h_1}{\partial X_0 \partial Y_1} + B_0 \frac{\partial B_{x1}}{\partial Y_1} - f_0 H \frac{\partial v_{y1}}{\partial Y_1} \\ H \frac{\partial v_{y1}}{\partial T_1} + gH \frac{\partial h_1}{\partial Y_1} \\ H \frac{\partial B_{x1}}{\partial T_1} \\ H \frac{\partial B_{y1}}{\partial T_1} \end{pmatrix} - \\
& - \begin{pmatrix} \frac{h_1 v_{x1}}{\partial X_0} + \frac{h_1 v_{y1}}{\partial Y_0} \\ \frac{\partial^2 h_1 v_{x1}}{\partial T_0 \partial Y_0} + g \frac{\partial h_1}{\partial X_0} \frac{\partial h_1}{\partial Y_0} - f_0 h_1 \frac{\partial v_{y1}}{\partial Y_0} - \beta h_1 v_{y1} \\ \frac{\partial h_1 v_{y1}}{\partial T_0} + g h_1 \frac{\partial h_1}{\partial Y_0} + f_0 h_1 v_{x1} \\ \frac{\partial h_1 B_{x1}}{\partial T_0} \\ \frac{\partial h_1 B_{y1}}{\partial T_0} \end{pmatrix} \quad (2.38)
\end{aligned}$$

В правой части полученных уравнений содержатся слагаемые, включающие найденные решения задачи первого приближения, которые могут вызывать резонанс с оператором левой части. Для исключения резонансных слагаемых в правой части воспользуемся условием ортогональности правой части (2.38) ядру оператора A (2.17), известным как условие совместности. Обозначим собственный вектор оператора A^* как $\mathbf{z} = (z_1, z_2, z_3, z_4, z_5)^T$. Найдем собственные вектора оператора A^* :

$$\det \begin{pmatrix} -i\omega & ik_x H & ik_y H & 0 & 0 \\ -gHk_x k_y & \omega k_y H & -ik_y f_0 H - \beta H & ik_y B_0 & 0 \\ igHk_y & f_0 H & -i\omega H & 0 & B_0 \\ 0 & B_0 & 0 & -i\omega H & 0 \\ 0 & 0 & B_0 & 0 & -i\omega H \end{pmatrix} = 0 \quad (2.39)$$

Откуда получаем (2.18). Собственный вектор $\mathbf{z} = (z_1, z_2, z_3, z_4, z_5)^T$ удовлетворяет следующей системе

$$-i\omega z_1 + ik_x H z_2 + ik_y H z_3 = 0 \quad (2.40)$$

$$-gHk_xk_yz_1 + \omega k_y Hz_2 - (ik_y f_0 H + \beta H)z_3 + ik_y B_0 z_4 = 0 \quad (2.41)$$

$$igHk_yz_1 + f_0 Hz_2 - i\omega Hz_3 + B_0 z_5 = 0 \quad (2.42)$$

$$B_0 z_2 - i\omega Hz_4 = 0 \quad (2.43)$$

$$B_0 z_3 - i\omega Hz_5 = 0 \quad (2.44)$$

Выражение для собственного вектора с точностью до константы выглядит следующим образом:

$$\mathbf{z} = \begin{pmatrix} igk_x H^4 f \lambda_0 + gk_y \lambda_0^2 H^4 + gk_y H^2 B_0^2 \\ iH^3 f \lambda_0^2 - k_x k_y g H^4 \lambda_0 \\ \lambda_0^3 H^3 + B_0^2 H \lambda_0 + k_x^2 g H^4 \lambda_0 \\ -H^2 f \lambda_0 B_0 - ik_x k_y g H^3 B_0 \\ iB_0 \lambda_0^3 H^2 + iB_0^3 \lambda_0 + ik_x^2 g B_0 H^3 \lambda_0 \end{pmatrix} c \quad (2.45)$$

В (2.45) c - произвольная константа. Представим решение в виде трех магнито-Россби волн, удовлетворяющих условию синхронизма $\omega(\mathbf{k}_1) + \omega(\mathbf{k}_2) = \omega(\mathbf{k}_3)$, $\mathbf{k}_1 + \mathbf{k}_2 = \mathbf{k}_3$ (2.33):

$$\mathbf{u}_1 = \phi \mathbf{a}(\mathbf{k}_1) \exp(i\theta_1) + \psi \mathbf{a}(\mathbf{k}_2) \exp(i\theta_2) + \chi \mathbf{a}(\mathbf{k}_3) \exp(i\theta_3) + c.c. \quad (2.46)$$

где ϕ, ψ, χ - амплитуды взаимодействующих волн, $\theta_i = -\omega(\mathbf{k}_i)T_0 + k_{xi}X_0 + k_{yi}Y_0$ - фазы волн, \mathbf{a} - собственный вектор оператора A , \mathbf{a}^* - комплексно сопряженный вектор. Правая часть системы уравнений (2.38), пропорциональная $\exp(i\theta_1)$ после выполнения операций дифференцирования примет вид:

$$- \begin{pmatrix} a_1 \frac{\partial \phi}{\partial T_1} + a_2 H \frac{\partial \phi}{\partial X_1} + a_3 H \frac{\partial \phi}{\partial Y_1} \\ a_2 H \frac{\partial \phi}{\partial T_1} + a_1 g H \frac{\partial \phi}{\partial X_1} \\ -i\omega(\mathbf{k}_1) a_3 H \frac{\partial \phi}{\partial Y_1} + ik_{y1} a_3 H \frac{\partial \phi}{\partial T_1} + ik_{y1} a_1 2g H \frac{\partial \phi}{\partial Y_1} + a_5 B_0 \frac{\partial \phi}{\partial Y_1} + a_2 f_0 H \frac{\partial \phi}{\partial Y_1} \\ a_4 H \frac{\partial \phi}{\partial T_1} \\ a_5 H \frac{\partial \phi}{\partial T_1} \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} i2k_{x1} a_1 a_2 \psi^* \chi + i2k_{y1} a_1 a_3 \psi^* \chi \\ -i2\omega(\mathbf{k}_1) a_1 a_2 \psi^* \chi + i2k_{x1} g a_1^2 \psi^* \chi - f_0 a_1 a_3 \psi^* \chi \\ \omega(\mathbf{k}_1) k_{y1} a_1 a_3 \psi^* \chi - 2k_{y2} k_{y3}^2 g a_1^2 \psi^* \chi + i2k_{y1} f_0 a_1 a_2 \psi^* \chi + \beta a_1 a_2 \psi^* \chi \\ -i2\omega(\mathbf{k}_1) a_1 a_4 \psi^* \chi \\ -i2\omega(\mathbf{k}_1) a_1 a_5 \psi^* \chi \end{pmatrix} \quad (2.47)$$

Домножим систему (2.47) на собственный вектор сопряженного оператора \mathbf{z} (2.45). Используя условие совместности $A^*\mathbf{z} = 0$ и получим следующее уравнение на амплитуду первой волны ϕ

$$s_{v1}\phi = f_{v1}\psi^*\chi \quad (2.48)$$

Где s_{v1} - дифференциальный оператор по медленному времени и координатам T_1, X_1, Y_1 и f_{v1} - коэффициент зависят только от начальных условий и характеристик взаимодействующих волн:

$$s_{v1} = r_{v1}\frac{\partial}{\partial T_1} + p_{v1}\frac{\partial}{\partial X_1} + q_{v1}\frac{\partial}{\partial Y_1} \quad (2.49)$$

$$r_{v1} = z_1a_1 + z_2a_2H + ik_{y1}z_3a_3H + z_4a_4H + z_5a_5H \quad (2.50)$$

$$p_{v1} = z_1a_2H + z_2a_1gH \quad (2.51)$$

$$q_{v1} = z_1a_3H - i\omega(\mathbf{k}_1)z_3a_3H + i2k_{y1}z_3a_1gH + z_3a_5B_0 + z_3a_2f_0H \quad (2.52)$$

В выражениях (2.49), (2.50), (2.51), (2.52) собственный вектор $\mathbf{a} = \mathbf{a}(\mathbf{k}_1)$

$$\begin{aligned} f_{v1} = f_{v1}(\mathbf{k}_1, \mathbf{k}_2, \mathbf{k}_3, f_0, \beta, g, H, B_0) = \\ i2z_1a_1(k_{x1}a_2 + k_{y1}a_3) + \\ + i2z_2a_1(\omega(\mathbf{k}_1)a_2 + k_{x1}ga_1 - f_0a_3) + \\ + z_3a_1(\omega(\mathbf{k}_1)k_{y1}a_3 - 2k_{y2}k_{y3}ga_1 + i2k_{y1}f_0a_2 + \beta a_2) - \\ - i2\omega(\mathbf{k}_1)a_1(z_4a_4 + z_5a_5) \end{aligned} \quad (2.53)$$

В выражении (2.53) произведение вида $a_i a_j = (a_i^*(\mathbf{k}_2)a_j(\mathbf{k}_3) + a_i(\mathbf{k}_3)a_j^*(\mathbf{k}_2))/2$. Аналогично, для слагаемых, пропорциональных $\exp(i\theta_2)$, домножая правую часть системы (2.38) на собственный вектор \mathbf{z} , получим уравнение на амплитуду второй волны ψ :

$$s_{v2}\psi = f_{v2}\phi^*\chi \quad (2.54)$$

где s_{v2} есть:

$$s_{v2} = r_{v2}\frac{\partial}{\partial T_1} + p_{v2}\frac{\partial}{\partial X_1} + q_{v2}\frac{\partial}{\partial Y_1} \quad (2.55)$$

$$r_{v2} = z_1a_1 + z_2a_2H + ik_{y2}z_3a_3H + z_4a_4H + z_5a_5H \quad (2.56)$$

$$p_{v2} = z_1a_2H + z_2a_1gH \quad (2.57)$$

$$q_{v2} = z_1a_3H - i\omega(\mathbf{k}_1)z_3a_3H + i2k_{y1}z_3a_1gH + z_3a_5B_0 + z_3a_2f_0H \quad (2.58)$$

В выражениях (2.55), (2.56), (2.57), (2.58) собственный вектор $\mathbf{a} = \mathbf{a}(\mathbf{k}_2)$. Коэффициент f_{v2} имеет вид:

$$\begin{aligned}
f_{v2} &= f_{v2}(\mathbf{k}_1, \mathbf{k}_2, \mathbf{k}_3, f_0, \beta, g, H, B_0) = \\
&= i2z_1a_1(k_{x2}a_2 + k_{y2}a_3) + \\
&+ i2z_2a_1(\omega(\mathbf{k}_1)a_2 + k_{x2}ga_1 - f_0a_3) + \\
&+ z_3a_1(\omega(\mathbf{k}_2)k_{y2}a_3 - 2k_{y1}k_{y3}ga_1 + i2k_{y3}f_0a_2 + \beta a_2) - \\
&- i2\omega(\mathbf{k}_3)a_1(z_4a_4 + z_5a_5) \quad (2.59)
\end{aligned}$$

В выражении (2.59) произведение вида $a_i a_j = (a_i^*(\mathbf{k}_1)a_j(\mathbf{k}_3) + a_i(\mathbf{k}_3)a_j^*(\mathbf{k}_1))/2$. Выписав слагаемые, пропорциональные $\exp(i\theta_3)$, из правой части (2.38), получим уравнение для амплитуды третьей взаимодействующей волны:

$$s_{v3}\chi = f_{v3}\phi\psi \quad (2.60)$$

где s_{v3} имеет вид:

$$s_{v3} = r_{v3} \frac{\partial}{\partial T_1} + p_{v3} \frac{\partial}{\partial X_1} + q_{v3} \frac{\partial}{\partial Y_1} \quad (2.61)$$

$$r_{v3} = z_1a_1 + z_2a_2H + ik_{y3}z_3a_3H + z_4a_4H + z_5a_5H \quad (2.62)$$

$$p_{v3} = z_1a_2H + z_2a_1gH \quad (2.63)$$

$$q_{v3} = z_1a_3H - i\omega(\mathbf{k}_1)z_3a_3H + i2k_{y1}z_3a_1gH + z_3a_5B_0 + z_3a_2f_0H \quad (2.64)$$

В выражениях (2.61), (2.62), (2.63), (2.64) собственный вектор $\mathbf{a} = \mathbf{a}(\mathbf{k}_3)$. Коэффициент взаимодействия f_{v3} имеет вид:

$$\begin{aligned}
f_{v3} &= f_{v3}(\mathbf{k}_1, \mathbf{k}_2, \mathbf{k}_3, f_0, \beta, g, H, B_0) = \\
&= i2z_1a_1(k_{x3}a_2 + k_{y3}a_3) + i2z_2a_1(\omega(\mathbf{k}_3)a_2 + k_{x3}ga_1 - f_0a_3) + \\
&+ z_3a_1(\omega(\mathbf{k}_3)k_{y3}a_3 - 2k_{y1}k_{y2}ga_1 + i2k_{y2}f_0a_2 + \beta a_2) - \\
&- i2\omega(\mathbf{k}_2)a_1(z_4a_4 + z_5a_5) \quad (2.65)
\end{aligned}$$

В выражении (2.65) произведение вида $a_i a_j = (a_i(\mathbf{k}_1)a_j(\mathbf{k}_2) + a_i(\mathbf{k}_2)a_j(\mathbf{k}_1))/2$.

Таким образом, получена система взаимодействующих амплитуд трех волн для волн Россби в магнитной гидродинамике в приближении мелкой воды во внешнем вертикальном магнитном поле. Для удобства дальнейшего анализа выпишем полученную систему в следующем виде:

$$s_{v1}\phi = f_{v1}\psi^*\chi \quad (2.66)$$

$$s_{v2}\psi = f_{v2}\phi^*\chi \quad (2.67)$$

$$s_{v3}\chi = f_{v3}\phi\psi \quad (2.68)$$

Таким образом, мы получили систему из трех уравнений на амплитуды взаимодействующих волн ϕ, ψ, χ . Система (2.66), (2.67), (2.68) описывает трехволновые взаимодействия волн Россби, удовлетворяющих условию синхронизма $\omega(\mathbf{k}_1) + \omega(\mathbf{k}_2) = \omega(\mathbf{k}_1 + \mathbf{k}_2)$. В (2.66), (2.67), (2.68) коэффициенты f_{v1}, f_{v2}, f_{v3} определены в (2.53), (2.59), (2.65), операторы s_{v1}, s_{v2}, s_{v3} в (2.49), (2.55), (2.61).

Используем систему (2.66), (2.67), (2.68) для качественного анализа [27] параметрических неустойчивостей волн Россби. Рассмотрим случай, когда амплитуда одной из трех взаимодействующих волн в начальный момент много больше амплитуд двух других волн $\phi \gg \psi, \chi$. Тогда амплитуду первой волны можно приближенно считать постоянной $\phi = \phi_0$, при этом обратным влиянием волн с амплитудами ψ и χ на волну накачки с амплитудой ϕ можно пренебречь. Таким образом, система (2.66), (2.67), (2.68) принимает вид:

$$s_{v2}\psi = f_{v2}\phi_0^*\chi \quad (2.69)$$

$$s_{v3}\chi = f_{v3}\phi_0\psi \quad (2.70)$$

Решение полученной линейной системы уравнений ищем в виде:

$$\begin{pmatrix} \psi \\ \chi \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \psi' \\ \chi' \end{pmatrix} \exp(\Gamma T_1) \quad (2.71)$$

Отсюда найдем инкремент неустойчивости

$$\Gamma = \sqrt{\frac{|f_{v2}f_{v3}|}{|r_{v2}r_{v3}|}} |\phi_0| > 0 \quad (2.72)$$

где f_{v2} и f_{v3} определены в (2.59) и (2.65), а r_{v2} и r_{v3} определены в (2.56) и (2.62).

Таким образом, одна магнито-Россби волна с волновым вектором \mathbf{k}_1 и частотой $\omega_1 = \omega(\mathbf{k}_1)$ распадается на две магнито-Россби волны с волновыми векторами \mathbf{k}_2 и \mathbf{k}_3 , частотами ω_2 и ω_3 с инкрементом (2.72).

Возможны два случая развития неустойчивости, когда амплитуды растущих волн становятся сравнимы с амплитудой волны накачки: взрывной рост и насыщение неустойчивости. Рассмотренное выше приближение справедливо, пока

амплитуда волны накачки ϕ_0 много больше амплитуды двух других магнито-Россби волн ψ , χ . Однако на определенной стадии процесса амплитуды растущих волн станут сравнимы с амплитудой ϕ_0 . В рассмотрение, таким образом, необходимо включить уравнение (2.66). При условии $f_{v1} < 0$, амплитуда волны накачки ϕ , так же как и скорости роста амплитуд ψ и χ уменьшаются, что приводит к насыщению параметрической неустойчивости.

При наличии линейного затухания, систему (2.69)-(2.70) запишем в следующем виде [28]:

$$s_{v2}\psi + \eta_2\psi = f_{v2}\phi_0^*\chi \quad (2.73)$$

$$s_{v3}\chi + \eta_3\chi = f_{v3}\phi_0\psi \quad (2.74)$$

В (2.73)-(2.74) слагаемые $\eta_2\psi$ и $\eta_3\chi$ определяют затухание. В этом случае экспоненциально растущие решения вида (2.71) будут существовать только при условии $\phi_0 > \sqrt{\eta_2\eta_3|r_{v2}r_{v3}|/|f_{v2}f_{v3}|}$. Таким образом, существует пороговое значение амплитуды волны накачки ϕ_0^{cr} , начиная с которого развивается неустойчивость:

$$\phi_0^{cr} = \sqrt{\frac{\eta_2\eta_3}{|f_{v2}f_{v3}|}|r_{v2}r_{v3}|} \quad (2.75)$$

с инкрементом

$$\Gamma = \sqrt{\frac{|f_{v2}f_{v3}|}{|r_{v2}r_{v3}|}}\phi_0^{cr} \quad (2.76)$$

Рассмотрим теперь случай, когда амплитуда одной из взаимодействующих волн много меньше амплитуд двух других волн $\phi \ll \psi, \chi$, так что можно считать амплитуды β и γ постоянными $\psi = \psi_0$ и $\chi = \chi_0$. Уравнение для амплитуды ϕ (2.66) принимает вид

$$s_{v1}\phi = f_{v1}\psi_0^*\chi_0 \quad (2.77)$$

Ищем решение уравнения (2.77) в виде:

$$\phi = \phi' \exp(\Gamma T_1) \quad (2.78)$$

Подставляя решение в этом виде, получаем выражение для коэффициента усиления:

$$\Gamma = \frac{|f_{v1}|}{|r_{v1}|}|\psi_0\chi_0| > 0 \quad (2.79)$$

где f_{v1} определен в (2.53), а r_{v1} определено в (2.50). В данном случае параметрического усиления две начальные магнито-Россби волны с волновыми векторами

\mathbf{k}_1 и \mathbf{k}_2 и частотами $\omega_1 = \omega(\mathbf{k}_1)$ и $\omega_2 = \omega(\mathbf{k}_2)$ усиливают магнито-Россби волну с волновым вектором $\mathbf{k}_3 = \mathbf{k}_1 + \mathbf{k}_2$ и частотой $\omega_3 = \omega_1 + \omega_2$ с коэффициентом усиления (2.79).

Рассмотренное выше приближение справедливо, пока амплитуда волн накачки ψ_0, χ_0 много больше амплитуды другой магнито-Россби волны ϕ . Однако на определенной стадии процесса амплитуда растущей волны станет сравнима с амплитудами ψ_0, χ_0 . В рассмотрение, таким образом, необходимо включить уравнение (2.67), (2.68). Амплитуды волн накачки ψ_0 и χ_0 , так же как и скорость роста амплитуды ϕ уменьшаются, что приводит к насыщению параметрической неустойчивости.

При наличии затухания уравнение для амплитуды волны (2.77) записывается в следующем виде:

$$s_{v1}\phi + \eta_1\phi = f_{v1}\psi_0^*\chi_0 \quad (2.80)$$

Где η_1 - линейный коэффициент затухания амплитуды ϕ в (2.80). Таким образом, для развития неустойчивости необходимо, чтобы выполнялось условие $\eta_1 < |\psi_0^*\chi_0|/|f_{v1}|$. Это условие определяет пороговое значение для произведения амплитуд волн $(\psi_0\chi_0)^{cr}$, при котором решение возрастает экспоненциально, а именно

$$(\psi_0^*\chi_0)^{cr} = \eta_1 \frac{|r_{v1}|}{|f_{v1}|} \quad (2.81)$$

с инкрементом

$$\Gamma = \frac{|f_{v1}|}{|r_{v1}|} (\psi_0^*\chi_0)^{cr} \quad (2.82)$$

2.4.2 Волны магнито-Россби в горизонтальном магнитном поле

Воспользовавшись методом многомасштабных взаимодействий [26], выпишем для исходной системы (2.3)-(2.7) при $B_0 = 0$ слагаемые, пропорциональные

ε^2 :

$$\begin{aligned}
& - \left(\begin{array}{c} \frac{\partial h_2}{\partial T_0} + H(\nabla_0, \mathbf{v}_2) \\ H \frac{\partial^2 v_{x2}}{\partial T_0 \partial Y_0} - H(\mathbf{B}^0, \nabla_0) \frac{\partial B_{x2}}{\partial Y_0} + gH \frac{\partial^2 h_2}{\partial X_0 \partial Y_0} - f_0 H \frac{\partial v_{y2}}{\partial Y_0} - \beta H v_{y2} \\ H \frac{\partial v_{y2}}{\partial T_0} - H(\mathbf{B}^0, \nabla_0) B_{y2} + gH \frac{\partial h_2}{\partial Y_0} + f_0 H \partial v_{x2} \\ H \frac{\partial B_{x2}}{\partial T_0} - H(\mathbf{B}^0, \nabla_0) v_{x2} \\ H \frac{\partial B_{y2}}{\partial T_0} - H(\mathbf{B}^0, \nabla_0) v_{y2} \end{array} \right) = \\
& = \left(\begin{array}{c} \frac{\partial h_1}{\partial T_1} + H(\nabla_1, \mathbf{v}_1) \\ H \left(\frac{\partial^2}{\partial T_1 \partial Y_0} + \frac{\partial^2}{\partial T_0 \partial Y_1} \right) v_{x1} - H L_1 B_{x1} + gH \left(\frac{\partial^2}{\partial X_0 \partial Y_1} + \frac{\partial^2}{\partial X_1 \partial Y_0} \right) h_1 - f_0 H \frac{\partial v_{y1}}{\partial Y_1} \\ H \frac{\partial v_{y1}}{\partial T_1} - H(\mathbf{B}^0, \nabla_1) \partial B_{y1} + gH \frac{\partial h_1}{\partial Y_1} \\ H \frac{\partial B_{x1}}{\partial T_1} - H(\mathbf{B}^0, \nabla_1) v_{x1} \\ H \frac{\partial B_{y1}}{\partial T_1} - H(\mathbf{B}^0, \nabla_1) v_{y1} \end{array} \right) + \\
& + \left(\begin{array}{c} \frac{h_1 v_{x1}}{\partial X_0} + \frac{h_1 v_{y1}}{\partial Y_0} \\ \frac{\partial^2 h_1 v_{x1}}{\partial T_0 \partial Y_0} + H \frac{\partial^2 (v_{x1}^2 - B_{x1}^2)}{\partial X_0 \partial Y_0} + H \frac{\partial^2 (v_{x1} v_{y1} - B_{x1} B_{y1})}{\partial^2 Y_0} + g \frac{\partial h_1}{\partial X_0} \frac{\partial h_1}{\partial Y_0} + g h_1 \frac{\partial^2 h_1}{\partial X_0} \partial Y_0 - f_0 \frac{\partial h_1 v_{y1}}{\partial Y_0} - \beta h_1 v_{y1} \\ \frac{\partial h_1 v_{y1}}{\partial T_0} + H \frac{\partial (v_{x1} v_{y1} - B_{x1} B_{y1})}{\partial X_0} + H \frac{\partial (v_{y1}^2 - B_{y1}^2)}{\partial Y_0} + g h_1 \frac{\partial h_1}{\partial Y_0} + f_0 h_1 v_{x1} \\ \frac{\partial h_1 B_{x1}}{\partial T_0} + H \frac{\partial (v_{y1} B_{x1} - v_{x1} B_{y1})}{\partial Y_0} \\ \frac{\partial h_1 B_{y1}}{\partial T_0} + H \frac{\partial (v_{x1} B_{y1} - v_{y1} B_{x1})}{\partial X_0} \end{array} \right) + \\
& + \left(\begin{array}{c} 0 \\ (\mathbf{B}^0, \nabla_0) \frac{\partial h_1 B_{x1}}{\partial Y_0} \\ (\mathbf{B}^0, \nabla_0) h_1 B_{y1} \\ (\mathbf{B}^0, \nabla_0) h_1 v_{x1} \\ (\mathbf{B}^0, \nabla_0) h_1 v_{y1} \end{array} \right) \quad (2.83)
\end{aligned}$$

Здесь $L_1 = (\mathbf{B}^0, \nabla_0) \frac{\partial}{\partial Y_1} + (\mathbf{B}^0, \nabla_1) \frac{\partial}{\partial Y_0}$.

Также как и в предыдущем случае для исключения резонансных слагаемых в правой части воспользуемся условием ортогональности правой части (2.83) ядру оператора A_h (2.30). Для этого обозначим собственный вектор оператора A_h^* как $\mathbf{z}_h = (z_{h1}, z_{h2}, z_{h3}, z_{h4}, z_{h5})^T$ и найдем собственные вектора оператора A_h^* :

$$\det \left(\begin{array}{ccccc} -i\omega & ik_x H & ik_y H & 0 & 0 \\ igk_x & -i\omega & -f_0 & -i(\mathbf{k}, \mathbf{B}^0) & 0 \\ -gk_y^2 & ik_y f_0 + \beta & \omega k_y & 0 & k_y(\mathbf{k}, \mathbf{B}^0) \\ 0 & -i(\mathbf{k}, \mathbf{B}^0) & 0 & -i\omega & 0 \\ 0 & 0 & -i(\mathbf{k}, \mathbf{B}^0) & 0 & -i\omega \end{array} \right) = 0 \quad (2.84)$$

Отсюда следует (2.31). Собственный вектор $\mathbf{z}_h = (z_{h1}, z_{h2}, z_{h3}, z_{h4}, z_{h5})^T$ удовлетворяет системе $A_h^* \mathbf{z}_h = 0$, откуда

$$-i\omega z_{h1} + ik_x H z_{h2} + ik_y H z_{h3} = 0 \quad (2.85)$$

$$igk_x z_1 - i\omega z_{h2} - f_0 z_{h3} - i(\mathbf{k}, \mathbf{B}^0) z_{h4} = 0 \quad (2.86)$$

$$-gk_y^2 z_{h1} + (ik_y f_0 + \beta H) z_{h2} + \omega k_y z_{h3} + k_y(\mathbf{k}, \mathbf{B}^0) z_{h5} = 0 \quad (2.87)$$

$$-i(\mathbf{k}, \mathbf{B}^0) z_{h2} - i\omega z_{h4} = 0 \quad (2.88)$$

$$-i(\mathbf{k}, \mathbf{B}^0) z_{h3} - i\omega z_{h5} = 0 \quad (2.89)$$

Из системы (2.85-2.89) с точностью до константы определяется собственный вектор оператора A_h^* :

$$\mathbf{z}_h = \begin{pmatrix} z_1 \\ z_2 \\ z_3 \\ z_4 \\ z_5 \end{pmatrix} \quad (2.90)$$

Представим опять решение в виде трех магнито-Россби волн, удовлетворяющих условию синхронизма $\omega(\mathbf{k}_1) + \omega(\mathbf{k}_2) = \omega(\mathbf{k}_3)$, $\mathbf{k}_1 + \mathbf{k}_2 = \mathbf{k}_3$ (2.33):

$$\mathbf{u}_1 = \phi \mathbf{a}(\mathbf{k}_1) \exp(i\theta_1) + \psi \mathbf{a}(\mathbf{k}_2) \exp(i\theta_2) + \chi \mathbf{a}(\mathbf{k}_3) \exp(i\theta_3) + c.c. \quad (2.91)$$

где ϕ, ψ, χ - амплитуды взаимодействующих волн, $\theta_i = -\omega(\mathbf{k}_i)T_0 + k_{xi}X_0 + k_{yi}Y_0$ - фазы волн, \mathbf{a} - собственный вектор оператора A_h . Таким образом, используем правую часть системы уравнений (2.83), пропорциональную $\exp(i\theta_1)$, для получения первого уравнения трехволновых взаимодействий на амплитуду волны α . Из правой части системы уравнений (2.83) будут выбраны слагаемые, пропорциональные $\exp(i\theta_1)$ и $\exp(i\theta_3)\exp(-i\theta_2)$. Как и прежде, домножив эту часть на собственный вектор сопряженного оператора \mathbf{z} и используя условие совместности $A_h^* \mathbf{z} = 0$, получим уравнение для амплитуды первой из взаимодействующих магнито-Россби волн:

$$s_{h1}\phi = f_{h1}\psi^*\chi \quad (2.92)$$

В уравнении (2.92) оператор s_{h1} выражается следующим образом:

$$s_{h1} = r_{h1} \frac{\partial}{\partial T_1} + p_{h1} \frac{\partial}{\partial X_1} + q_{h1} \frac{\partial}{\partial Y_1} \quad (2.93)$$

$$r_{h1} = z_1 a_1 + z_2 a_2 H + i k_{y1} z_3 a_3 H + z_4 a_4 H + z_5 a_5 H \quad (2.94)$$

$$p_{h1} = z_1 a_2 H + z_2 (a_1 g H - a_4 B_x^0 H) - z_4 (a_2 + a_3) B_x^0 H \quad (2.95)$$

$$q_{h1} = z_1 a_3 H + z_2 a_4 B_y^0 H + i \omega(\mathbf{k}_1) z_3 a_3 H - i 2 k_{y1} z_3 a_5 B_y^0 H + \\ + 2 i k_{y1} z_3 a_1 g H + z_3 a_2 f_0 H - z_4 a_2 B_y^0 H - z_5 a_3 B_y^0 H \quad (2.96)$$

В выражениях (2.93), (2.94), (2.95), (2.96) собственный вектор $\mathbf{a} = \mathbf{a}(\mathbf{k}_1)$. Коэффициент f_{h1} в уравнении (2.92) имеет вид

$$f_{h1} = f_{h1}(\mathbf{k}_1, \mathbf{k}_2, \mathbf{k}_3, f_0, \beta, g, H, \mathbf{B}^0) = \\ = i 2 k_{x1} z_1 a_1 a_2 + i 2 k_{y1} z_1 a_1 a_3 - i 2 \omega(\mathbf{k}_1) z_2 a_1 a_2 + i 2 k_{x1} z_2 a_2^2 - i 2 k_{x1} z_2 a_4^2 + \\ + i 2 k_{y1} z_2 a_2 a_3 - i 2 k_{y1} z_2 a_4 a_5 + i 2 k_{x1} z_2 a_1^2 g + 2(\mathbf{B}^0, \mathbf{k}_1) z_2 a_1 a_4 - 2 f_0 z_2 a_1 a_3 + \\ + 2 \omega_1 k_{y1} z_3 a_1 a_3 + 2 k_{x1} k_{y1} z_3 (a_2 a_3 - a_4 a_5) H + 2 k_{y1}^2 z_3 (a_3^2 - a_5^2) H + 2 k_{y1}^2 z_3 a_1^2 g + \\ + (k_{y2}^2 + k_{y3}^2) z_3 a_1^2 g - 2 i k_{y1}(\mathbf{B}^0, \mathbf{k}_1) z_3 a_1 a_5 + i 2 k_{y1} z_3 a_1 a_2 f_0 + z_3 a_1 a_2 \beta + \\ + i 2 \omega(\mathbf{k}_1) z_4 a_1 a_4 + i 2 k_{y1} z_4 (a_3 a_4 - a_2 a_5) H - 2(\mathbf{B}^0, \mathbf{k}_1) z_4 a_1 a_2 + \\ + i 2 \omega(\mathbf{k}_1) z_4 a_1 a_5 + i 2 k_{x1} z_4 (a_2 a_5 - a_3 a_4) H - 2(\mathbf{B}^0, \mathbf{k}_1) z_4 a_1 a_3 \quad (2.97)$$

В выражении (2.97) произведения вида $a_i a_j = (a_i^*(\mathbf{k}_2) a_j(\mathbf{k}_3) + a_i(\mathbf{k}_3) a_j^*(\mathbf{k}_2))/2$. Используя аналогичную процедуру для слагаемых, пропорциональных $\exp(i\theta_2)$ получим из правой части системы (2.83), домноженной на собственный вектор \mathbf{z} , уравнение для амплитуды β , второй из взаимодействующих магнито-Россби волн принимает вид

$$s_{h2} \psi = f_{h2} \phi^* \chi \quad (2.98)$$

где s_{h2} имеет вид:

$$s_{h2} = r_{h2} \frac{\partial}{\partial T_1} + p_{h2} \frac{\partial}{\partial X_1} + q_{h2} \frac{\partial}{\partial Y_1} \quad (2.99)$$

$$r_{h2} = z_1 a_1 + z_2 a_2 H + i k_{y2} z_3 a_3 H + z_4 a_4 H + z_5 a_5 H \quad (2.100)$$

$$p_{h2} = z_1 a_2 H + z_2 (a_1 g H - a_4 B_x^0 H) - z_4 (a_2 + a_3) B_x^0 H \quad (2.101)$$

$$q_{h2} = z_1 a_3 H + z_2 a_4 B_y^0 H + i \omega(\mathbf{k}_1) z_3 a_3 H - i 2 k_{y1} z_3 a_5 B_y^0 H + \\ + 2 i k_{y1} z_3 a_1 g H + z_3 a_2 f_0 H - z_4 a_2 B_y^0 H - z_5 a_3 B_y^0 H \quad (2.102)$$

В выражениях (2.99), (2.100), (2.101), (2.102) собственный вектор $\mathbf{a} = \mathbf{a}(\mathbf{k}_2)$.
Выражение для коэффициента f_{h2} в уравнении (2.98) имеет вид

$$\begin{aligned}
f_{h2} &= f_{h2}(\mathbf{k}_1, \mathbf{k}_2, \mathbf{k}_3, f_0, \beta, g, H, \mathbf{B}^0) = \\
&= i2k_{x2}z_1a_1a_2 + i2k_{y2}z_1a_1a_3 - i2\omega(\mathbf{k}_2)z_2a_1a_2 + i2k_{x2}z_2a_2^2 - i2k_{x2}z_2a_4^2 + \\
&+ i2k_{y2}z_2a_2a_3 - i2k_{y2}z_2a_4a_5 + i2k_{x2}z_2a_1^2g + 2(\mathbf{B}_0, \mathbf{k}_2)z_2a_1a_4 - 2f_0z_2a_1a_3 + \\
&+ 2\omega_2k_{y2}z_3a_1a_3 + 2k_{x2}k_{y2}z_3(a_2a_3 - a_4a_5)H + 2k_{y2}^2z_3(a_3^2 - a_5^2)H + 2k_{y2}^2z_3a_1^2g + \\
&+ (k_{y1}^2 + k_{y3}^2)z_3a_1^2g - 2ik_{y2}(\mathbf{B}^0, \mathbf{k}_2)z_3a_1a_5 + i2k_{y2}z_3a_1a_2f_0 + z_3a_1a_2\beta + \\
&+ i2\omega(\mathbf{k}_2)z_4a_1a_4 + i2k_{y2}z_4(a_3a_4 - a_2a_5)H - 2(\mathbf{B}^0, \mathbf{k}_2)z_4a_1a_2 + \\
&+ i2\omega(\mathbf{k}_2)z_4a_1a_5 + i2k_{x2}z_4(a_2a_5 - a_3a_4)H - 2(\mathbf{B}^0, \mathbf{k}_2)z_4a_1a_3 \quad (2.103)
\end{aligned}$$

В выражении (2.103) для f_{h2} произведения вида $a_i a_j = (a_i^*(\mathbf{k}_1)a_j(\mathbf{k}_3) + a_i(\mathbf{k}_3)a_j^*(\mathbf{k}_2))/2$.
Наконец, выписывая только слагаемые, пропорциональные $\exp(i\theta_3)$ в правой части (2.83) получим уравнение на амплитуду третьей взаимодействующей волны:

$$s_{h3}\chi = f_{h3}\phi\psi \quad (2.104)$$

где оператор s_{h3} имеет вид:

$$s_{h3} = r_{h3}\frac{\partial}{\partial T_1} + p_{h3}\frac{\partial}{\partial X_1} + q_{h3}\frac{\partial}{\partial Y_1} \quad (2.105)$$

$$r_{h3} = z_1a_1 + z_2a_2H + ik_{y3}z_3a_3H + z_4a_4H + z_5a_5H \quad (2.106)$$

$$p_{h3} = z_1a_2H + z_2(a_1gH - a_4B_x^0H) - z_4(a_2 + a_3)B_x^0H \quad (2.107)$$

$$\begin{aligned}
q_{h3} &= z_1a_3H + z_2a_4B_y^0H + i\omega(\mathbf{k}_1)z_3a_3H - i2k_{y1}z_3a_5B_y^0H + \\
&+ 2ik_{y1}z_3a_1gH + z_3a_2f_0H - z_4a_2B_y^0H - z_5a_3B_y^0H \quad (2.108)
\end{aligned}$$

В выражениях (2.105), (2.106), (2.107) и (2.108) собственный вектор $\mathbf{a} = \mathbf{a}(\mathbf{k}_3)$.
Коэффициент взаимодействия для третьего уравнения системы (2.104) имеет

ВИД:

$$\begin{aligned}
f_{h3} &= f_{h3}(\mathbf{k}_1, \mathbf{k}_2, \mathbf{k}_3, f_0, \beta, g, H, \mathbf{B}^0) = \\
&= i2k_{x3}z_1a_1a_2 + i2k_{y3}z_1a_1a_3 - i2\omega(\mathbf{k}_3)z_2a_1a_2 + i2k_{x3}z_2a_2^2 - i2k_{x3}z_2a_4^2 + \\
&+ i2k_{y3}z_2a_2a_3 - i2k_{y3}z_2a_4a_5 + i2k_{x3}z_2a_1^2g + 2(\mathbf{B}_0, \mathbf{k}_3)z_2a_1a_4 - 2f_0z_2a_1a_3 + \\
&+ 2\omega_1k_{y3}z_3a_1a_3 + 2k_{x3}k_{y3}z_3(a_2a_3 - a_4a_5)H + 2k_{y3}^2z_3(a_3^2 - a_5^2)H + 2k_{y3}^2z_3a_1^2g + \\
&+ (k_{y1}^2 + k_{y2}^2)z_3a_1^2g - 2ik_{y3}(\mathbf{B}^0, \mathbf{k}_3)z_3a_1a_5 + i2k_{y3}z_3a_1a_2f_0 + z_3a_1a_2\beta + \\
&+ i2\omega(\mathbf{k}_3)z_4a_1a_4 + i2k_{y3}z_4(a_3a_4 - a_2a_5)H - 2(\mathbf{B}^0, \mathbf{k}_3)z_4a_1a_2 + \\
&+ i2\omega(\mathbf{k}_3)z_4a_1a_5 + i2k_{x3}z_4(a_2a_5 - a_3a_4)H - 2(\mathbf{B}^0, \mathbf{k}_3)z_4a_1a_3 \quad (2.109)
\end{aligned}$$

В выражении для коэффициента взаимодействия f_{h3} произведения вида $a_i a_j = (a_i(\mathbf{k}_1)a_j(\mathbf{k}_2) + a_i(\mathbf{k}_1)a_j(\mathbf{k}_2))$

Таким образом, получена система взаимодействующих амплитуд трех волн для волн Россби в магнитной гидродинамике в приближении мелкой воды в горизонтальном магнитном поле. Для удобства дальнейшего анализа выпишем полученную систему в следующем виде:

$$s_{h1}\phi = f_{h1}\psi^*\chi \quad (2.110)$$

$$s_{h2}\psi = f_{h2}\phi^*\chi \quad (2.111)$$

$$s_{h3}\chi = f_{h3}\phi\psi \quad (2.112)$$

Выписывая из уравнения (2.83) отдельно слагаемые, пропорциональные каждой из взаимодействующих волн, мы получили систему из трех уравнений на амплитуды взаимодействующих волн ϕ, ψ, χ (2.110)-(2.112). Система (2.110)-(2.112) описывает трехволновые взаимодействия волн Россби, удовлетворяющих условию синхронизма $\omega(\mathbf{k}_1) + \omega(\mathbf{k}_2) = \omega(\mathbf{k}_1 + \mathbf{k}_2)$. В (2.110)-(2.112) коэффициенты f_{h1}, f_{h2}, f_{h3} и операторы s_{h1}, s_{h2}, s_{h3} зависят только от начальных параметров задачи и однозначно определяются условием совместности $A_h^* \mathbf{z} = 0$, аналогично случаю с внешним вертикальным магнитным полем (2.97), (2.103), (2.109) и (2.93), (2.99), (2.105). Используем систему (2.110)-(2.112) для качественного анализа [?] параметрических неустойчивостей волн Россби.

Рассмотрим случай, когда амплитуда одной из трех взаимодействующих волн в начальный момент много больше амплитуд двух других волн $\phi \gg \psi, \chi$,

амплитуду первой волны можно считать постоянной $\alpha = \alpha_0$, при этом обратным влиянием волн с амплитудами ψ , χ на волну с амплитудой ϕ можно пренебречь. Система в этом случае (2.110)-(2.112) принимает вид:

$$s_{h2}\psi = f_{h2}\phi_0^*\chi \quad (2.113)$$

$$s_{h3}\chi = f_{h3}\phi_0\psi \quad (2.114)$$

Решение полученной линейной системы уравнений ищем в виде:

$$\begin{pmatrix} \psi \\ \chi \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \psi' \\ \chi' \end{pmatrix} \exp(i\varphi) \quad (2.115)$$

Отсюда найдем инкремент неустойчивости

$$\Gamma = \sqrt{\frac{|f_{h2}f_{h3}|}{|r_{h2}r_{h3}|}}|\phi_0| > 0 \quad (2.116)$$

где f_{h2} и f_{h3} определены в (2.103) и (2.109). Таким образом, одна магнито-Россби волна с волновым вектором \mathbf{k}_1 и частотой $\omega_1 = \omega(\mathbf{k}_1)$ распадается на две магнито-Россби волны с волновыми векторами \mathbf{k}_2 и \mathbf{k}_3 , частотами ω_2 и ω_3 с инкрементом (2.116).

Рассмотренное выше приближение справедливо, пока амплитуда волны накачки ϕ_0 много больше амплитуды двух других магнито-Россби волн ψ , χ . Однако на определенной стадии процесса амплитуды растущих волн станут сравнимы с амплитудой ϕ_0 . В рассмотрение, таким образом, необходимо включить уравнение (2.110). При условии $f_{h1} < 0$, амплитуда волны накачки ϕ , так же как и скорости роста амплитуд ψ и χ уменьшаются, что приводит к насыщению параметрической неустойчивости.

При наличии линейного затухания, система (2.113)-(2.114) записывается в следующем виде:

$$s_{h2}\psi + \eta_2\psi = f_{h2}\phi_0^*\chi \quad (2.117)$$

$$s_{h3}\chi + \eta_3\chi = f_{h3}\phi_0\psi \quad (2.118)$$

В (2.117)-(2.118) слагаемые $\eta_2\psi$ и $\eta_3\chi$ определяют затухание. В этом случае экспоненциально растущие решения вида (2.115) будут существовать только при условии $\phi_0 > \sqrt{\eta_2\eta_3|r_{h2}r_{h3}|/|f_{h2}f_{h3}|}$. Таким образом, существует пороговое значение амплитуды волны накачки ϕ_0^{cr} , начиная с которого развивается

неустойчивость, а именно

$$\phi_0^{cr} = \sqrt{\frac{\eta_2 \eta_3 |r_{h2} r_{h3}|}{|f_{h2} f_{h3}|}} \quad (2.119)$$

с инкрементом

$$\Gamma = \sqrt{\frac{|f_{h2} f_{h3}|}{|r_{h2} r_{h3}|}} \phi_0^{cr} \quad (2.120)$$

Рассмотрим теперь случай, когда амплитуда одной из взаимодействующих волн много меньше амплитуд двух других волн $\phi \ll \psi, \chi$, так что можно считать амплитуды ψ и χ постоянными $\psi = \psi_0$ и $\chi = \chi_0$. Уравнение для амплитуды ϕ принимает вид

$$s_{h1} \phi = f_{h1} \psi_0^* \chi_0 \quad (2.121)$$

Ищем решение системы (2.121) в следующем виде:

$$\phi = \phi' \exp(\Gamma T_1) \quad (2.122)$$

Подставляя решение в этом виде в (2.121), получаем выражение для коэффициента усиления:

$$\Gamma = \frac{|f_{h1}|}{|r_{h1}|} |\psi_0^* \chi_0| > 0 \quad (2.123)$$

где f_{h1} определен в (2.97). В данном случае параметрического усиления две начальные магнито-Россби волны с волновыми векторами \mathbf{k}_1 и \mathbf{k}_2 и частотами $\omega_1 = \omega(\mathbf{k}_1)$ и $\omega_2 = \omega(\mathbf{k}_2)$ усиливают магнито-Россби волну с волновым вектором $\mathbf{k}_3 = \mathbf{k}_1 + \mathbf{k}_2$ и частотой $\omega_3 = \omega_1 + \omega_2$ с коэффициентом усиления (2.123).

Рассмотренное выше приближение справедливо, пока амплитуда волн накачки ψ_0, χ_0 много больше амплитуды другой магнито-Россби волны ϕ . Однако на определенной стадии процесса амплитуда растущей волны станет сравнима с амплитудами ψ_0, χ_0 . В рассмотрение, таким образом, необходимо включить уравнение (2.111), (2.112). Амплитуды волн накачки ψ_0 и χ_0 , так же как и скорость роста амплитуды ϕ уменьшаются, что приводит к насыщению параметрической неустойчивости.

При наличии затухания выражение для амплитуды волны (2.121) записывается в следующем виде:

$$s_{h1} \phi + \eta_1 \phi = f_{h1} \psi_0^* \chi_0 \quad (2.124)$$

Где η_1 - линейный коэффициент затухания амплитуды ϕ в (2.124). Таким образом, для развития неустойчивости необходимо, чтобы выполнялось условие

$\eta_1 < |\psi_0^* \chi_0| |f_{h1}| / |r_{h1}|$. Это условие определяет пороговое значение для произведения амплитуд волн $(\psi_0^* \chi_0)^{cr}$, при котором решение возрастает экспоненциально, а именно

$$(\psi_0^* \chi_0)^{cr} = \eta_1 \frac{|r_{h1}|}{|f_{h1}|} \quad (2.125)$$

с инкрементом

$$\Gamma = \frac{|f_{h1}|}{|r_{h1}|} (\psi_0^* \chi_0)^{cr} \quad (2.126)$$

В частном случае тороидального магнитного поля ($B_x = B_x^0, B_y = 0$) выражения для коэффициентов взаимодействия f_{h1}, f_{h2}, f_{h3} и дифференциальных операторов s_{h1}, s_{h2}, s_{h3} вместо множителя $(\mathbf{k}, \mathbf{v}_a)$ имеют в составе множитель $k_x v_{ax}$.

В случае полоидального магнитного поля ($B_x = 0, B_y = B_y^0$) выражения для коэффициентов взаимодействия f_{h1}, f_{h2}, f_{h3} и дифференциальных операторов s_{h1}, s_{h2}, s_{h3} вместо множителя $(\mathbf{k}, \mathbf{v}_a)$ имеют в составе множитель $k_y v_{ay}$.

2.5 Выводы

Получены магнитогидродинамические уравнения мелкой воды на β -плоскости во внешнем магнитном поле с учетом тождеств, обеспечивающих бездивергентность магнитного поля в приближенных уравнениях. Рассмотрен случай отсутствия внешнего магнитного поля, в котором система уравнений мелкой воды сводится к традиционной и имеет стационарные решения в виде горизонтальных (полоидального, тороидального и их суммы) магнитных полей. Качественный анализ дисперсионных кривых волн магнито-Россби в магнитной гидродинамике показал возможность трехволновых взаимодействий в приближении слабой нелинейности.

Методом многомасштабных асимптотических разложений развита слабонелинейная теория волн магнито-Россби во внешнем вертикальном магнитном поле и при отсутствии вертикального магнитного поля для стационарных состояний наличия горизонтального поля (полоидального, тороидального и их суммы), и получены трехволновые уравнения для медленно меняющихся амплитуд. Приближенный анализ полученных систем уравнений для медленных амплитуд показал, что в системе могут развиваться два типа параметрических неустойчивостей: параметрический распад и параметрическое усиление волн

магнито-Россби. Получены инкременты найденных неустойчивостей для случая течения во внешнем вертикальном магнитном поле и в отсутствии внешнего поля на фоне стационарного состояния в виде горизонтального магнитного поля.

3 Эффекты сжимаемости в магнитогидродинамических течениях в приближении мелкой воды

3.1 Введение

Важным принципиальным свойством течений в плазменной астрофизике является свойство сжимаемости, характеризующее большинство наблюдаемых объектов во Вселенной. Данная глава посвящена исследованию фундаментальной роли сжимаемости в крупномасштабных течениях астрофизической плазмы. В главе получена система вращающихся магнитогидродинамических уравнений в приближении мелкой воды во внешнем вертикальном магнитном поле с учетом крупномасштабной сжимаемости. В результате в этом приближении фильтруются звуковые волны и учитывается зависимость плотности от давления на крупных масштабах, описывающая эффекты статической сжимаемости по сравнению со случаем несжимаемой плазмы [43], [44], [45]. Полученная система нетривиальным образом зависит от отношения характерного вертикального масштаба течения и масштаба высот, на котором вариация плотности становится существенной. В отличие от магнитогидродинамических уравнений мелкой воды для несжимаемой плазмы, высота свободной поверхности не является определяющей характеристикой для описания течений, так как закон сохранения массы записывается через новую переменную, которая зависит от плотности плазмы и высоты столба.

В главе развитая в [4], [23] теория линейных волн магнито-Пуанкаре и манитострофических волн и их нелинейных взаимодействий обобщается на случай сжимаемых течений вращающейся астрофизической плазмы. Для этого используется предложенная система уравнений в приближении мелкой воды и получаем зависимость дисперсионных уравнений, коэффициентов взаимодействия трех волн в приближении слабой нелинейности и инкрементов параметрических неустойчивостей от характеристик сжимаемости среды и термодинамических характеристик вращающейся плазмы. В главе развивается теория линейных волн магнито-Россби и их нелинейных взаимодействий в течениях астро-

физической плазмы при учете сжимаемости. Для этого используется полученная система уравнений в приближении мелкой воды на β -плоскости с учетом сжимаемости. Получена зависимость дисперсионных уравнений, коэффициентов взаимодействия трех волн в приближении слабой нелинейности и инкрементов параметрических неустойчивостей от характеристик сжимаемости среды и термодинамических характеристик вращающейся плазмы.

Гиперболичность магнитогидродинамических уравнений сжимаемой мелкой воды определяет, наряду с гладкими, наличие разрывных решений. Даже в случае, когда начальные условия являются гладкими, нелинейный характер уравнений, наряду с их гиперболичностью, за конечное время может привести к разрывному решению. В главе получены простые автомодельные решения уравнений магнитной гидродинамики в приближении мелкой воды над ровной границей, позволяющие найти точное решение задачи распада произвольного разрыва. Получено точное явное решение начальной задачи с кусочно-постоянными начальными условиями для уравнений магнитной гидродинамики в приближении сжимаемой мелкой воды на ровной границе, впервые возникшей в газовой динамике (задача Римана) [47].

Аналогичный анализ проведен для магнитогидродинамических уравнений сжимаемой мелкой воды на наклонной плоскости. Решение задачи на наклонной плоскости представляет самостоятельный интерес поскольку в приближении мелкой воды произвольную границу и внешнюю силу можно естественным образом аппроксимировать серией наклонных границ для качественного анализа сжимаемых течений. Мы используем обобщенное определение простой волны [51], которое сводится к классическому определению в случае отсутствия источников слагаемого. Показано, что характеристиками системы уравнений являются параболы, которые переходят в прямые в случае плоской подстилающей поверхности. В явном виде найдены все непрерывные и разрывные решения системы. Получено аналитическое решение задачи распада произвольного разрыва для магнитогидродинамических течений сжимаемой плазмы в поле силы тяжести в приближении мелкой воды над подстилающей поверхностью с линейным профилем.

В разделе 3.1 получены две системы магнитогидродинамических уравне-

ний в приближении мелкой воды во внешнем вертикальном магнитном поле с учетом сжимаемости: система уравнений с полным учетом силы Кориолиса (приближение f -плоскости), и система уравнений, в которой параметр Кориолиса линейно зависит от широты (приближение β -плоскости) над произвольной границей.

В разделе 3.2 получены дисперсионные соотношения для линейных волн магнито-Пуанкаре и магнитострофических волн во внешнем вертикальном поле. Проведен качественный анализ дисперсионных соотношений линейных волн, и сделаны выводы о возможности трехволновых взаимодействий для каждого типа волн в сжимаемой плазме. Методом многомасштабных разложений получены уравнения трехволновых взаимодействий для всех случаев волновых синхронизмов. Для каждого случая исследованы параметрические неустойчивости, проведено сравнение с несжимаемой плазмой.

В разделе 3.3 аналогичный анализ проведен для волн магнито-Россби во внешнем вертикальном магнитном поле и волн магнито-Россби в горизонтальном магнитном поле с учетом сжимаемости плазмы.

В разделе 3.4 получены все частные решения типа центрированных простых волн и все разрывные решения с ненулевым потоком массы через разрыв для одномерной системы над ровной поверхностью. В явном виде предъявлены непрерывные и разрывные автомодельные решения для системы над наклонной плоскостью.

В разделе 3.5 сформулирована задача Римана. Показано, что ее решение представляет собой одну из пяти волновых конфигураций. Получены условия для начальных данных, при которых реализуется каждая из конфигураций. Получено решение задачи Римана для случая наклонной подстилающей поверхности. Показано, чем Решение задачи Римана для сжимаемой МГД отличается от несжимаемого случая. В заключении приведены основные результаты работы.

3.2 Вывод магнитогидродинамических уравнений мелкой воды с учетом крупномасштабной сжимаемости

В данном разделе получим важную для плазменной астрофизики систему уравнений мелкой воды во внешнем вертикальном магнитном поле с учетом

эффектов сжимаемости, используя усреднение по высоте слоя трехмерной системы магнитогидродинамических уравнений вращающейся сжимаемой плазмы. Мы используем вывод системы магнитогидродинамических уравнений в приближении мелкой воды с учетом крупномасштабной сжимаемости [43], который мы обобщим для описания течений слоя плазмы со свободной границей во внешнем вертикальном магнитном поле B'_0 , в поле силы тяжести при наличии вращения. Рассмотрим тонкий слой вращающейся сжимаемой плазмы при наличии силы тяжести во внешнем вертикальном магнитном поле (Рис. ??). При переходе в систему отсчета, вращающуюся вместе со слоем плазмы, возникают дополнительные силы - центробежная и Кориолисова. Будем пренебрегать влиянием центробежной силы по сравнению с силой тяжести [61]. В качестве исходной используем следующую систему:

$$\frac{\partial \mathbf{u}}{\partial t} + (\mathbf{u} \nabla) \mathbf{u} - \frac{1}{\rho} (\mathbf{B} \nabla) \mathbf{B} = -\frac{\nabla p}{\rho} - f [\mathbf{e}_z \times \mathbf{u}] - \mathbf{g} \quad (3.1)$$

$$\frac{\partial \mathbf{B}}{\partial t} = \text{rot} [\mathbf{u} \times \mathbf{B}] \quad (3.2)$$

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} + \nabla (\rho \mathbf{u}) = 0 \quad (3.3)$$

$$\frac{p}{\rho^\gamma} = \text{const} \quad (3.4)$$

$$p = \rho R T \quad (3.5)$$

$$\nabla \mathbf{B} = 0 \quad (3.6)$$

В уравнениях (3.1)-(3.6) $\mathbf{u}(u_1, u_2, u_3)$ - скорость, $\mathbf{B}(B_1, B_2, B_3) = \frac{\tilde{\mathbf{B}}}{2\sqrt{\pi}}$ - величина, пропорциональная магнитному полю $\tilde{\mathbf{B}}$, ρ - плотность плазмы, p - полное (магнитное и гидродинамическое) давление плазмы, $f = 2\Omega$ - параметр Кориолиса, γ - показатель адиабаты, T - температура плазмы, R - универсальная газовая постоянная, g - ускорение свободного падения, g и f считаем постоянными.

В рассматриваемой системе (3.1) - уравнение движения, (3.2) - уравнение переноса магнитного поля, (3.3) - закон сохранения массы, (3.4) - уравнение адиабаты идеального газа, (3.5) - уравнение Клапейрона, которое используется для нахождения граничных условий, (3.6) - условие бездивергентности магнитного поля, которое автоматически удовлетворяется при задании корректных начальных условий.

Запишем граничные условия для рассматриваемой геометрии течения (Рис. ??):

$$u_3|_{z=0} = 0 \quad (3.7)$$

$$u_3|_{z=h} = \frac{\partial h}{\partial t} + u_1|_{z=h} \frac{\partial h}{\partial x} + u_2|_{z=h} \frac{\partial h}{\partial y} \quad (3.8)$$

$$B_3|_{z=0} = B'_0 \quad (3.9)$$

$$B_3|_{z=h} = B_1|_{z=h} \frac{\partial h}{\partial x} + B_2|_{z=h} \frac{\partial h}{\partial y} \quad (3.10)$$

$$p|_{z=h} = p_h = \text{const} \quad T|_{z=h} = T_h = \text{const} \quad (3.11)$$

Выражения (3.7),(3.8) - условия непротекания на дне $z = 0$ и на свободной границе $z = h(x, y, t)$ соответственно, означающие равенство нулю нормальной к поверхности составляющей скорости жидкости, условия (3.9), (3.10) означают, что магнитное поле на дне вертикально и равно $B'_0 = \text{const}$, а на свободной границе параллельно поверхности, последние два условия (3.11) задают постоянные значения давления и температуры на свободной границе. Заметим, что если один из параметров p, ρ, T постоянен на свободной границе, то остальные два параметра постоянны, вследствие уравнения Клапейрона и адиабатичности рассматриваемых процессов. Используя уравнение Клапейрона, получим выражение для плотности на свободной границе $\rho_h = p_h / (RT_h) = \text{const}$. Таким образом, течение вращающегося слоя магнитной жидкости со свободной границей $z = h(x, y, t)$ на ровной поверхности полностью описывается системой (3.1)-(3.6) и граничными условиями (3.7)-(3.11).

Давление в слое плазмы полагаем гидростатическим, тогда вертикальная составляющая уравнения (3.1) записывается в виде

$$\frac{\partial p}{\partial z} = -\rho g \quad (3.12)$$

Уравнение (3.12) и уравнение (3.5) при этом становятся замкнутой системой и позволяют определить p, ρ . При этом уравнение адиабаты, применяя граничные условия (3.11), можно записать в следующем виде:

$$\frac{p}{\rho^\gamma} = \frac{p_h}{\rho_h^\gamma} \quad (3.13)$$

Из (3.12), (3.13) найдем величины p и ρ . Для этого выразим ρ через p из уравнения (3.13), подставим в уравнение (3.12) и проинтегрируем по вертикали от

0 до $h(x, y, t)$, используя граничное условие (3.11):

$$p(x, y, z, t) = p_h \left(1 + \frac{h-z}{H_\rho}\right)^{\gamma/(\gamma-1)} \quad (3.14)$$

$$\rho(x, y, z, t) = \rho_h \left(1 + \frac{h-z}{H_\rho}\right)^{1/(\gamma-1)} \quad (3.15)$$

где

$$H_\rho = \frac{c_p T_h}{g} \quad (3.16)$$

$c_p = \frac{\gamma}{\gamma-1} R = \text{const}$ - теплоемкость при постоянном давлении. Величина H_ρ называется характерной плотностной высотой и соответствует масштабу высоты, на котором вариация плотности по высоте становится существенной.

Усредним уравнения (3.1), (3.2), (3.3) по высоте слоя от $z = 0$ до $z = h(x, y, t)$. Интегрирование (3.3) после вынесения производной из-под знака интеграла и использования граничных условий (3.7)-(3.10) приводит к следующему уравнению

$$\frac{\partial}{\partial t} \int_0^h \rho dz + \frac{\partial}{\partial x} \int_0^h \rho u_1 dz + \frac{\partial}{\partial y} \int_0^h \rho u_2 dz = 0 \quad (3.17)$$

Проинтегрируем теперь x -составляющую уравнения (3.1) по высоте слоя от $z = 0$ до $z = h(x, y, t)$, воспользовавшись формулой Лейбница и граничными условиями (3.7)-(3.10). Получим усредненное уравнение движения в проекции на ось x :

$$\begin{aligned} \frac{\partial}{\partial t} \int_0^h \rho u_1 dz + \frac{\partial}{\partial x} \int_0^h (\rho u_1^2 - \rho B_1^2) dz + \\ + \frac{\partial}{\partial y} \int_0^h (\rho u_1 u_2 - \rho B_1 B_2) dz + \int_0^h \frac{\partial p}{\partial x} dz + B_0 u_x = f \int_0^h \rho u_2 dz \end{aligned} \quad (3.18)$$

где $B_0 = \rho_0 B'_0$, а ρ_0 - постоянная плотность на нижней границе. Аналогично преобразуем и y -составляющую уравнения (3.1):

$$\begin{aligned} \frac{\partial}{\partial t} \int_0^h \rho u_2 dz + \frac{\partial}{\partial x} \int_0^h (\rho u_1 u_2 - \rho B_1 B_2) dz + \\ + \frac{\partial}{\partial y} \int_0^h (\rho u_2^2 - \rho B_2^2) dz + \int_0^h \frac{\partial p}{\partial y} dz + B_0 u_y = -f \int_0^h \rho u_1 dz \end{aligned} \quad (3.19)$$

Усредним аналогично уравнение переноса магнитного поля. Тогда из (3.2) для горизонтальных составляющих получим

$$\frac{\partial}{\partial t} \int_0^h B_1 dz + \frac{\partial}{\partial y} \int_0^h (u_2 B_1 - u_1 B_2) dz - B_0 B_x = 0 \quad (3.20)$$

$$\frac{\partial}{\partial t} \int_0^h B_2 dz + \frac{\partial}{\partial x} \int_0^h (u_1 B_2 - u_2 B_1) dz - B_0 B_y = 0 \quad (3.21)$$

Усредняя также уравнение бездивергентности магнитного поля (??), получим

$$\frac{\partial}{\partial x} \int_0^h B_1 dz + \frac{\partial}{\partial y} \int_0^h B_2 dz + B_3 = 0 \quad (3.22)$$

Из уравнения для вертикальной составляющей магнитного поля получим

$$\frac{\partial}{\partial t} \int_0^h B_3 dz + \frac{\partial}{\partial x} \int_0^h B_3 v_1 dz + \frac{\partial}{\partial y} \int_0^h v_2 B_3 dz = 0 \quad (3.23)$$

Уравнение (3.23) играет важную роль для понимания приближения мелкой воды во внешнем магнитном поле, так как уравнение для вертикальной составляющей магнитного поля имеет ключевое значение для удовлетворения условия бездивергентности в усредненной по высоте системе уравнений.

Уравнения (3.23) и (3.22) являются важными в МГД приближении мелкой воды во внешнем магнитном поле не только как технические детали в процедуре вывода уравнений, но и обеспечивают выполнение условия бездивергентности магнитного поля при их усреднении в сжимаемой плазме. Кроме того (3.23) демонстрирует существование z -компоненты магнитного поля в приближении мелкой воды во внешнем вертикальном поле.

Введем далее средние по высоте слоя плотность $\bar{\rho}$, давление \bar{p} , горизонтальные скорости \bar{u}_i и горизонтальные составляющие магнитного поля \bar{B}_i :

$$\bar{\rho} = \frac{1}{h} \int_0^h \rho dz \quad \bar{p} = \frac{1}{h} \int_0^h p dz \quad (3.24)$$

$$\bar{u}_i = \frac{1}{h} \int_0^h u_i dz \quad \bar{B}_i = \frac{1}{h} \int_0^h B_i dz \quad i = 1, 2 \quad (3.25)$$

Подставим в уравнения (3.24) выражения для ρ и p из (3.15) и (3.14) и получим:

$$\bar{\rho} = \frac{1}{h} \frac{p_h}{g} \left[\left(1 + \frac{h}{H_\rho}\right)^{\gamma/(\gamma-1)} - 1 \right] \quad (3.26)$$

$$\bar{p} = \frac{ph}{h} \frac{H_\rho}{\frac{\gamma}{\gamma-1} + 1} \left[\left(1 + \frac{h}{H_\rho} \right)^{\frac{\gamma}{\gamma-1} + 1} - 1 \right] \quad (3.27)$$

Величины p, ρ, u_i, B_i представим в виде суммы средних значений и малых флуктуаций:

$$p = \bar{p} + p' \quad \rho = \bar{\rho} + \rho' \quad u_i = \bar{v}_i + v'_i \quad B_i = \bar{B}_i + B'_i \quad (3.28)$$

причем выполняется:

$$\int_0^h \rho' dz = \int_0^h p' dz = \int_0^h v'_i dz = \int_0^h B'_i dz = 0 \quad (3.29)$$

Введем новую переменную l :

$$l = h\bar{p} = \frac{ph}{g} \left[\left(1 + \frac{h}{H_\rho} \right)^{\frac{\gamma}{\gamma-1}} - 1 \right] \quad (3.30)$$

Тогда в уравнениях (3.18), (3.19), используя выражение (3.26), слагаемые с давлением запишем в следующем виде:

$$\int_0^h \frac{\partial p}{\partial x} dz = g\bar{\rho}h \frac{\partial h}{\partial x} = \frac{a^2 g}{l} \frac{\partial l}{\partial x}, \quad (3.31)$$

Аналогично преобразуем слагаемое с давлением в уравнении (3.19), при этом

$$a^2 = \frac{l}{\rho h} \left(l \frac{g}{ph} + 1 \right)^{-1/\gamma} \quad (3.32)$$

Подставляя в уравнения (3.17), (3.18), (3.19), (3.20), (3.21), (3.22) средние значения $\bar{\rho}, \bar{p}, \bar{v}_i, \bar{B}_i$ и пренебрегая интегралами от произведений флуктуаций, получим усредненную по высоте слоя систему уравнений (Рис. ??):

$$\frac{\partial l}{\partial t} + \frac{\partial lu_x}{\partial x} + \frac{\partial lu_y}{\partial y} = 0 \quad (3.33)$$

$$\frac{\partial lu_x}{\partial t} + \frac{\partial (lu_x^2 - lB_x^2)}{\partial x} + \frac{\partial (lu_x u_y - lB_x B_y)}{\partial y} + a^2 g \frac{\partial l}{\partial x} + B_0 B_x - fl u_y = 0 \quad (3.34)$$

$$\frac{\partial lu_y}{\partial t} + \frac{\partial (lu_x u_y - lB_x B_y)}{\partial x} + \frac{\partial (lu_y^2 - lB_y^2)}{\partial y} + a^2 g \frac{\partial l}{\partial y} + B_0 B_y + fl u_x = 0 \quad (3.35)$$

$$\frac{\partial lB_x}{\partial t} + \frac{\partial (lu_y B_x - lu_x B_y)}{\partial y} - B_0 u_x = 0 \quad (3.36)$$

$$\frac{\partial lB_y}{\partial t} + \frac{\partial (lu_x B_y - lu_y B_x)}{\partial x} - B_0 u_y = 0 \quad (3.37)$$

$$\frac{\partial B_z}{\partial t} + B_0 \frac{\partial u_x}{\partial x} + B_0 \frac{\partial u_y}{\partial y} = 0 \quad (3.38)$$

$$\frac{\partial l B_x}{\partial x} + \frac{\partial l B_y}{\partial y} + B_z = 0 \quad (3.39)$$

Сформулированная здесь система является естественным обобщением магнитогидродинамических уравнений мелкой воды, полученных в работах [24], [43]. Уравнение (3.33) - следствие закона сохранения массы. Уравнения (3.34), (3.35) получены интегрированием уравнений изменения импульса, а уравнения (3.36), (3.37) получены интегрированием из закона изменения магнитного поля, причем вследствие наличия вертикального магнитного поля B'_0 в граничных условиях, эти уравнения содержат новые слагаемые по сравнению с [43]. Новое уравнение (3.38) на вертикальную составляющую магнитного поля B_z получено интегрированием уравнения для вертикального магнитного поля в трехмерной системе. При задании корректных начальных условий уравнение (3.39), получаемое из условия бездивергентности магнитного поля в трехмерной системе, выполняется тождественно как следствие из уравнений (3.36)-(3.38).

Система уравнений (3.33)-(3.39) записана относительно u_x, u_y - усредненных по высоте слоя горизонтальных скоростей трехмерного течения, B_x, B_y - средних по высоте горизонтальных магнитных полей, средней по высоте вертикальной составляющей магнитного поля B'_z , умноженной на плотность на нижней границе $\bar{\rho}$, $B_z = B'_z \bar{\rho}$ и переменной l , аналогичной высоте слоя для несжимаемой плазмы. Переменная l явным образом связана с высотой слоя h в соответствии с (3.30).

Система уравнений (3.33)-(3.39) записана для слоя плазмы во внешнем вертикальном магнитном поле, что приводит к существенным изменениям в структуре уравнений. Магнитное поле становится принципиально трехкомпонентным, причем вертикальная компонента магнитного поля зависит только от горизонтальных координат и времени, и ее изменение описывается уравнением (3.38). Уравнение для вертикальной составляющей магнитного поля отделяется от полной системы, поэтому для дальнейшего исследования волновых процессов в сжимаемых магнитогидродинамических течениях в приближении мелкой воды мы будем решать замкнутую систему (3.33)-(3.37). В отсутствие внешнего вертикального магнитного поля система переходит в уравнения сжимаемой магнитной гидродинамики в приближении мелкой воды, полученные в [43]. Величина H_ρ определяется в (3.16) и характеризует масштаб высоты, на котором

становятся существенными изменения плотности. Если характерная высота h слоя много меньше характерной высоты H_ρ , то $\varepsilon = h/H_\rho \rightarrow 0$ и данное течение можно считать несжимаемым. При этом система уравнений мелкой воды для сжимаемой плазмы (3.33)-(3.39) переходит в классические магнитогидродинамические уравнения вращающейся мелкой воды для несжимаемой плазмы.

Система уравнений (3.33)-(3.38) существенно отличается от классических магнитогидродинамических уравнений для несжимаемых течений. В классических магнитогидродинамических уравнениях мелкой воды высота, скорость и магнитное поле столба жидкости полностью определяют его взаимодействие с остальным объемом жидкости. В уравнениях (3.33)-(3.38) это взаимодействие определяется не только высотой, скоростью и магнитным полем, но и средней плотностью столба жидкости, поэтому учет горизонтального импульса в уравнениях происходит более точно. Как следствие, в полученных в работе уравнениях появляется новая переменная, определяющая закон сохранения массы и однозначно связанная с высотой свободной поверхности. Таким образом, при наличии эффектов крупномасштабной сжимаемости, закон сохранения массы формулируется для переменной, нетривиально зависящей от характерного вертикального масштаба течения и масштаба высот, на котором вариация плотности становится существенной. Кроме того, учет крупномасштабной сжимаемости существенно модернизирует уравнения изменения импульса.

3.3 Волны магнито-Пуанкаре в сжимаемых магнитогидродинамических течениях в приближении мелкой воды

3.3.1 Линейная теория и качественный анализ волн магнито-Пуанкаре

Будем искать решение в виде линейных волн в магнитогидродинамике в приближении мелкой воды во внешнем вертикальном магнитном поле при учете крупномасштабной сжимаемости. Система уравнений (??)-(??) имеет точное стационарное решение $l = l_0 = const, u_x = u_y = B_x = B_y = 0$. Для нахождения решений в виде плоских волн, линеаризуем систему (??)-(??) относительно

этого стационарного состояния:

$$\frac{\partial l}{\partial t} + l_0 \frac{\partial u_x}{\partial x} + l_0 \frac{\partial u_y}{\partial y} = 0 \quad (3.40)$$

$$l_0 \frac{\partial u_x}{\partial t} + a_0^2 g \frac{\partial l}{\partial x} + B_0 B_x - f l_0 u_y = 0 \quad (3.41)$$

$$l_0 \frac{\partial u_y}{\partial t} + a_0^2 g \frac{\partial l}{\partial y} + B_0 B_y + f l_0 u_x = 0 \quad (3.42)$$

$$l_0 \frac{\partial B_x}{\partial t} - B_0 u_x = 0 \quad (3.43)$$

$$l_0 \frac{\partial B_y}{\partial t} - B_0 u_y = 0 \quad (3.44)$$

В системе (3.40)-(3.44) $a_0^2 = a^2(l_0)$. Будем искать решение линеаризованной системы в виде плоской волны:

$$\mathbf{w} = \mathbf{w}_1 \exp [i (-i\omega t + ik_x x + ik_y y)] \quad (3.45)$$

где ω - частота, $\mathbf{k} (k_x, k_y)$ - волновой вектор волны. После подстановки решения (3.45) в систему (3.40)-(3.44) получим систему линейных уравнений:

$$\begin{pmatrix} -\omega & k_x l_0 & k_y l_0 & 0 & 0 \\ -k_x a_0^2 g & \omega l_0 & -i f l_0 & B_0 & 0 \\ -k_y a_0^2 g & i f l_0 & \omega l_0 & 0 & B_0 \\ 0 & -B_0 & 0 & \omega l_0 & 0 \\ 0 & 0 & -B_0 & 0 & \omega l_0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} l_1 \\ u_{x1} \\ u_{y1} \\ B_{x1} \\ B_{y1} \end{pmatrix} = 0 \quad (3.46)$$

Система (3.46) имеет нетривиальные решения только если определитель матрицы равен нулю. Условие равенства нулю определителя приводит к дисперсионному соотношению, описывающему волны, эквивалентные волнам магнито-Пуанкаре и магнито-строфическим волнам в несжимаемой плазме:

$$\omega^4 - \omega^2 \left(2 \left(\frac{B_0}{l_0} \right)^2 + f^2 + k^2 a_0^2 g \right) + \left(k^2 a_0^2 g \left(\frac{B_0}{l_0} \right)^2 + \left(\frac{B_0}{l_0} \right)^4 \right) = 0 \quad (3.47)$$

Решая уравнение (3.47), получим:

$$\omega^2 = \frac{a_0^2 g k^2}{2} + \frac{f^2}{2} + \left(\frac{B_0}{l_0} \right)^2 + \frac{1}{2} \sqrt{a_0^4 g^2 k^4 + 2 f^2 a_0^2 g k^2 + f^4 + 4 f^2 \left(\frac{B_0}{l_0} \right)^2} \quad (3.48)$$

$$\omega^2 = \frac{a_0^2 g k^2}{2} + \frac{f^2}{2} + \left(\frac{B_0}{l_0} \right)^2 - \frac{1}{2} \sqrt{a_0^4 g^2 k^4 + 2 f^2 a_0^2 g k^2 + f^4 + 4 f^2 \left(\frac{B_0}{l_0} \right)^2} \quad (3.49)$$

Дисперсионное соотношение (3.48) описывает волны магнито-Пуанкаре в сжимаемой плазме, которые являются аналогом волн Пуанкаре для нейтрального слоя. Дисперсионное соотношение (3.49) не имеет аналога в нейтральной среде и описывает магнитострофические волны в сжимаемой плазме. Заметим, что при условии малости высоты слоя по сравнению с характерной высотой H_ρ , на которой проявляется сжимаемость, переменная l_0 переходит в высоту слоя h_0 и дисперсионные соотношения переходят в аналогичные соотношения для несжимаемой плазмы [4]. Общий вид дисперсионных кривых представлен на рисунке (Рис. ??).

Сравнивая дисперсионные соотношения для волн магнито-Пуанкаре и магнитострофических волн в сжимаемой среде (3.48) и (3.49) с несжимаемым случаем [4], заметим, что дисперсионные соотношения совпадают за тем исключением, что слагаемое с внешним магнитным полем $(B_0/h_0)^2$ переходит в $(B_0/l_0)^2$, а также выражение для квадрата скорости слабых возмущений gh изменяется на $a_0^2 g$, что в общем случае приводит к изменению групповой скорости волн магнито-Пуанкаре и магнитострофических волн. Сжимаемость приводит к изменению кривизны дисперсионных поверхностей, при этом их общая форма остается аналогичной случаю несжимаемой плазмы [24].

Таким образом, так же, как и в несжимаемом случае [24], для того чтобы три волны испытывали взаимодействия, необходимо, чтобы сумма частот двух волн была равна частоте третьей волны и одновременно сумма волновых векторов этих волн была равна волновому вектору третьей волны, то есть, чтобы три волны удовлетворяли условию синхронизма [27]:

$$\mathbf{k}_1 + \mathbf{k}_2 = \mathbf{k}_3 \quad \omega(\mathbf{k}_1) + \omega(\mathbf{k}_2) = \omega(\mathbf{k}_3) \quad (3.50)$$

где \mathbf{k}_1 , \mathbf{k}_2 , \mathbf{k}_3 - волновые векторы взаимодействующих волн, а $\omega(\mathbf{k})$ - дисперсионное соотношение для соответствующей взаимодействующей волны. Для качественного анализа возможности трехволновых взаимодействий, изобразим условия (3.50) для трех магнито-Пуанкаре волн в сжимаемой плазме на графике (Рис. ??), представляющем собой проекцию дисперсионных поверхностей на плоскость (ω, k_x) . Первое слагаемое задает точку $(\mathbf{k}_1, \omega(\mathbf{k}_1))$ дисперсионной поверхности одной волны магнито-Пуанкаре, второе слагаемое - точку $(\mathbf{k}_2, \omega(\mathbf{k}_2))$ на смещенной на $(\mathbf{k}_1, \omega(\mathbf{k}_1))$ дисперсионной поверхности волны

магнито-Пуанкаре, тогда наличие пересечения смещенной и начальной дисперсионных поверхностей означает, что найдется волна с волновым вектором \mathbf{k}_3 и частотой $\omega_3 = \omega(\mathbf{k}_3)$ такая, что три найденные волны удовлетворяет условию синхронизма (3.50). Таким образом показано, что существуют трехволновые взаимодействия трех магнито-Пуанкаре волн.

Аналогично на графиках (Рис. ??), (Рис. ??), (Рис. ??) показано, что в тонком вращающемся слое сжимаемой плазмы со свободной поверхностью во внешнем вертикальном магнитом поле возможно существование трехволновых взаимодействий для, соответственно, двух волн магнито-Пуанкаре и одной магнитострофической волны, двух магнитострофических волн и одной волны магнито-Пуанкаре, трех магнитострофических волн. Качественный анализ дисперсионных соотношений показал, что при наличии крупномасштабной сжимаемости в тонком слое вращающейся плазмы существуют те же трехволновые взаимодействия, что и в несжимаемом случае, и, в приближении малости высоты, на которой проявляется сжимаемость, по сравнению с высотой слоя, описание трехволновых взаимодействий переходит в случай несжимаемой плазмы [4].

3.3.2 Трехволновые уравнения и параметрические неустойчивости

Рассмотрим решение исходной системы уравнений на f -плоскости (3.33)-(3.37) в виде трех волн магнито-Пуанкаре и магнитострофических волн, удовлетворяющих условию синхронизма (3.50). Используя метод многомасштабных разложений, мы получим нелинейную систему уравнений на амплитуды взаимодействующих волн в виде:

$$\left(\frac{\partial}{\partial T} + P^1 \frac{\partial}{\partial X} + Q^1 \frac{\partial}{\partial Y}\right)\phi = F_f^1 \psi^* \chi \quad (3.51)$$

$$\left(\frac{\partial}{\partial T} + P^2 \frac{\partial}{\partial X} + Q^2 \frac{\partial}{\partial Y}\right)\psi = F_f^2 \phi^* \chi \quad (3.52)$$

$$\left(\frac{\partial}{\partial T} + P^3 \frac{\partial}{\partial X} + Q^3 \frac{\partial}{\partial Y}\right)\chi = F_f^3 \phi \psi \quad (3.53)$$

в которой коэффициенты взаимодействия F^i и коэффициенты P^i, Q^i перед производными $\partial/\partial X, \partial/\partial Y$ имеют следующий вид:

$$F^i = F_f^i = \frac{\mathbf{z}^i}{l_0 (\mathbf{z}^i \mathbf{w}^i)} \times \begin{pmatrix} ik_{ix} l_0 \xi_{12}^{jk} + ik_{iy} l_0 \xi_{13}^{jk} \\ -i\omega_i \xi_{12}^{jk} + ik_{ix} l_0 (S \xi_{11}^{jk} + \xi_{22}^{jk} - \xi_{44}^{jk}) + ik_{iy} l_0 (\xi_{23}^{jk} - \xi_{45}^{jk}) - f \xi_{13}^{kj} \\ -i\omega_i \xi_{13}^{jk} + ik_{ix} l_0 (\xi_{23}^{jk} - \xi_{45}^{jk}) + ik_{iy} l_0 (S \xi_{11}^{jk} + \xi_{33}^{jk} - \xi_{55}^{jk}) + f \xi_{12}^{kj} \\ -i\omega_i \xi_{14}^{jk} + ik_{iy} l_0 (\xi_{34}^{jk} - \xi_{25}^{jk}) \\ -i\omega_i \xi_{15}^{jk} + ik_{ix} l_0 (\xi_{25}^{jk} - \xi_{34}^{jk}) \end{pmatrix} \quad (3.54)$$

$$P^i = P_f^i = \left(l_0 z_1^i w_2^i + \frac{a_0^2 g}{l_0} z_2^i w_1^i \right) / (\mathbf{z}^i \mathbf{w}^i) \quad (3.55)$$

$$Q^i = Q_f^i = \left(l_0 z_1^i w_3^i + \frac{a_0^2 g}{l_0} z_3^i w_1^i \right) / (\mathbf{z}^i \mathbf{w}^i) \quad (3.56)$$

В выражении (3.54) для коэффициентов F_f^i

$$\xi_{mn}^{jk} = \begin{cases} w_m^2 w_n^3 + w_n^2 w_m^3, & i = 1 \\ w_m^1 w_n^{*3} + w_n^1 w_m^{*3}, & i = 2 \\ w_m^1 w_n^{*2} + w_n^1 w_m^{*2}, & i = 3 \end{cases} \quad (3.57)$$

$$S = \frac{a_0^2 g}{2l_0^2} \left(1 - \frac{gl_0}{\gamma (gl_0 + p_h)} \right) \quad (3.58)$$

Полученная нелинейная система уравнений описывает зависимость амплитуд взаимодействующих волн от "медленных" аргументов T, X, Y . Система уравнений (3.51)-(3.53) получена для волн магнито-Пуанкаре и магнитострофических волн в сжимаемой магнитогидродинамике во внешнем вертикальном магнитном поле в приближении мелкой воды. Аналогично этому случаю из системы уравнений в приближении мелкой воды с учетом сжимаемости на β -плоскости получаются системы уравнений для взаимодействующих волн магнито-Росби во внешнем вертикальном магнитном поле B_0 и волн магнито-Росби, распространяющихся на фоне постоянного горизонтального магнитного поля B^0 .

Учет крупномасштабной сжимаемости в рассматриваемых течениях существенно изменяет коэффициенты в трехволновых уравнениях для взаимодействующих волн магнито-Пуанкаре и магнитострофических волн малой амплитуды. Новые коэффициенты записаны через величину l_0 , включающую в себя зависимость от высоты H_ρ , на которой проявляются эффекты статической

сжимаемости. В выражения для коэффициентов (3.54)-(3.56) также входит модифицированное выражение для квадрата скорости малых возмущений в случае сжимаемой среды $a_0^2 g$. Кроме того, в коэффициенте при выражении для квадрата скорости малых возмущений появляется множитель $\left(1 - \frac{gl_0}{\gamma(gl_0 + p_h)}\right)$, уменьшающий величину коэффициента взаимодействия F_f^i . В случае, когда эффектами сжимаемости можно пренебречь, система уравнений на амплитуды взаимодействующих волн на f -плоскости (3.51)-(3.53) полностью переходит в систему уравнений, полученную для случая несжимаемой плазмы.

Используем полученную систему (3.51)-(3.53), (3.54)-(3.56) для качественного анализа параметрических неустойчивостей взаимодействующих волн. Рассмотрим случай, когда амплитуда одной из трех взаимодействующих волн в начальный момент много больше амплитуд двух других волн $\varphi \gg \psi, \chi$. Тогда амплитуду первой волны можно приближенно считать постоянной $\varphi = \varphi_0$, при этом обратным влиянием волн с амплитудами ψ и χ на волну накачки с амплитудой φ можно пренебречь. В этом случае система (3.51), (3.52), (3.53) принимает вид:

$$\frac{\partial \psi}{\partial T} + P_f^2 \frac{\partial \psi}{\partial X} + Q_f^2 \frac{\partial \psi}{\partial Y} = F_f^2 \varphi_0 \chi \quad (3.59)$$

$$\frac{\partial \chi}{\partial T} + D_f^3 \frac{\partial \chi}{\partial X} + E_f^3 \frac{\partial \chi}{\partial Y} = F_f^3 \varphi_0 \psi \quad (3.60)$$

Решение полученной линейной системы уравнений есть:

$$\begin{pmatrix} \psi \\ \chi \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \psi' \\ \chi' \end{pmatrix} \exp(\Gamma T) \quad (3.61)$$

где инкремент:

$$\Gamma = \sqrt{|F_f^2 F_f^3|} \varphi_0 \quad (3.62)$$

Величины F_f^2 и F_f^3 определены в (3.54). Изменение коэффициентов взаимодействия в амплитудных уравнениях вследствие учета крупномасштабной сжимаемости приводит к изменению величины инкремента параметрической неустойчивости 3.62. Решение в случае малости высоты слоя h по сравнению с характерной высотой H_ρ , на которой проявляются эффекты сжимаемости, переходит в решение для несжимаемого случая [23].

Возможны два сценария развития неустойчивости, когда амплитуды растущих волн становятся сравнимы с амплитудой волны накачки: взрывной рост

и насыщение неустойчивости. Рассмотренное выше приближение справедливо, пока амплитуда волны накачки φ_0 много больше амплитуды двух других магнито-Россби волн ψ, χ . Однако на определенной стадии процесса амплитуды растущих волн станут сравнимы с амплитудой φ_0 . В рассмотрении, таким образом, необходимо включить уравнение (3.51). При условии $Re(F_f^1) < 0$, амплитуда волны накачки φ , так же как и скорости роста амплитуд ψ и χ уменьшаются, что приводит к насыщению параметрической неустойчивости.

Таким образом, одна из взаимодействующих на f -плоскости волн с волновым вектором \mathbf{k}_1 и частотой $\omega_1 = \omega(\mathbf{k}_1)$ распадается на две магнито-Россби волны с волновыми векторами \mathbf{k}_2 и \mathbf{k}_3 и частотами ω_2 и ω_3 с инкрементом (3.62).

Рассмотрим теперь случай, когда амплитуда одной из взаимодействующих волн много меньше амплитуд двух других волн $\varphi \ll \psi, \chi$, так что можно считать амплитуды ψ и χ постоянными $\psi = \psi_0$ и $\chi = \chi_0$. Уравнение для амплитуды φ (3.51) принимает вид

$$\frac{\partial \varphi}{\partial T} + F_f^1 \frac{\partial \varphi}{\partial X} + Q_f^1 \frac{\partial \varphi}{\partial Y} = F_f^1 \psi_0 \chi_0 \quad (3.63)$$

Ищем решение уравнения (3.63) в виде:

$$\varphi = \varphi' \exp(\Gamma T_1) \quad (3.64)$$

Подставляя решение в этом виде, получаем выражение для коэффициента усиления:

$$\Gamma = |F_f^1| \psi_0 \chi_0 \quad (3.65)$$

где F_f^1 определен в (3.54). В рассмотренном сценарии развития неустойчивости две начальные волны сжимаемой магнитной гидродинамики в приближении мелкой воды на f -плоскости с волновыми векторами \mathbf{k}_1 и \mathbf{k}_2 и частотами $\omega_1 = \omega(\mathbf{k}_1)$ и $\omega_2 = \omega(\mathbf{k}_2)$ усиливают третью волну с волновым вектором $\mathbf{k}_3 = \mathbf{k}_1 + \mathbf{k}_2$ и частотой $\omega_3 = \omega_1 + \omega_2$ с коэффициентом усиления (3.65). Величина инкремента изменяется в соответствии с изменениями коэффициента взаимодействия F^i в амплитудных уравнениях (3.51)-(3.53) при учете сжимаемости. Выражение для инкремента (3.65) в случае малости высоты слоя h по сравнению с характерной высотой H_ρ , на которой проявляются эффекты сжимаемости, переходит в решение для несжимаемого случая.

3.4 Волны магнито-Россби в сжимаемых течениях в приближении мелкой воды

3.4.1 Линейная теория и качественный анализ волн магнито-Россби

Для описания крупномасштабных волн магнито-Россби в сжимаемой плазме, основным механизмом образования которых является вариация параметра Кориолиса f в зависимости от широты θ , используем приближение β -плоскости. Для этого рассмотрим систему уравнений мелкой воды магнитной гидродинамики сжимаемой плазмы во внешнем вертикальном магнитном поле на β -плоскости, в которой в первом приближении учитывается сферичность тонкого слоя плазмы в декартовых координатах:

$$\frac{\partial l}{\partial t} + \frac{\partial l u_x}{\partial x} + \frac{\partial l u_y}{\partial y} = 0 \quad (3.66)$$

$$\begin{aligned} \frac{\partial^2 l u_x}{\partial t \partial y} + \frac{\partial^2 (l u_x^2 - l B_x^2)}{\partial x \partial y} + \frac{\partial^2 (l u_x u_y - l B_x B_y)}{\partial y^2} + a^2 g \frac{\partial^2 l}{\partial x \partial y} + g \frac{\partial a^2}{\partial y} \frac{\partial l}{\partial x} \\ + B_0 \frac{\partial B_x}{\partial y} - f \frac{\partial (l u_y)}{\partial y} - \beta l u_y = 0 \end{aligned} \quad (3.67)$$

$$\frac{\partial l u_y}{\partial t} + \frac{\partial (l u_x u_y - l B_x B_y)}{\partial x} + \frac{\partial (l u_y^2 - l B_y^2)}{\partial y} + a^2 g \frac{\partial l}{\partial y} + B_0 B_y + f l u_x = 0 \quad (3.68)$$

$$\frac{\partial l B_x}{\partial t} + \frac{\partial (l u_y B_x - l u_x B_y)}{\partial y} - B_0 u_x = 0 \quad (3.69)$$

$$\frac{\partial l B_y}{\partial t} + \frac{\partial (l u_x B_y - l u_y B_x)}{\partial x} - B_0 u_y = 0 \quad (3.70)$$

$$\frac{\partial B_z}{\partial t} + B_0 \frac{\partial u_x}{\partial x} + B_0 \frac{\partial u_y}{\partial y} = 0 \quad (3.71)$$

$$\frac{\partial l B_x}{\partial x} + \frac{\partial l B_y}{\partial y} + B_z = 0 \quad (3.72)$$

Система (3.66)-(3.72) на β -плоскости также имеет нетривиальное стационарное решение в виде слоя постоянной толщины $l = l_0$, $u_x = u_y = 0$, $B_x = B_y = 0$. Аналогично случаю системы на f -плоскости, линеаризуем уравнения на β -плоскости относительно стационарного состояния и найдем решение линеаризованной системы в виде плоских волн. Дисперсионное соотношение в этом случае примет следующий вид:

$$\omega^4 - \omega^2 \left(2 \left(\frac{B_0}{l_0} \right)^2 + f_0^2 + k^2 a_0^2 g \right) - \omega k_x a_0^2 g \beta + \left(k^2 a_0^2 g \left(\frac{B_0}{l_0} \right)^2 + \left(\frac{B_0}{l_0} \right)^4 \right) = 0 \quad (3.73)$$

Дисперсионное соотношение (3.73) описывает волны в сжимаемой магнитной гидродинамике на β -плоскости во внешнем вертикальном магнитном поле. В высокочастотном приближении дисперсионное соотношение (3.73) описывает волны, аналогичные волнам магнито-Пуанкаре в сжимаемой плазме: (3.48):

$$\omega^2 = 2 \left(\frac{B_0}{l_0} \right)^2 + f_0^2 + k^2 a_0^2 g \quad (3.74)$$

В низкочастотном приближении полученное дисперсионное соотношение описывает крупномасштабные волны Россби, для которых (3.73) принимает вид:

$$\omega = \frac{(B_0/l_0)^2 (k^2 a_0^2 g + (B_0/l_0)^2)}{a_0^2 g k_x \beta} \quad (3.75)$$

Заметим, что в интервале между высокочастотными решениями дисперсионного уравнения в виде мод магнито-Пуанкаре и низкочастотными решениями для медленных волн магнито-Россби (3.75), дисперсионное соотношение допускает моды быстрых магнито-Россби волн в сжимаемой плазме, аналогичных рассмотренным в [1] в несжимаемом случае. Соотношение (3.75) описывает волны магнито-Россби в приближении мелкой воды, распространяющиеся вдоль направления k_x . Основной механизм их образования заключается в сдвиге вращающегося потока вследствие того, что сила Кориолиса изменяется в зависимости от широты. Общий вид дисперсионных кривых представлен на рисунке (рис. ??).

Из (3.73) учет крупномасштабной сжимаемости в магнитогидродинамических уравнениях мелкой воды приводит к изменению дисперсионного соотношения в линейной теории. Как и в случае волн на f -плоскости, сохраняется общий вид дисперсионных кривых, при этом коэффициенты в дисперсионном соотношении модернизируются: вместо выражения для квадрата скорости малых возмущений в несжимаемом слое gh появляется выражение $a_0^2 g$ (3.32), а также коэффициент, связанный с внешним вертикальным магнитным полем, изменяется на B_0/l_0 по сравнению с несжимаемым случаем [46]. Таким образом, сжимаемость приводит к изменению групповой скорости волн магнито-Россби. В пределе несжимаемой плазмы ($h \ll H_\rho$) дисперсионное соотношение полностью переходит в известное соотношение для несжимаемого случая.

На рисунке (рис. ??) для трех волн магнито-Россби в тонком слое сжимаемой плазмы во внешнем вертикальном магнитном поле показано, что дисперсион-

ная поверхность $\omega(\mathbf{k})$ пересекает такую же поверхность, смещенную от начала координат на $(\mathbf{k}_1, \omega(\mathbf{k}_1))$, а значит найдутся такие три волны магнито-Россби, что для них будут выполнены условия синхронизма. Таким образом, изменения в форме дисперсионных поверхностей в сжимаемой плазме оставляют возможность трехволновых взаимодействий между волнами магнито-Россби во внешнем вертикальном магнитном поле B'_0 , как и в случае несжимаемой плазмы [46].

Рассмотрим теперь систему уравнений на β -плоскости (3.66)-(3.72) в случае отсутствия внешнего магнитного поля $B'_0 = 0$. Тогда новая система имеет точное стационарное решение $l = l_0 = \text{const}$, $u_x = u_y = 0$, $B_x = B_x^0 = \text{const}$, $B_y = B_y^0 = \text{const}$, соответствующее присутствию горизонтального магнитного поля \mathbf{B}^0 . Линеаризуя систему относительно этого стационарного состояния, получим:

$$\partial_t l + l_0 \partial_x u_x + l_0 \partial_y u_y = 0 \quad (3.76)$$

$$l_0 \partial_y \partial_t u_x - B_x^0 l_0 \partial_y \partial_x B_x - B_y^0 l_0 \partial_y^2 B_x + a_0^2 g \partial_y \partial_x l - f_0 l_0 \partial_y u_y - \beta l_0 u_y = 0 \quad (3.77)$$

$$l_0 \partial_t u_y - B_x^0 l_0 \partial_x B_y - B_y^0 l_0 \partial_y B_y + a_0^2 g \partial_y l + f_0 l_0 u_x = 0 \quad (3.78)$$

$$l_0 \partial_t B_x - l_0 B_x^0 \partial_x u_x - l_0 B_y^0 \partial_y u_x = 0 \quad (3.79)$$

$$l_0 \partial_t B_y - l_0 B_y^0 \partial_y u_y - l_0 B_x^0 \partial_x u_y = 0 \quad (3.80)$$

Решение линеаризованной системы (3.76)-(3.80) будем искать в виде плоской волны малой амплитуды. Тогда получившаяся система линейных уравнений будет иметь нетривиальные решения в виде плоских волн, для которых выполняется следующее дисперсионное соотношение:

$$\omega^4 - \omega^2 \left(2(k, B^0)^2 + f_0^2 + k^2 a_0^2 g \right) - \omega k_x a_0^2 g \beta + \left(k^2 a_0^2 g (k, B^0)^2 + (k, B^0)^4 \right) = 0 \quad (3.81)$$

Аналогично случаю с внешним вертикальным магнитным полем, в низкочастотном приближении полученное дисперсионное соотношение описывает крупномасштабные волны Россби, для которых (3.81) принимает вид:

$$\omega = \frac{(k, B^0) (k^2 a_0^2 g + (k, B^0))}{a_0^2 g k_x \beta} \quad (3.82)$$

Соотношение (3.82) описывает волны Россби магнитной гидродинамики в горизонтальном магнитном поле в приближении мелкой воды, распространяющиеся вдоль направления k_x . Общий вид дисперсионных кривых представлен на (Рис.

Таким образом, учет сжимаемости в линейной теории для волн магнито-Россби в горизонтальном магнитном поле приводит к новому выражению для квадрата скорости малых возмущений $a_0^2 g$, при этом не меняется общий вид дисперсионного соотношения. Сжимаемость приводит к изменению групповой скорости волн магнито-Россби в горизонтальном магнитном поле. Отметим также, что вместо переменной h в соотношение (3.82) входит новая переменная l , в которую входит зависимость от средней плотности столба плазмы $\bar{\rho}$. В приближении несжимаемой плазмы $h \ll H_\rho$ дисперсионное соотношение переходит в известное соотношение [46].

Качественный анализ дисперсионных кривых для случая взаимодействия трех магнито-Россби волн в горизонтальном магнитном поле (Рис. ??) показывает наличие трехволновых взаимодействий, несмотря на отличия в кривизне дисперсионных поверхностей. Таким образом, аналогично случаю несжимаемой плазмы, рассмотренному в [46], в горизонтальном магнитном поле найдутся три волны магнито-Россби, такие что условие синхронизма (3.50) выполняется.

3.4.2 Трехволновые уравнения и параметрические неустойчивости

Рассмотрим три волны магнито-Россби, распространяющиеся в тонком вращающемся слое сжимаемой плазмы во внешнем вертикальном магнитном поле B_0 , которые удовлетворяют условию синхронизма (3.50). Взаимодействия таких волн описываются системой нелинейных уравнений, которая в общем виде записывается как (3.51)-(3.53). Приведем выражения для коэффициентов взаимодействия F^i и для коэффициентов $P^i Q^i$ при производных $\frac{\partial}{\partial X}$ и $\frac{\partial}{\partial Y}$ в системе (3.51-3.53):

$$F^i = F_{\beta v}^i = \frac{\mathbf{z}^i}{(\mathbf{z}^i \mathbf{w}^i)} \times \begin{pmatrix} ik_{ix}\xi_{12}^{jk} + ik_{iy}\xi_{13}^{jk} \\ -\frac{i\omega_3}{l_0}\xi_{12}^{jk} + ik_{ix}\left(S\xi_{11}^{jk} + \xi_{22}^{jk} - \xi_{44}^{jk}\right) + ik_{iy}\left(\xi_{23}^{jk} - \xi_{45}^{jk}\right) - \left(\frac{f_0}{l_0} - \frac{i\beta}{k_{iy}l_0}\right)\xi_{13}^{jk} \\ -\frac{i\omega_3}{l_0}\xi_{13}^{jk} + ik_{ix}\left(\xi_{23}^{jk} - \xi_{45}^{jk}\right) + ik_{iy}\left(S\xi_{11}^{jk} + \xi_{33}^{jk} - \xi_{55}^{jk}\right) + \frac{f_0}{l_0}\xi_{13}^{jk} \\ -\frac{i\omega_3}{l_0}\xi_{14}^{jk} + ik_{iy}\left(\xi_{34}^{jk} - \xi_{25}^{jk}\right) \\ -\frac{i\omega_3}{l_0}\xi_{15}^{jk} + ik_{ix}\left(\xi_{25}^{jk} - \xi_{34}^{jk}\right) \end{pmatrix} \quad (3.83)$$

$$P^i = P_{\beta v}^i = \left(l_0 z_1^i w_2^i + \frac{a_0^2 g}{l_0} z_2^i w_1^i \right) / (\mathbf{z}^i \mathbf{w}^i) \quad (3.84)$$

$$Q^i = Q_{\beta v}^i = \left(l_0 z_1^i w_3^i - \frac{\omega_i}{k_{iy}} z_2^i w_2^i + \frac{k_{ix}}{k_{iy}} \frac{a_0^2 g}{l_0} z_2^i w_1^i - \right. \\ \left. - i \frac{1}{k_{iy}} \frac{B_0}{l_0} z_2^i w_4^i + i \frac{f_0}{k_{iy}} z_2^i w_3^i + \frac{a_0^2 g}{l_0} z_3^i w_1^i \right) / (\mathbf{z}^i \mathbf{w}^i) \quad (3.85)$$

В выражении (3.91) для коэффициентов $F_{\beta h}^i$ величины S и ξ_{mn}^{jk} определяются в (3.58) и (3.57).

Отличие от несжимаемого случая, таким образом, состоит в наличии множителя $\left(1 - \frac{gl_0}{\gamma(gl_0 + ph)}\right)$ при модифицированном выражении для квадрата скорости малых возмущений $a_0^2 g$, а также зависимостью коэффициента от новой переменной l_0 , в которую входит зависимость от величины крупномасштабной сжимаемости $h_0/H\rho$. Как и на f -плоскости, выражения для коэффициентов взаимодействия в приближении β -плоскости в вертикальном магнитном поле переходят в известные выражения для коэффициентов, полученных для несжимаемой плазмы [46].

Исследуем полученную нелинейную систему для качественного анализа параметрических неустойчивостей волн магнито-Россби во внешнем вертикальном магнитном поле. Рассмотрим случай, когда амплитуда одной из трех взаимодействующих волн в начальный момент много больше амплитуд двух других волн $\varphi \gg \psi, \chi$. Тогда амплитуду первой волны можно приближенно считать постоянной $\varphi = \varphi_0$, при этом обратным влиянием волн с амплитудами ψ и χ на волну накачки с амплитудой φ можно пренебречь. В этом случае система (3.51), (3.52), (3.53) принимает вид:

$$\frac{\partial \psi}{\partial T} + P_{\beta v}^2 \frac{\partial \psi}{\partial X} + Q_{\beta v}^2 \frac{\partial \psi}{\partial Y} = F_{\beta v}^2 \varphi_0 \chi \quad (3.86)$$

$$\frac{\partial \chi}{\partial T} + D_{\beta v}^3 \frac{\partial \chi}{\partial X} + E_{\beta v}^3 \frac{\partial \chi}{\partial Y} = F_{\beta v}^3 \varphi_0 \psi \quad (3.87)$$

Решение полученной линейной системы дифференциальных уравнений представляет собой экспоненциальный рост амплитуд ψ и χ взаимодействующих магнито-Россби волн с инкрементом

$$\Gamma = \sqrt{|F_{\beta v}^2 F_{\beta v}^3|} \varphi_0 \quad (3.88)$$

Таким образом, в тонком слое сжимаемой плазмы во внешнем вертикальном магнитном поле магнито-Россби волна с волновым вектором \mathbf{k}_1 и частотой $\omega_1 = \omega(\mathbf{k}_1)$ распадается на две магнито-Россби волны с волновыми векторами \mathbf{k}_2 и \mathbf{k}_3 и частотами ω_2 и ω_3 с инкрементом (3.88). Учет сжимаемости приводит к изменению величины инкремента вследствие изменения величины коэффициентов взаимодействия $F_{\beta v}^i$. В приближении $h \ll H_\rho$ выражение для инкремента неустойчивости (3.88) полностью переходит в выражение для коэффициента взаимодействия волн магнито-Россби во внешнем вертикальном магнитном поле в несжимаемой плазме [46].

Аналогично волнам на f -плоскости здесь также возможны два сценария развития неустойчивости, когда амплитуды растущих волн становятся сравнимы с амплитудой волны накачки: взрывной рост и насыщение неустойчивости. Рассмотренное выше приближение справедливо, пока амплитуда волны накачки φ_0 много больше амплитуды двух других магнито-Россби волн ψ , χ . Однако на определенной стадии процесса амплитуды растущих волн станут сравнимы с амплитудой φ_0 . В рассмотрение, таким образом, необходимо включить уравнение (3.51). При условии $Re(F_{\beta v}^1) < 0$, амплитуда волны накачки φ , так же как и скорости роста амплитуд ψ и χ уменьшаются, что приводит к насыщению параметрической неустойчивости.

Рассмотрим теперь случай, когда амплитуда одной из взаимодействующих волн много меньше амплитуд двух других волн $\varphi \ll \psi, \chi$, так что можно считать амплитуды ψ и χ постоянными $\psi = \psi_0$ и $\chi = \chi_0$. Уравнение для амплитуды φ (3.51) принимает вид

$$\frac{\partial \varphi}{\partial T} + P_f^1 \frac{\partial \varphi}{\partial X} + Q_f^1 \frac{\partial \varphi}{\partial Y} = F_{\beta v}^1 \psi_0 \chi_0 \quad (3.89)$$

Решением полученного линейного неоднородного дифференциального уравнения будет экспоненциальный рост амплитуды φ первой магнито-Россби волны с коэффициентом усиления

$$\Gamma = |F_{\beta v}^1| \psi_0 \chi_0 \quad (3.90)$$

где $F_{\beta v}^1$ определен в (3.83).

В рассмотренном сценарии развития параметрической неустойчивости две начальные волны магнито-Россби сжимаемой магнитной гидродинамики с волновыми векторами \mathbf{k}_1 и \mathbf{k}_2 и частотами $\omega_1 = \omega(\mathbf{k}_1)$ и $\omega_2 = \omega(\mathbf{k}_2)$ усиливают

третью волну магнито-Россби с волновым вектором $\mathbf{k}_3 = \mathbf{k}_1 + \mathbf{k}_2$ и частотой $\omega_3 = \omega_1 + \omega_2$ с коэффициентом усиления (3.90). Сравнение выражения для инкрементов неустойчивостей трех магнито-Россби волн во внешнем вертикальном магнитном поле в случае несжимаемой и случае сжимаемой магнитной гидродинамики показывает, что отличие в выражениях для инкремента неустойчивости (3.90) определяется изменением величины коэффициентов взаимодействия F^i при учете сжимаемости. Таким образом, при условии малости высоты слоя h по сравнению с высотой, на которой проявляются эффекты сжимаемости H_ρ , полученное решение переходит в решение для несжимаемой плазмы, полученное в [46].

Выпишем коэффициенты взаимодействия в уравнениях трехволновых взаимодействий для волн магнито-Россби, распространяющихся в тонком вращающемся слое сжимаемой плазмы в горизонтальном магнитном поле. Трехволновые уравнения для волн, удовлетворяющих условию синхронизма (3.50) имеют вид (3.51)-(3.53), где коэффициенты F^i , P^i , Q^i :

$$F^i = F_{\beta h}^i = \frac{\mathbf{z}^i}{(\mathbf{z}^i \mathbf{w}^i)} \times \left(\begin{array}{l} -ik_{ix}\xi_{12}^{jk} - ik_{iy}\xi_{13}^{jk} \\ \frac{i\omega_i}{l_0}\xi_{12}^{jk} - ik_{ix}\left(S\xi_{11}^{jk} + \xi_{22}^{jk} - \xi_{44}^{jk}\right) - ik_{iy}\left(\xi_{23}^{jk} - \xi_{45}^{jk}\right) + i\frac{(\mathbf{k}_i \mathbf{B}^0)}{l_0}\xi_{14}^{jk} - \left(\frac{f_0}{l_0} + \frac{i\beta}{k_{iy}l_0}\right)\xi_{13}^{jk} \\ \frac{i\omega_i}{l_0}\xi_{13}^{jk} - ik_{ix}\left(\xi_{23}^{jk} - \xi_{45}^{jk}\right) - ik_{iy}\left(S\xi_{11}^{jk} + \xi_{33}^{jk} - \xi_{55}^{jk}\right) + i\frac{(\mathbf{k}_i \mathbf{B}^0)}{l_0}\xi_{15}^{jk} + \frac{f_0}{l_0}\xi_{12}^{jk} \\ \frac{i\omega_i}{l_0}\xi_{14}^{jk} - ik_{iy}\left(\xi_{34}^{jk} - \xi_{25}^{jk}\right) + i\frac{(\mathbf{k}_i \mathbf{B}^0)}{l_0}\xi_{12}^{jk} \\ \frac{i\omega_i}{l_0}\xi_{15}^{jk} - ik_{ix}\left(\xi_{25}^{jk} - \xi_{34}^{jk}\right) + i\frac{(\mathbf{k}_i \mathbf{B}^0)}{l_0}\xi_{13}^{jk} \end{array} \right) \quad (3.91)$$

$$P^i = P_{\beta h}^i = \left(l_0 z_1^i w_2^i - B_x^0 z_2^i w_4^i + \frac{a_0^2 g}{l_0} z_2^i w_1^i - B_x^0 z_3^i w_5^i - B_x^0 z_4^i w_2^i - B_x^0 z_5^i w_3^i \right) / (\mathbf{z}^i \mathbf{w}^i) \quad (3.92)$$

$$Q^i = Q_{\beta h}^i = \left(l_0 z_1^i w_3^i - \frac{\omega_i}{k_{iy}} z_2^i w_2^i - B_x^0 \frac{k_x}{k_y} z_2^i w_4^i - 2B_y^0 z_2^i w_4^i + \frac{a_0^2 g}{l_0} \frac{k_x}{k_y} z_2^i w_1^i - \frac{if_0}{k_y} z_2^i w_3^i - B_y^0 z_3^i w_5^i + \frac{a_0^2 g}{l_0} z_3^i w_1^i - B_y^0 z_4^i w_2^i - B_y^0 z_5^i w_3^i \right) / (\mathbf{z}^i \mathbf{w}^i) \quad (3.93)$$

В выражении (3.91) для коэффициентов $F_{\beta h}^i$ величины S и ξ_{mn}^{jk} определяются в (3.58) и (3.57).

Наличие сжимаемости в системе уравнений (3.66)-(3.72) приводит к изменению вида коэффициентов (3.91)-(3.93) системы нелинейных уравнений (3.51)-(3.53) на амплитуды взаимодействующих магнито-Россби волн в горизонтальном магнитном поле. В выражениях для коэффициентов появляется новая переменная l_0 , включающая в себя зависимость от степени крупномасштабной сжимаемости h_0/H_ρ (3.16), и выражение gh для квадрата скорости малых возмущений на изменяется величину a^2g , в которой учитывается эффект сжимаемости. Кроме того, в коэффициентах появляются множители $\left(1 - \frac{gl_0}{\gamma(gl_0 + p_h)}\right)$, стоящие при выражениях a^2g , изменяющие вид коэффициентов по сравнению с несжимаемым случаем [46]. В приближении $h \ll H_\rho$ система нелинейных уравнений переходит в систему для несжимаемой плазмы, полученную в [46].

В трехволновых взаимодействиях магнито-Россби волн в тонком слое плазмы в горизонтальном магнитном поле с учетом эффектов сжимаемости присутствуют аналогичные неустойчивости, как в случае взаимодействия волн магнито-Пуанкаре и магнито-Россби волн и волн магнито-Россби в вертикальном магнитном поле. В случае, если амплитуда одной из трех взаимодействующих магнито-Россби волн много больше амплитуды двух других магнито-Россби волн $\varphi \gg \psi, \chi$ и обратным воздействием в начальный момент можно пренебречь, считаем $\varphi = \varphi_0 = \text{const}$. Амплитуды ψ и χ волн магнито-Россби возрастают экспоненциально с инкрементом параметрической неустойчивости:

$$\Gamma = \sqrt{|F_{\beta h}^2 F_{\beta h}^3|} \varphi_0 \quad (3.94)$$

В рассмотренных начальных условиях волна магнито-Россби в горизонтальном магнитном поле с волновым вектором \mathbf{k}_3 и частотой ω_3 распадается на две волны магнито-Россби с волновыми векторами \mathbf{k}_1 и \mathbf{k}_2 и частотами соответственно ω_1 и ω_2 , удовлетворяющие условию синхронизма (3.50), амплитуды которых в начальный момент времени растут с инкрементом (3.94). Учет сжимаемости приводит к изменению величины инкремента параметрической неустойчивости (3.94) вследствие изменений в коэффициентах взаимодействия $F_{\beta h}^i$, что существенно влияет на динамику развития неустойчивости. При переходе к несжимаемой плазме ($h \ll H_\rho$), выражение для инкремента совпадает с полученным в [46].

Рассмотрим теперь случай, когда амплитуда одной из взаимодействующих

волн много меньше амплитуд двух других волн $\varphi \ll \psi, \chi$, так что можно считать амплитуды ψ и χ постоянными $\psi = \psi_0$ и $\chi = \chi_0$. Амплитуда первой волны магнито-Россби сжимаемой магнитной гидродинамики в горизонтальном магнитном поле φ в этом случае возрастает экспоненциально с коэффициентом усиления

$$\Gamma = |F_{\beta h}^1| \psi_0 \chi_0 \quad (3.95)$$

где $F_{\beta h}^1$ определен в (3.91). Таким образом, две волны магнито-Россби в горизонтальном магнитном поле с волновыми векторами \mathbf{k}_2 и \mathbf{k}_1 и частотами ω_1 и ω_2 усиливают третью волну магнито-Россби с волновым вектором $\mathbf{k}_3 = \mathbf{k}_1 + \mathbf{k}_2$ и частотой $\omega_3 = \omega_1 + \omega_2$ с коэффициентом усиления (3.95).

Учет крупномасштабной сжимаемости приводит к изменению величины инкремента (3.95), что приводит к изменениям в динамике развития неустойчивости. В случае, когда высота слоя много меньше характерной высоты, на которой проявляются эффекты сжимаемости, выражение (3.91) переходит в выражение для коэффициента взаимодействия в несжимаемом случае, откуда следует, что коэффициент параметрического усиления (3.95) переходит в аналогичный коэффициент для несжимаемой плазмы [46].

3.5 Автомодельные решения магнитогидродинамических уравнений мелкой воды при наличии крупномасштабной сжимаемости

В данном разделе рассмотрена система одномерных уравнений мелкой воды для сжимаемых магнитогидродинамических течений в отсутствие вращения, допускающая полное аналитическое рассмотрение сильно нелинейных простых волн. Решения получены в виде соотношений, позволяющих при заданных начальных условиях определить пространственно-временную область, занимаемую волной, а также значения искомых физических величин (h, u_1, u_2, B_1, B_2) в каждой точке волны.

Используя уравнение бездивергентности (3.39), запишем систему (3.33-3.37), переходя к одномерному течению и исключая слагаемые с внешним магнитным

полем, в виде, удобном для дальнейшего анализа:

$$\frac{\partial l}{\partial t} + \frac{\partial lu_1}{\partial x} = 0 \quad (3.96)$$

$$\frac{\partial lu_1}{\partial t} + (a^2g + B_1^2 - u_1^2) \frac{\partial l}{\partial x} + 2u_1 \frac{\partial lu_1}{\partial x} + lg \frac{\partial f_s}{\partial x} = 0 \quad (3.97)$$

$$\frac{\partial lu_2}{\partial t} + (B_1B_2 - u_1u_2) \frac{\partial l}{\partial x} + u_2 \frac{\partial lu_1}{\partial x} + u_1 \frac{\partial lu_2}{\partial x} - B_1 \frac{\partial lB_2}{\partial x} = 0 \quad (3.98)$$

$$\frac{\partial lB_1}{\partial t} = 0 \quad (3.99)$$

$$\frac{\partial lB_2}{\partial t} + (u_2B_1 - u_1B_2) \frac{\partial l}{\partial x} + B_2 \frac{\partial lu_1}{\partial x} - B_1 \frac{\partial lu_2}{\partial x} + u_1 \frac{\partial lB_2}{\partial x} = 0 \quad (3.100)$$

Для нахождения непрерывных автомодельных решений на ровной границе переписываем систему (3.96-3.100) в следующем виде:

$$\partial_t \begin{pmatrix} l \\ lu_1 \\ lu_2 \\ lB_1 \\ lB_2 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ a^2g + B_1^2 - u_1^2 & 2u_1 & 0 & 0 & 0 \\ B_1B_2 - u_1u_2 & u_2 & u_1 & 0 & -B_1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ u_2B_1 - u_1B_2 & B_2 & -B_1 & 0 & u_1 \end{pmatrix} \partial_x \begin{pmatrix} l \\ lu_1 \\ lu_2 \\ lB_1 \\ lB_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \quad (3.101)$$

Нелинейная система уравнений (3.101) в обозначениях $(lu_1, lu_2, lB_1, lB_2, l)$ является гиперболической системой уравнений, в которой квадрат скорости распространения слабых возмущений, a^2 , нетривиально зависит от переменной l согласно (3.32), в то время как в теории несжимаемой магнитогидродинамической мелкой воды скорость распространения слабых возмущений есть $\sqrt{gh + B_1^2}$. Таким образом, несмотря на формальное сходство гиперболических волн, пространственно-временная динамика течений сжимаемой магнитогидродинамической мелкой воды отличается существенным образом от соответствующих классических магнитогидродинамических уравнений мелкой воды, поэтому приведенный ниже анализ гиперболической структуры уравнений (3.101) представляет самостоятельный интерес. В этом разделе найдены частные непрерывные и разрывные решения системы (3.101) в виде простых волн.

Спроектируем систему уравнений (3.101) на линии вида $x = \lambda t$. Для этого введем новую переменную $\alpha = x/t$:

$$\frac{\partial}{\partial x} = \frac{d}{d\alpha} \frac{\partial \alpha}{\partial x} = \frac{1}{t} \frac{d}{d\alpha} \quad (3.102)$$

$$\frac{\partial}{\partial t} = \frac{d}{d\alpha} \frac{\partial \alpha}{\partial t} = \left(-\frac{x}{t^2}\right) \frac{d}{d\alpha} = \left(-\frac{1}{t}\right) \lambda \frac{d}{d\alpha} \quad (3.103)$$

после чего запишем систему (3.101) в виде

$$\begin{pmatrix} -\lambda & 1 & 0 & 0 & 0 \\ a^2g + B_1^2 - u_1^2 & 2u_1 - \lambda & 0 & 0 & 0 \\ B_1B_2 - u_1u_2 & u_2 & u_1 - \lambda & 0 & -B_1 \\ 0 & 0 & 0 & -\lambda & 0 \\ u_2B_1 - u_1B_2 & B_2 & -B_1 & 0 & u_1 - \lambda \end{pmatrix} d_\alpha \begin{pmatrix} l \\ lu_1 \\ lu_2 \\ lB_1 \\ lB_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \quad (3.104)$$

Четвертое уравнение системы (3.104) при условии бездивергентности дает $B_1l = \text{const}$. Учитывая это равенство, далее анализируем четыре оставшихся уравнения системы (3.104):

$$\begin{pmatrix} -\lambda & 1 & 0 & 0 \\ a^2g + B_1^2 - u_1^2 & 2u_1 - \lambda & 0 & 0 \\ B_1B_2 - u_1u_2 & u_2 & u_1 - \lambda & -B_1 \\ u_2B_1 - u_1B_2 & B_2 & -B_1 & u_1 - \lambda \end{pmatrix} \partial_\alpha \begin{pmatrix} l \\ lu_1 \\ lu_2 \\ lB_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \quad (3.105)$$

Для нахождения нетривиальных решений системы (3.104) необходимо равенство нулю определителя матрицы коэффициентов. Следовательно, величины λ должны быть собственными числами этой матрицы. У данной матрицы имеются четыре собственных числа:

$$\lambda_{1,2} = u_1 \pm B_1 \quad \lambda_{3,4} = u_1 \pm \sqrt{a^2g + B_1^2} \quad (3.106)$$

Для каждого собственного числа найдем зависимости для искомых величин.

3.5.1 Вырождение непрерывных альфвеновских волн в сжимаемых течениях

Рассмотрим собственные числа λ_1 и λ_2 . Течения, соответствующие этим собственным числам назовем непрерывными альфвеновскими волнами в сжимаемых течениях.

Для случая $\lambda = u_1 - B_1$ преобразуем систему уравнений (3.105) к виду

$$\begin{pmatrix} B_1 - u_1 & 1 & 0 & 0 \\ a^2g + B_1^2 - u_1^2 & u_1 + B_1 & 0 & 0 \\ B_1B_2 - u_1u_2 & u_2 & B_1 & -B_1 \\ u_2B_1 - u_1B_2 & B_2 & -B_1 & B_1 \end{pmatrix} \partial_\alpha \begin{pmatrix} l \\ lu_1 \\ lu_2 \\ lB_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \quad (3.107)$$

В системе уравнений (3.107) линейно независимы только три уравнения, поэтому для нахождения решения, соответствующего собственному числу λ_1 , используем первые три уравнения системы (3.107):

$$(B_1 - u_1) \frac{dl}{d\alpha} + \frac{dl u_1}{d\alpha} = 0 \quad (3.108)$$

$$(a^2 g + B_1^2 - u_1^2) \frac{dl}{d\alpha} + (u_1 + B_1) \frac{dl u_1}{d\alpha} = 0 \quad (3.109)$$

$$(B_1 B_1 - u_1 u_2) \frac{dl}{d\alpha} + u_2 \frac{dl u_1}{d\alpha} + B_1 \frac{dl u_2}{d\alpha} - B_1 \frac{dl B_2}{d\alpha} = 0 \quad (3.110)$$

При умножении уравнения (3.108) на $B_1 + u_1$ и вычитании его из уравнения (3.109) получаем

$$a^2 g \frac{dl}{d\alpha} = 0 \quad (3.111)$$

откуда $l = \text{const}$. Тогда из уравнения (3.108) следует соотношение $u_1 = \text{const}$, а с учетом требования $l B_1 = \text{const}$ во всей области определения системы (3.101) имеем $B_1 = \text{const}$. Из уравнения (3.110) находим последнее соотношение

$$\frac{du_2}{d\alpha} = \frac{dB_2}{d\alpha} \quad (3.112)$$

Таким образом, в простой волне, соответствующей значению $\lambda_1 = u_1 - B_1$, выполняются следующие соотношения:

$$l = \text{const} \quad u_1 = \text{const} \quad B_1 = \text{const} \quad \frac{du_2}{d\alpha} = \frac{dB_2}{d\alpha} \quad (3.113)$$

Аналогичным образом находим соотношения для второго собственного числа $\lambda_2 = u_1 + B_1$:

$$l = \text{const} \quad u_1 = \text{const} \quad B_1 = \text{const} \quad \frac{du_2}{d\alpha} = -\frac{dB_2}{d\alpha} \quad (3.114)$$

Найденные для $\lambda_{1,2} = u_1 \mp B_1$ дифференциальные соотношения (3.113, 3.114) выполняются только на одних характеристиках $x = \lambda t$, которые не пересекаются, поэтому на полученной волне ни одна из искомым величин не может меняться. Таким образом, в автомодельном случае непрерывная альфвеновская волна вырождается.

3.5.2 Центрированные магнитогравитационные волны Римана в сжимаемых течениях

Течения, соответствующие решениям системы уравнений (3.105), при $\lambda = \lambda_3$ и $\lambda = \lambda_4$ назовем центрированными волнами Римана в сжимаемых течениях, обращенными соответственно назад и вперед.

Собственному числу $\lambda_3 = u_1 - \sqrt{a^2g + B_1^2}$ соответствует система линейно независимых дифференциальных уравнений, состоящая из первого, третьего и четвертого уравнений системы (3.105)

$$\frac{dl}{d\alpha}(-u_1 + \sqrt{a^2g + B_1^2}) + \frac{dlu_1}{d\alpha} = 0 \quad (3.115)$$

$$\frac{dl}{d\alpha}(B_1B_2 - u_1u_2) + \frac{dlu_1}{d\alpha}u_2 + \frac{dlu_2}{d\alpha}\sqrt{a^2g + B_1^2} - \frac{dlB_2}{d\alpha}B_1 = 0 \quad (3.116)$$

$$\frac{dl}{d\alpha}(B_1u_2 - u_1B_2) + \frac{dlu_1}{d\alpha}B_2 - \frac{dlu_2}{d\alpha}B_1 + \frac{dlB_2}{d\alpha}\sqrt{a^2g + B_1^2} = 0 \quad (3.117)$$

Складывая уравнения (3.116) и (3.117), получаем

$$\begin{aligned} \frac{dl}{d\alpha}[B_1(B_2 + u_2) - u_1(B_2 + u_2)] + \frac{dlu_1}{d\alpha}(B_2 + u_2) + \\ + \frac{dlu_2}{d\alpha}(\sqrt{a^2g + B_1^2} - B_1) + \frac{dlB_2}{d\alpha}(\sqrt{a^2g + B_1^2} - B_1) = 0 \end{aligned} \quad (3.118)$$

После введения обозначения $\delta = B_2 + u_2$, уравнение (3.118) принимает вид

$$\frac{dl}{d\alpha}(B_1 - u_1)\delta + \frac{dlu_1}{d\alpha}\delta + \frac{dl\delta}{d\alpha}(\sqrt{a^2g + B_1^2} - B_1) = 0 \quad (3.119)$$

или, после преобразований

$$\frac{du_1}{d\alpha}l\delta + \frac{dl}{d\alpha}\sqrt{a^2g + B_1^2}\delta + \sqrt{a^2g + B_1^2}l\frac{d\delta}{d\alpha} - B_1l\frac{d\delta}{d\alpha} = 0 \quad (3.120)$$

С учетом уравнения (3.115), записанного в виде

$$\frac{du_1}{d\alpha} = -\frac{\sqrt{a^2g + B_1^2}}{l} \frac{dl}{d\alpha} \quad (3.121)$$

первые два члена в уравнении (3.120) сокращаются, и оно принимает вид

$$l(B_1 - \sqrt{a^2g + B_1^2})\frac{d\delta}{d\alpha} = 0 \quad (3.122)$$

Следовательно, $B_2 + u_2 = \text{const}$. После раскрытия производных произведений и учета соотношения (3.122) в виде

$$\frac{dB_2}{d\alpha} = -\frac{du_2}{d\alpha} \quad (3.123)$$

уравнение (3.117) переписывается в форме

$$\frac{du_1}{d\alpha}lB_2 + \frac{dB_2}{d\alpha}lB_1 + \frac{dB_2}{d\alpha}l\sqrt{a^2g + B_1^2} + \frac{dl}{d\alpha}B_2\sqrt{a^2g + B_1^2} = 0 \quad (3.124)$$

Перегруппируем слагаемые в левой части

$$\left(\frac{du_1}{d\alpha} + \frac{\sqrt{a^2g + B_1^2}}{l}\frac{dl}{d\alpha}\right)B_2 + \frac{dB_2}{d\alpha}lB_1 + \frac{dB_2}{d\alpha}l\sqrt{a^2g + B_1^2} = 0 \quad (3.125)$$

и используем соотношение (3.121). В результате получаем

$$\frac{dB_2}{d\alpha}(lB_1 + l\sqrt{a^2g + B_1^2}) = 0 \quad (3.126)$$

откуда $B_2 = \text{const}$, а следовательно, и $u_2 = \text{const}$. Таким образом, в области простой волны, соответствующей третьему собственному числу системы уравнений (3.105), выполняются соотношения

$$u_2 = \text{const} \quad B_2 = \text{const} \quad B_1l = \text{const} \quad \frac{du_1}{d\alpha} = -\frac{\sqrt{a^2g + B_1^2}}{l}\frac{dl}{d\alpha} \quad (3.127)$$

Отметим, что соотношения $u_2 = \text{const}$, $B_2 = \text{const}$ не зависят от значения α во всей области полученного решения, в то время как переменные u_1, B_1, l , соответствующие последним двум соотношениям в (3.127), постоянны только на линиях $dx/dt = \alpha$.

Для собственного числа $\lambda_4 = u_1 + \sqrt{a^2g + B_1^2}$ аналогичным образом получаем

$$u_2 = \text{const} \quad B_2 = \text{const} \quad B_1l = \text{const} \quad \frac{du_1}{d\alpha} = \frac{\sqrt{a^2g + B_1^2}}{l}\frac{dl}{d\alpha} \quad (3.128)$$

Соотношения (3.127) и (3.128) описывают центрированные магнитогравитационные волны Римана, обращенные соответственно назад и вперед. Отметим, что при $B_1 \rightarrow 0$ соотношения на этих волнах совпадают с соотношениями на центрированных волнах разрежения в нейтральной гидродинамике.

С учетом условия $B_1l = \text{const}$, выполняющегося во всей области определения системы (3.104), связь между u_1 и l в центрированных магнитогравитационных волнах Римана записывается в виде

$$\frac{du_1}{d\alpha} = \pm \frac{d\phi(l)}{d\alpha} \quad (3.129)$$

где знаки определяют волны, обращенные вперед и назад соответственно. В уравнении (3.129)

$$\phi(l) = \int \frac{\sqrt{a^2g + B_1^2}}{l} dl \quad (3.130)$$

Рис. 11: Контур $ABCE$, бесконечно близко примыкающий к линии разрыва $x(t)$ сверху и снизу

Выражения $u_1 + \phi(l) = \text{const}$ и $u_1 - \phi(l) = \text{const}$ являются инвариантами центрированных магнитогидродинамических волн Римана и сохраняются внутри волны, обращенной соответственно назад и вперед.

Таким образом, получены автомодельные решения магнитогидродинамической системы уравнений в приближении мелкой воды, описывающие центрированные магнитогравитационные волны в сжимаемых течениях.

3.5.3 Соотношения Ранкина-Гюгонио в сжимаемых магнитогидродинамических течениях мелкой воды

Соотношения Ранкина-Гюгонио существенно зависят от выражения для квадрата скорости распространения слабых возмущений, которое в нашем случае отличается от аналогичного для случая несжимаемой магнитной гидродинамики мелкой воды [16], поэтому ниже приводится их подробный вывод. Соотношения получим интегрированием уравнений (??-??) по области (x, t) , содержащей линию разрыва (Рис.11). Соотношения Ранкина-Гюгонио выполняются для произвольной подстилающей поверхности.

Получим соотношения Ранкина-Гюгонио, выполняющиеся на линии разрыва. Эти соотношения вместе с начальными условиями задают направление линии разрыва и величину скачка искомых параметров. Для нахождения этих

соотношений используем систему уравнений (??-??) в дифференциальном виде. Для этого введем функцию $\psi(l)$ такую, что

$$\psi = \int a^2 g dl \quad \frac{\partial \psi}{\partial x} = a^2 g \frac{\partial l}{\partial x} \quad (3.131)$$

Интегрируя уравнения системы по произвольной области G , гомеоморфной квадрату на плоскости xt , получаем

$$\iint_G \left(\frac{\partial l}{\partial t} + \frac{\partial l u_1}{\partial x} \right) dG = 0 \quad (3.132)$$

$$\iint_G \left[\frac{\partial l u_1}{\partial t} + \frac{\partial (l u_1^2 - l B_1^2 + \psi)}{\partial x} \right] dG = 0 \quad (3.133)$$

$$\iint_G \left[\frac{\partial l u_2}{\partial t} + \frac{\partial (l u_1 u_2 - l B_1 B_2)}{\partial x} \right] dG = 0 \quad (3.134)$$

$$\iint_G \left(\frac{\partial l B_1}{\partial t} \right) dG = 0 \quad (3.135)$$

$$\iint_G \left[\frac{\partial l B_2}{\partial t} + \frac{\partial (l u_1 B_2 - l u_2 B_1)}{\partial x} \right] dG = 0 \quad (3.136)$$

После преобразования по формуле Грина объемных интегралов, входящих в левую часть системы (3.132-3.136), имеем

$$\oint_{\partial G} l dx - (l u_1) dt = 0 \quad (3.137)$$

$$\oint_{\partial G} (l u_1) dx - (l u_1^2 - l B_1^2 + \psi) dt = 0 \quad (3.138)$$

$$\oint_{\partial G} (l u_2) dx - (l u_1 u_2 - l B_1 B_2) dt = 0 \quad (3.139)$$

$$\oint_{\partial G} (l B_1) dx = 0 \quad (3.140)$$

$$\oint_{\partial G} (l B_2) dx - (l u_1 B_2 - l B_1 u_2) dt = 0 \quad (3.141)$$

Система интегральных уравнений (3.137-3.141) выполняется для произвольного интегрируемого контура ∂G и, в частности, для содержащего линию разрыва входящих в подынтегральные выражения функций.

Пусть $x = x(t)$ - уравнение линии разрыва - обладает непрерывной касательной на отрезке $[t_1, t_2]$. В предположении, что функции u_1, u_2, B_1, B_2, l терпят разрыв только на линии $x(t)$, вводятся обозначения

$$\begin{aligned} u_1^I(t) &= \lim_{x \rightarrow x(t)-0} u_1(x, t) & u_1^{II}(t) &= \lim_{x \rightarrow x(t)+0} u_1(x, t) \\ u_2^I(t) &= \lim_{x \rightarrow x(t)-0} u_2(x, t) & u_2^{II}(t) &= \lim_{x \rightarrow x(t)+0} u_2(x, t) \\ B_1^I(t) &= \lim_{x \rightarrow x(t)-0} B_1(x, t) & B_1^{II}(t) &= \lim_{x \rightarrow x(t)+0} B_1(x, t) \\ B_2^I(t) &= \lim_{x \rightarrow x(t)-0} B_2(x, t) & B_2^{II}(t) &= \lim_{x \rightarrow x(t)+0} B_2(x, t) \\ l^I(t) &= \lim_{x \rightarrow x(t)-0} l(x, t) & l^{II}(t) &= \lim_{x \rightarrow x(t)+0} l(x, t) \end{aligned}$$

В качестве ∂G возьмем контур $ABCE$, бесконечно близко примыкающий линиями AB и CE к линии разрыва $x(t)$ соответственно слева и справа от нее. Введем в рассмотрение скорость разрыва $D = D(t) = x'(t)$, откуда $dx = D(t)dt$.

Тогда

$$\int_{AB} (Dl - lu_1)dt - \int_{CE} (Dl - lu_1)dt = 0 \quad (3.142)$$

$$\int_{AB} (Dlu_1 - lu_1^2 + lB_1^2 - \psi)dt - \int_{CE} (Dlu_1 - lu_1^2 + lB_1^2 - \psi)dt = 0 \quad (3.143)$$

$$\int_{AB} (Dlu_2 - lu_1u_2 + lB_1B_2)dt - \int_{CE} (Dlu_2 - lu_1u_2 + lB_1B_2)dt = 0 \quad (3.144)$$

$$\int_{AB} (DlB_1)dt - \int_{CE} (DlB_1)dt = 0 \quad (3.145)$$

$$\int_{AB} (DlB_2 - lu_1B_2 + lB_1u_2)dt - \int_{CE} (DlB_2 - lu_1B_2 + lB_1u_2)dt = 0 \quad (3.146)$$

В силу произвольности контура $ABCE$ соотношения (3.142-3.146) эквивалентны следующим условиям для подынтегральных выражений:

$$Dl^I - l^I u_1^I = Dl^{II} - l^{II} u_1^{II} \quad (3.147)$$

$$\begin{aligned} Dl^I u_1^I - l^I (u_1^I)^2 + l^I (B_1^I)^2 - \psi^I &= \\ &= Dl^{II} u_1^{II} - l^{II} (u_1^{II})^2 + l^{II} (B_1^{II})^2 - \psi^{II} \end{aligned} \quad (3.148)$$

$$dl^I D_1^I = Dl^{II} B_1^{II} \quad (3.149)$$

$$Dl^I u_2^I - l^I u_1^I u_2^I + l^I B_1^I B_2^I = Dl^{II} u_2^{II} - l^{II} u_1^{II} u_2^{II} + l^{II} B_1^{II} B_2^{II} \quad (3.150)$$

$$Dl^I B_2^I - l^I u_1^I B_2^I + l^I u_2^I B_1^I = Dl^{II} B_2^{II} - l^{II} u_1^{II} B_2^{II} + l^{II} u_2^{II} B_1^{II} \quad (3.151)$$

Соотношения (3.147-3.151) называются соотношениями Ранкина-Гюгонио для магнитной гидродинамики сжимаемых течений в приближении мелкой воды. Найдем автомодельные решения, допускаемые этими соотношениями.

3.5.4 Магнитогравитационные ударные волны в сжимаемых течениях

Магнитогравитационной ударной волной называется разрывное течение, такое, что высоты жидкостей слева и справа от разрыва различны, а значит и $l^I \neq l^{II}$. Тогда из первых трех уравнений системы (3.147-3.151) следует

$$l^I B_1^I = l^{II} B_1^{II} \quad (3.152)$$

$$D = \frac{l^I u_1^I - l^{II} u_1^{II}}{l^I - l^{II}} \quad (3.153)$$

$$u_1^I - u_1^{II} = \pm \sqrt{\frac{(l^I - l^{II})(\psi^I - \psi^{II}) + (B_1^I)^2 \frac{l^I}{l^{II}} (l^I - l^{II})^2}{l^I l^{II}}} \quad (3.154)$$

После подстановки выражения для D из соотношения (3.153) в два последних уравнения системы (3.150,3.151) и перегруппировки слагаемых получаем

$$l^I l^{II} (u_1^I - u_1^{II})(u_2^I - u_2^{II}) = -(l^I - l^{II})(l^I B_1^I B_2^I - l^{II} B_1^{II} B_2^{II}) \quad (3.155)$$

$$l^I l^{II} (u_1^{II} - u_1^I)(B_2^{II} - B_2^I) = (l^I - l^{II})(l^{II} u_2^{II} B_1^{II} - l^I u_2^I B_1^I) \quad (3.156)$$

Если

$$B_2^I = B_2^{II} \quad u_2^I = u_2^{II} \quad (3.157)$$

то уравнения (3.155) и (3.156) выполнены тождественно. В противном случае при делении уравнений (3.155) и (3.156) друг на друга получаем

$$(u_2^I - u_2^{II})^2 = (B_1^I - B_1^{II})^2 \quad (3.158)$$

откуда

$$u_2^I - u_2^{II} = \pm (B_1^I - B_1^{II}) \quad (3.159)$$

Подставляя выражение (3.159) в первое уравнение системы (3.147) и учитывая третье уравнение системы (3.149), имеем

$$(u_1^I - u_1^{II}) = \pm (l^I - l^{II}) \frac{l^I B_1^I}{l^I l^{II}} \quad (3.160)$$

Однако для одновременного выполнения соотношений (3.154) и (3.160), необходимо чтобы $l^I l^{II} = 0$, что невозможно. Следовательно величины B_2 и u_2 не могут иметь разрыв на тех линиях, где имеет разрыв l .

Соотношения (3.152-3.154) и (3.157) задают магнитогравитационные ударные волны в сжимаемой плазме. Отметим, что магнитогравитационная ударная волна в случае сжимаемой плазмы является аналогом ударной волны для уравнений сжимаемой мелкой воды, и при $B_1 \rightarrow 0$ соотношения на ней переходят в соотношения на ударной волне для жидкости с крупномасштабной сжимаемостью. Так же как и в классической теории мелкой воды, магнитогравитационная ударная волна, являющаяся аналогом гидродинамической ударной волны в сжимаемой нейтральной жидкости, имеет сверхзвуковую скорость относительно жидкости перед ней и дозвуковую относительно жидкости за ней.

3.5.5 Разрывные альфвеновские волны в сжимаемых течениях

Альфвеновской разрывной волной назовем разрывное решение, для которого высота справа от разрыва совпадает с высотой слева, а значит $l^I = l^{II}$. Тогда из соотношений (3.152-3.154) следует, что непрерывными останутся также и тангенциальные составляющие поля скорости и напряженности магнитного поля: $B_1^I = B_1^{II}$ и $u_1^I = u_1^{II}$. Следовательно, нетривиальные соотношения на разрыве несут лишь два последних уравнения системы соотношений Ранкина-Гюгонио (3.150) и (3.151):

$$D = u_1 - B_1 \frac{B_2^I - B_2^{II}}{u_2^I - u_2^{II}} \quad (3.161)$$

$$(B_2^I - B_2^{II})^2 = (u_2^I - u_2^{II})^2 \quad (3.162)$$

После элементарных преобразований уравнений (3.161-3.162) получаем

$$D = u_1 \pm B_1 \quad (3.163)$$

$$B_2^I - B_2^{II} = \mp (u_2^I - u_2^{II}) \quad (3.164)$$

Кроме того, по предположению выполняется также

$$l^I = l^{II} \quad B_1^I = B_1^{II} \quad u_1^I = u_1^{II} \quad (3.165)$$

Полученные соотношения (3.163), (3.164), (3.165) определяют альфвеновские разрывные волны в приближении мелкой воды для сжимаемой плазмы. Так

как непрерывные альфвеновские волны непригодны для построения решения задачи Римана и здесь не рассматриваются, дальнейшем будем опускать слово "разрывные".

3.5.6 Допустимые разрывы

В предыдущих двух подразделах 3.4 и 3.5 было показано, что существуют два типа устойчивых разрывов с ненулевым потоком массы:

1) разрыв (3.152,3.153,3.154,3.157), содержащий скачок l , а значит и свободной поверхности, и нормальных составляющих поля скорости и напряженности магнитного поля, называемый магнитогравитационной ударной волной в сжимаемой плазме.

2) разрыв (3.163,3.164,3.165) тангенциальных составляющих поля скорости и напряженности магнитного поля, называемый альфвеновской волной в приближении сжимаемой мелкой воды.

Вообще говоря, система уравнений (3.147-3.151) допускает третий тип устойчивых разрывов, для которых нормальная составляющая скорости непрерывна и тождественно совпадает со скоростью самого разрыва, называемого контактным разрывом. Такой тип разрывов должен быть включен в рассмотрение при наличии физических различий в описании жидкости для задачи произвольного разрыва, например, когда жидкость в начальный момент времени в каждой из полуплоскостей имеет различную плотность. Другой пример контактного разрыва, рассматриваемый в данной работе, соответствует вырождению альфвеновской ударной волны при стремлении тангенциальной составляющей напряженности магнитного поля к нулю. В этом случае поток массы через такую волну равен нулю, а нормальные составляющие напряженности магнитного поля и поля скорости становятся указанными физическими различиями.

Таким образом, получены разрывные решения для слоя сжимаемой плазмы со свободной поверхностью в поле силы тяжести в приближении мелкой воды. Нелинейная динамика сильных разрывов отличается от случая классической магнитной гидродинамики мелкой воды вследствие различия выражения для квадрата скорости слабых возмущений и вследствие нетривиальной зависимости высоты слоя h от переменной l . Так же как и в случае непрерывных

решений, полученные разрывные решения однозначно определяют физическое решение для высоты h в соответствии с (3.30) и (??).

3.5.7 Простые волны на наклонной плоскости в сжимаемых течениях

Простой волной в магнитной гидродинамике мелкой воды, так же как и в газовой динамике называется такое решение системы уравнений, при котором одна из переменных Римана постоянна во всей области течения, поэтому простая волна может существовать только в случае ровной границы. Для случая произвольной границы в работах [17], [45], [51] введены обобщенные простые волны как такие решения системы гиперболических уравнений, при которых одно из уравнений системы тождественно удовлетворяется во всей области течения, а не только вдоль соответствующей характеристики, и показано, что такое возможно только при линейном профиле нижней границы, т.е. в случае наклонной плоскости $f_s = kx + f_s(0)$. Здесь $k = \text{const}$ - угловой коэффициент. Естественно, что в случае однородной подстилающей поверхности понятие обобщенной простой волны совпадает с классическим понятием простой волны.

Запишем систему уравнений (3.101) на наклонной плоскости в следующем виде:

$$\partial_t \begin{pmatrix} l \\ u_1 \\ u_2 \\ B_1 \\ B_2 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} u_1 & l & 0 & 0 & 0 \\ \frac{a^2 g + B_1^2}{l} & u_1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & u_1 & 0 & -B_1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -B_1 & 0 & u_1 \end{pmatrix} \partial_x \begin{pmatrix} l \\ u_1 \\ u_2 \\ B_1 \\ B_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ -gk \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \quad (3.166)$$

Используя замену переменных

$$\tilde{x} = x + \frac{gkt^2}{2} \quad \tilde{t} = t \quad (3.167)$$

откуда

$$\frac{\partial}{\partial t} = \frac{\partial}{\partial \tilde{t}} \quad \frac{\partial}{\partial x} = \frac{\partial}{\partial \tilde{x}} \quad \tilde{u}_1 = u_1 + gkt \quad (3.168)$$

Тогда система (3.166) приводится к виду, аналогичному системе уравнений на

ровной границе (3.101),

$$\partial_{\tilde{t}} \begin{pmatrix} l \\ \tilde{u}_1 \\ u_2 \\ B_1 \\ B_2 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} u_1 & l & 0 & 0 & 0 \\ \frac{a^2 g + B_1^2}{l} & u_1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & u_1 & 0 & -B_1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -B_1 & 0 & u_1 \end{pmatrix} \partial_{\tilde{x}} \begin{pmatrix} l \\ \tilde{u}_1 \\ u_2 \\ B_1 \\ B_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \quad (3.169)$$

характеристики которой $\tilde{x} = \lambda \tilde{t}$ в физических переменных согласно (3.167) являются параболой. Решения системы уравнений (3.169) получается обратной заменой переменных из решений системы уравнений на ровной границе. Откуда для магнитогравитационной волны Римана в сжимаемых течениях на наклонной плоскости:

$$u_1 = \pm \int \frac{\sqrt{a^2 + B_1^2}}{l} dl + gkt + \text{const} \quad (3.170)$$

$$u_2 = \text{const} \quad B_2 = \text{const} \quad B_1 l = \text{const} \quad (3.171)$$

Непрерывные альфвеновские волны в сжимаемых течениях на наклонной плоскости вырождаются так же как и в случае ровной подстилающей поверхности. Таким образом, несмотря на формальное сходство решений (3.170), (3.171) с аналогичными для несжимаемого случая [16], нелинейная динамика простых волн в сжимаемых течениях существенно отличается в силу различия соотношений для квадрата скорости распространения слабых возмущений, вследствие нетривиальной зависимости высоты слоя h от массы столба жидкости.

Заметим, что в случае наклонной границы условия Ранкина-Гюгонио не отличаются от условий на разрыве для ровной подстилающей поверхности. Это значит, что найденные разрывные решения (3.152), (3.153), (3.154), (3.157) и (3.163), (3.164), (3.165) полностью переносятся на случай наклонной плоскости. Ударные волны распространяются по параболам, со старшим коэффициентом таким же, что и у параболических характеристик для непрерывных решений.

3.6 Задача Римана для магнитогидродинамических течений сжимаемой жидкости в приближении мелкой воды

В данном разделе сформулирована задача распада произвольного разрыва (задача Римана) для магнитогидродинамических течений сжимаемой жидкости в приближении мелкой воды и перечислены все допустимые волновые конфигурации из ранее найденных частных решений. Показано, что в предположении автомодельности решение единственно, а в предположении единственности - автомодельно. Для каждой конфигурации найдены условия для начальных данных, необходимых для её реализации. Как было показано выше, частные решения в нашем случае отличаются от аналогичных для несжимаемой магнитной гидродинамики мелкой воды. Следовательно, будут отличаться и условия реализации каждой конфигурации. Поэтому ниже мы приводим полный вывод решения задачи произвольного разрыва.

3.6.1 Постановка задачи Римана для сжимаемых течений

Рассмотрим систему уравнений (3.101) с кусочно-постоянными начальными условиями для левого ($x < 0$) и правого ($x > 0$) полупространств, удовлетворяющими уравнению бездивергентности:

$$\begin{array}{c}
 t = 0 \\
 \left. \begin{array}{l}
 l = l^I \quad u_1 = u_1^I \quad u_2 = u_2^I \\
 B_1 = B_1^I \quad B_2 = B_2^I
 \end{array} \right\} x < 0 \\
 \left. \begin{array}{l}
 l = l^{II} \quad u_1 = u_1^{II} \quad u_2 = u_2^{II} \\
 B_1 = B_1^{II} \quad B_2 = B_2^{II}
 \end{array} \right\} x > 0 \\
 B_1^I l^I = B_1^{II} l^{II}
 \end{array} \quad (3.172)$$

Разрыв начальных условий для двух полубесконечных магнитных жидкостей, характеризующихся постоянными значениями приведенных выше параметров и удовлетворяющих системе (3.172), назовем произвольным разрывом. Магнитогидродинамическое течение, удовлетворяющее системе уравнений (3.101) при $t > 0$ и начальным условиям (3.172), называется решением задачи о распаде произвольного разрыва для уравнений сжимаемой магнитной гидродинамики

в приближении мелкой воды.

Без ограничения общности считаем, что высота жидкости справа не превышает высоты жидкости слева, а значит $l^I \geq l^{II}$. В случае отсутствия жидкости в правом полупространстве, как будет показано ниже, необходимо отсутствие нормальной составляющей магнитного поля в левом полупространстве, $B_1^I = 0$, что приводит к ее полному отсутствию, $B_1 \equiv 0$, во всей пространственно-временной области определения решения системы (3.101,3.172). В этом случае решение полностью аналогично решению классической задачи о разрушении дамбы с учетом конвективного переноса составляющих поля скорости и напряженности магнитного поля в сжимаемом случае. Жидкость справа от разрыва считается покоящейся. Выполнение указанных условий легко достигается выбором направления пространственных осей и переходом в инерциальную систему координат, замороженную в начальный момент времени в правую жидкость.

Заметим, что в силу бездивергентности магнитного поля для нетривиальной магнитогидродинамической постановки, $B_1 \neq 0$, высота жидкости во всей области определения решения является строго положительной. Поэтому если в одном из полупространств жидкость отсутствует, то в другом нормальная составляющая магнитного поля необходимо вырождается. Случай отсутствия жидкости и в другом полупространстве в силу полного вырождения решения (все магнитогидродинамические величины постоянны и равны нулю), не рассматривается. Если нормальная составляющая напряженности магнитного поля отсутствует в обоих полупространствах, $B_1 \equiv 0$, то задача вырождается в гидродинамическую с крупномасштабной сжимаемостью и решение переходит в решение классической задачи о разрушении дамбы. Действительно, если при этом тангенциальная составляющая напряженности магнитного поля также равна нулю, то есть магнитное поле отсутствует, система уравнений (3.101) вырождается в систему сжимаемых уравнений мелкой воды. А при наличии ненулевой тангенциальной составляющей напряженности магнитного поля, $B_2 \neq 0$, вырождается искомое решение. В этом случае, как будет показано ниже, правая и левая альфвеновские ударные волны "схлопываются" вырождаясь в контактный разрыв, а тангенциальные составляющие магнитного поля и поля скорости переносятся конвективно, что также соответствует решению задачи сжимаемой

гидродинамики о разрушении дамбы в приближении мелкой воды. В дальнейшем случай "схлопывания" альфвеновских волн выделяться не будет.

Исходная система уравнений (3.101) инвариантна относительно преобразований подобия переменных x и t ($t' = kt, x' = kx, k > 0$) вместе со своим интегральным следствием. (В данном случае имеет смысл говорить именно о следствии интегральных законов сохранения из дифференциальных, поскольку уравнения для сжимаемых течений магнитогиродинамической мелкой воды являются следствием усреднения дифференциальных уравнений магнитной гидродинамики по высоте слоя.) Поэтому из предположения единственности решения задачи распада произвольного разрыва и построенного ниже решения следует его автомодельность. В то же время построенное ниже решение в предположении автомодельности является доказательством существования и единственности.

Построение автомодельного решения задачи о распаде произвольного разрыва состоит в согласовании элементарных решений типа центрированных непрерывных волн Римана, магнитогиродинамических и альфвеновских ударных волн, зон постоянного течения, контактных разрывов и в нахождении параметров, характеризующих их области определения.

Схематически автомодельная картина возникающего течения изображается на пространственно-временной плоскости одной из пяти возможных конфигураций:

две центрированные магнитогравитационные волны разрежения и две альфвеновские волны (Рис.12);

две магнитогравитационные ударные волны и две альфвеновские волны (Рис.13);

магнитогравитационная волна разрежения, обращенная назад, правая магнитогравитационная ударная волна и две альфвеновские волны (Рис.14);

левая магнитогравитационная ударная волна, магнитогравитационная волна разрежения, обращенная вперед, и две альфвеновские волны (Рис.15);

две гидродинамические волны Римана и зона вакуума (Рис.16).

Последняя конфигурация совпадает с аналогичной конфигурацией в решении задачи о разрушении дамбы с учетом конвективного переноса тангенциальных составляющих скорости и напряженности магнитного поля через разрыв.

Данная конфигурация реализуется только при $B_1 \equiv 0$.

Покажем, что других волновых конфигураций быть не может. Действительно, из того, что магнитогравитационная волна движется со сверхзвуковой скоростью относительно среды перед ней и дозвуковой относительно среды за ней, следует, что в одно полупространство не могут бежать две магнитогравитационные ударные волны или магнитогравитационная ударная волна и волна разрежения. Две волны разрежения также не могут бежать в одно полупространство, поскольку при этом их крайние характеристики необходимо совпадают и они образуют одну волну разрежения. Кроме того, скорость альфвеновской волны всегда меньше скорости любой магнитогравитационной волны. Из перечисленных выше условий следует, что в одно полупространство может бежать не более одной магнитогравитационной волны (ударной или разрежения) и одной альфвеновской, движущейся с меньшей относительно магнитогравитационной волны скоростью. Следовательно, при распаде разрыва не могут реализовываться конфигурации, отличные от указанных выше.

Рассмотрение задачи о распаде произвольного разрыва будем проводить следующим способом: непрерывно меняя конкретные начальные условия, реализующие одну из перечисленных выше конфигураций, найдем непрерывно изменяющееся решение, переходящее через критические значения параметров, отделяющих одну конфигурацию от другой.

3.6.2 Конфигурация две волны разрежения и две альфвеновские волны в сжимаемых течениях

Пусть начальные условия определяют конфигурацию "две центрированные магнитогравитационные волны разрежения Римана и две альфвеновские волны" (Рис.12). Данная конфигурация разбивает область определения течения на семь областей, разделенных шестью лучами: OA , OB , OC , OD , OE , OF . Луч OA , задаваемый соотношением $x = y_1 t$, отделяет область постоянного течения I , в которой величины u_1 , u_2 , B_1 , B_2 , l , задаваемые начальными условиями

$$l = l^I \quad u_1 = u_1^I \quad u_2 = u_2^I \quad B_1 = B_1^I \quad B_2 = B_2^I \quad (3.173)$$

для левой массы жидкости, сохраняют свои значения, от области III - центрированной магнитогравитационной волной Римана, обращенной назад. Тогда,

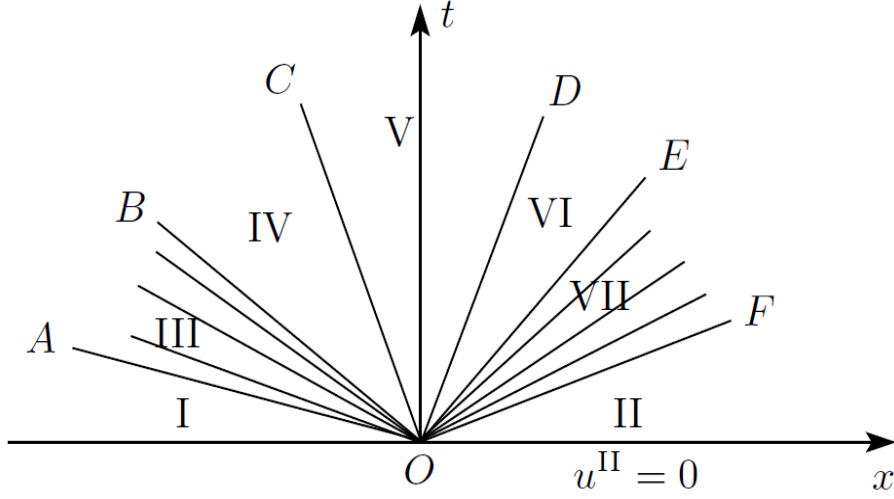


Рис. 12: Две центрированные магнитогравитационные волны разрежения и две альфвеновские волны

согласно (3.121), $y_1 = u_1^I - \sqrt{(a^I)^2 g + (B_1^I)^2}$, поскольку луч OA задает характеристику центрированной волны Римана, обращенной назад. Луч OB , задаваемый соотношением $x = y_2 t$, также является характеристикой, отделяющей волну разрежения от области IV - зоны постоянного течения, следовательно, $y_2 = u_1^{IV} - \sqrt{(a^{IV})^2 g + (B_1^{IV})^2}$. Лучи OC и OD , заданные уравнениями $x = y_3 t$ и $x = y_4 t$, соответствуют альфвеновским ударным волнам (3.163, 3.164, 3.165), поэтому $y_3 = u_1^{IV} - |B_1^{IV}|$, $y_4 = u_1^V + |B_1^V|$. Лучи OE и OF , соответствующие магнитогравитационной волне разрежения Римана, обращенной вперед (3.127), задаются, аналогично лучам OA и OB , соотношениями $x = y_5 t$ и $x = y_6 t$, где $y_5 = u_1^{VI} + \sqrt{(a^{VI})^2 g + (B_1^{VI})^2}$, $y_6 = \sqrt{(a^{II})^2 g + (B_1^{II})^2}$.

Рассмотрим области IV , V и VI . Они представляют собой три области постоянного течения, отделенные друг от друга альфвеновскими ударными волнами. Величины u_2 и B_2 в этих областях связаны, согласно (3.163, 3.164, 3.165), при $B_1 > 0$ соотношениями

$$u_2^{IV} - B_2^{IV} = u_2^V - B_2^V \quad u_2^V + B_2^V = u_2^{VI} + B_2^{VI} \quad (3.174)$$

а при $B_1 < 0$ -

$$u_2^{IV} + B_2^{IV} = u_2^V + B_2^V \quad u_2^V - B_2^V = u_2^{VI} - B_2^{VI} \quad (3.175)$$

откуда

$$u_2^V = \frac{1}{2} [u_2^{VI} + u_2^{IV} + \text{sign}(B_1)(B_2^{VI} - B_2^{IV})] \quad (3.176)$$

$$B_2^V = \frac{1}{2}[\text{sign}(B_1)(u_2^{VI} - u_2^{IV}) + B_2^{VI} + B_2^{IV}] \quad (3.177)$$

Поскольку в центрированных магнитогидродинамических волнах Римана величины u_2 и B_2 не меняются, выполняются соотношения

$$u_2^I = u_2^{III} = u_2^{IV} \quad u_2^{II} = u_2^{VII} = u_2^{VI} \quad (3.178)$$

следовательно,

$$u_2^V = \frac{1}{2}[u_2^{II} + u_2^I + \text{sign}(B_1)(B_2^{II} - B_2^I)] \quad (3.179)$$

$$B_2^V = \frac{1}{2}[\text{sign}(B_1)(u_2^{II} - u_2^I) + B_2^{II} + B_2^I] \quad (3.180)$$

Таким образом, значения u_2 и B_2 однозначно определены и известны во всем пространстве в любой момент времени.

Поскольку на альфвеновских ударных волнах величины u_1 , B_1 и l сохраняют свои значения, справедливы следующие равенства:

$$u_1^{IV} = u_1^V = u_1^{VI} \quad B_1^{IV} = B_1^V = B_1^{VI} \quad l^{IV} = l^V = l^{VI} \quad (3.181)$$

В дальнейшем для них в областях V и VI использованы обозначения с индексом "IV". Область III представляет собой волну Римана (3.121), обращенную назад, поэтому параметры в ней удовлетворяют соотношениям

$$u_1 + \phi(l) = \text{const} \quad B_1 l = \text{const} \quad (3.182)$$

откуда

$$u_1^I + \phi(l^I) = u_1^{IV} + \phi(l^{IV}) \quad B_1^I l^I = B_1^{IV} l^{IV} \quad (3.183)$$

Аналогично, область VII представляет собой волну Римана (3.127), обращенную вперед, поэтому выполняются соотношения

$$-\phi(l^{II}) = u_1^{IV} - \phi(l^{IV}) \quad B_1^{II} l^{II} = B_1^{IV} l^{IV} \quad (3.184)$$

Тогда

$$u_1^{IV} = \frac{1}{2}[u_1^I - \phi(l^{II}) + \phi(l^I)] \quad (3.185)$$

$$\phi(l^{IV}) = \frac{1}{2}[u_1^I + \phi(l^I) + \phi(l^{II})] \quad (3.186)$$

Для реализации данной конфигурации необходимо, чтобы

$$y_1 < y_2 < y_3 < y_4 < y_5 \leq y_6 \quad (3.187)$$

$$\begin{aligned}
u_1^I - \sqrt{(a^I)^2 g + (B_1^I)^2} &< u_1^{IV} - \sqrt{(a^{IV})^2 g + (B_1^{IV})^2} < u_1^{IV} - |B_1^{IV}| \leq \\
&\leq u_1^{IV} + |B_1^{IV}| < u_1^{IV} + \sqrt{(a^{IV})^2 g + (B_1^{IV})^2} \leq \sqrt{(a^{II})^2 g + (B_1^{II})^2} \quad (3.188)
\end{aligned}$$

При этом равенство в последнем неравенстве цепочки (3.188) достигается в случае вырождения центрированной магнитогидродинамической волны Римана, обращенной вперед. Случай равенства

$$u_1^{IV} - |B_1^{IV}| = u_1^{IV} + |B_1^{IV}| \quad (3.189)$$

достигается лишь при отсутствии тангенциальной составляющей магнитного поля, что соответствует вырождению двух альфвеновских ударных волн в одну. Такая волна в точности совпадает с контактным разрывом между двумя жидкостями, характеризующимися различными нормальными составляющими поля скорости и магнитного поля. Далее такая ситуация будет считаться частным случаем двух альфвеновских ударных волн и не будет выделяться отдельно. Условия $y_2 < y_3$ и $y_4 < y_5$ выполняются автоматически, поскольку $\sqrt{a^2 g + B_1^2} > B_1$ строго выполняется во всей области определения в силу строгой положительности функции $a(l)$.

Для выполнения первого и последнего неравенств цепочки (3.188), $u_1^I - \sqrt{(a^I)^2 g + (B_1^I)^2} < u_1^{IV} - \sqrt{(a^{IV})^2 g + (B_1^{IV})^2}$ и $u_1^{IV} + \sqrt{(a^{IV})^2 g + (B_1^{IV})^2} \leq \sqrt{(a^{II})^2 g + (B_1^{II})^2}$, необходимо и достаточно выполнение неравенств для высот в соответствующих областях:

$$l_1^I \geq l_1^{II} \geq l_1^{IV} \quad (3.190)$$

Таким образом, для нахождения условий совместности предложенной конфигурации остается показать существование и единственность значений u_1^{IV} и l^{IV} , таких что выполнены неравенства (3.190), а в каждой волне выполнено условие постоянства соответствующих инвариантов:

$$u_1^I + \phi(l^I) = u_1^{IV} + \phi(l^{IV}) \quad (3.191)$$

для центрированной волны Римана, обращенной назад и

$$-\phi(l^{II}) = u_1^{IV} - \phi(l^{IV}) \quad (3.192)$$

для центрированной волны Римана, обращенной вперед. Одновременное выполнение инвариантов (3.191) и (3.192) эквивалентно выполнению уравнения для

l^{IV} :

$$\phi(l^{IV}) = \frac{1}{2}[u_1^I + \phi(l^I) + \phi(l^{II})] \quad (3.193)$$

Заметим, что

$$\phi(l) = \int \frac{dl}{l} \sqrt{\frac{(B_1 l)^2}{l^2} + ga^2} \quad (3.194)$$

является возрастающей функцией l , тогда условие выполнения неравенств (3.190) выглядит следующим образом:

$$u_1^I \leq \phi(l^{II}) - \phi(l^I) \quad (3.195)$$

3.6.3 Конфигурация магнитогравитационная ударная волна, магнитогравитационная волна разрежения и две альфвеновские волны в сжимаемых течениях

В данной конфигурации пять лучей, OA , OB , OC , OD и OE , разбивают течение на шесть областей (Рис.13). В области I параметры, задаваемые начальными условиями (3.172) для левой массы жидкости, не изменяются. Аналогично в области II параметры совпадают с начальными параметрами для правой массы жидкости. Лучи OA и OB , задаваемые уравнениями

$$x = y_1 t \quad x = y_2 t \quad (3.196)$$

где

$$y_1 = u_1^I - \sqrt{(a^I)^2 g + (B_1^I)^2} \quad y_2 = u_1^V - \sqrt{(a^V)^2 g + (B_1^V)^2} \quad (3.197)$$

ограничивают область центрированной волны разрежения Римана. Лучи OC и OD , определяемые соотношениями

$$x = y_3 t \quad x = y_4 t \quad (3.198)$$

где

$$y_3 = u_1^V - |B_1^V| \quad y_4 = u_1^V + |B_1^V| \quad (3.199)$$

являются альфвеновскими ударными волнами, а луч OE , задаваемый как $x = Dt$, является правой магнитогравитационной ударной волной.

Условия реализации данной конфигурации принимают вид

$$\begin{aligned} u_1^I - \sqrt{(a^I)^2 g + (B_1^I)^2} \leq u_1^V - \sqrt{(a^V)^2 g + (B_1^V)^2} \leq \\ \leq u_1^V - |B_1^V| \leq u_1^V + |B_1^V| \leq D \end{aligned} \quad (3.200)$$

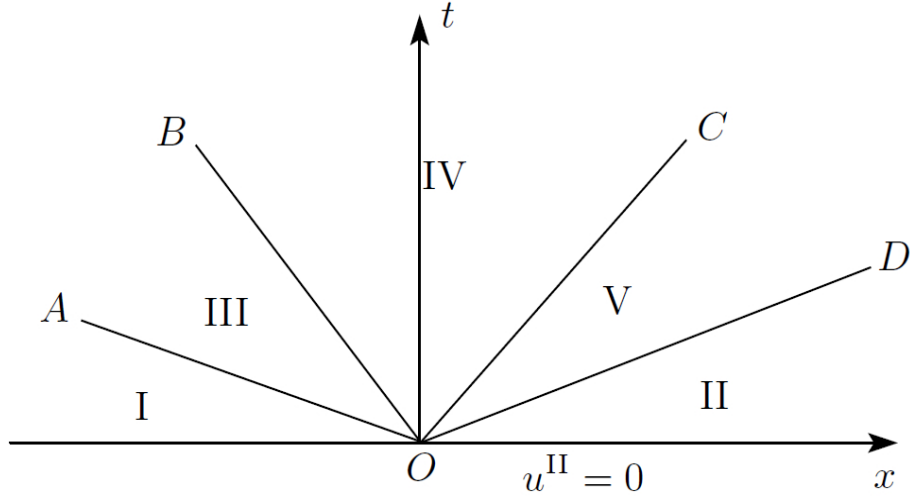


Рис. 13: Две магнитогравитационные ударные волны и две альфвеновские волны

Равенства в цепочке неравенств достигаются при вырождении соответствующих волн, как и в случае рассмотренной выше конфигурации. Для выполнения всей цепочки необходимо и достаточно, чтобы

$$l^{II} \leq l^{III} \leq l^I \quad (3.201)$$

Второе равенство соответствует вырождению центрированной магнитогравитационной волны Римана, обращенной назад, в зону постоянного течения, а первое - вырождению правой магнитогравитационной волны.

В областях *III*, *IV* и *V* выполняются соотношения

$$u_2^{IV} = \frac{1}{2}[u_2^{II} + u_2^I + \text{sign}(B_1)(B_2^I - B_2^{II})] \quad (3.202)$$

$$B_2^{IV} = \frac{1}{2}[\text{sign}(B_1)(u_2^{II} - u_2^I) + B_2^{II} + B_2^I] \quad (3.203)$$

Используя равенства $u_1^{III} = u_1^{IV} = u_1^V$, $B_1^{III} = B_1^{IV} = B_1^V$, $l^{III} = l^{IV} = l^V$, можно обозначить соответствующие параметры в областях *IV* и *V* индексом *III*.

Для области *III*, с одной стороны, выполняется условие постоянства инварианта Римана на магнитогравитационной волне разрежения, обращенной назад:

$$u_1^{III(1)} = u_1^I + \phi(l^I) - \phi(l^{III}) \quad (3.204)$$

с другой - условие для правой ударной волны:

$$u_1^{III(2)} = -\sqrt{\frac{(l^{II} - l^{III})(\psi^{II} - \psi^{III}) + (l^{II} - l^{III})^2(B_1^I l^I)^2 / (l^{II} l^{III})}{l^{II} l^{III}}} \quad (3.205)$$

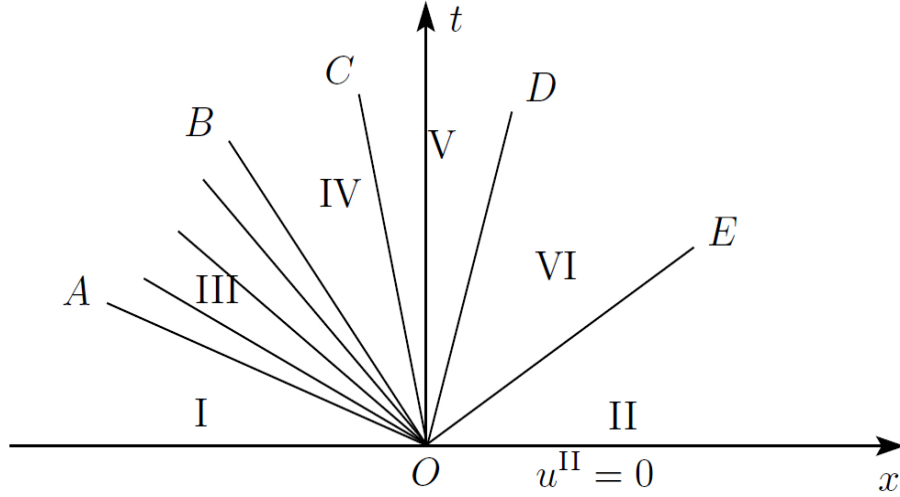


Рис. 14: Магнитогравитационная волна разрежения, обращенная назад, правая магнитогравитационная ударная волна и две альфвеновские волны

Первая функция является убывающей по переменной l^{III} , вторая - возрастающей, поэтому для существования и единственности корня на отрезке $[l^{II}, l^I]$ необходимо и достаточно, чтобы

$$u_1^{III(1)}(l^{II}) \geq u_1^{III(2)}(l^{II}) \quad u_1^{III(1)}(l^I) \geq u_1^{III(2)}(l^I) \quad (3.206)$$

т.е.

$$u_1^I \geq \phi(l^{II}) - \phi(l^I) \quad (3.207)$$

$$u_1^I \leq \sqrt{\frac{(l^I - l^{II})(\psi^I - \psi^{II}) + (l^I - l^{II})^2 (B_1^I l^I)^2 / (l^I l^{II})}{l^I l^{II}}}$$

Отметим, что при выполнении равенства в (3.207) решение соответствует случаю вырождения правой ударной волны и превращения её в волну разрежения.

Аналогично рассматриваем случай, когда влево распространяется магнитогравитационная ударная волна, а вправо — волна разрежения (Рис. 14).

3.6.4 Конфигурация две магнитогравитационные ударные волны и две альфвеновские ударные волны в сжимаемых течениях

В данной конфигурации область определения течения разбивается лучами OA , OB , OC и OD на пять областей (Рис.15). В каждой из этих областей течение постоянно. В области I параметры, задаваемые начальными условиями для левой массы жидкости не изменяются. Аналогично, в области II параметры совпадают с начальными параметрами для правой массы жидкости. Луч

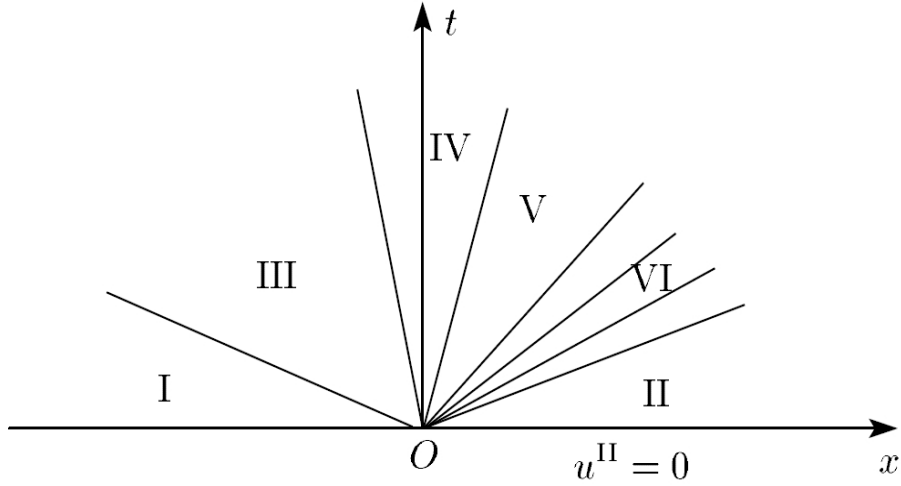


Рис. 15: Левая магнитогравитационная ударная волна, магнитогравитационная волна разрежения, обращенная вперед, и две альфвеновские волны

OA , задаваемый уравнением $x = D_1 t$ является левой магнитогравитационной ударной волной на которой должны выполняться условия (3.152-3.154). Аналогично, луч OD , определяемый соотношением $x = D_2 t$, является правой магнитогравитационной ударной волной, на которой должны выполняться условия (3.152-3.154).

Лучи OB и OD , определяемые соотношениями

$$x = y_1 t \quad x = y_2 t \quad (3.208)$$

где

$$y_1 = u_1^{III} - |B_1^{III}| \quad y_2 = u_1^V + |B_1^V| \quad (3.209)$$

являются альфвеновскими ударными волнами.

Необходимым условием реализации данной конфигурации является цепочка неравенств

$$D_1 \leq u_1^{III} - |B_1^{III}| \leq u_1^V + |B_1^V| < D_2 \quad (3.210)$$

Выполнение первого и последнего неравенств цепочки является следствием эволюционности ударных магнитогравитационных волн. Равенство в первом неравенстве цепочки достигается при вырождении левой магнитогравитационной волны в зону постоянного течения, а равенство скоростей альфвеновских ударных волн, как и выше, соответствует вырождению этих двух волн в одну.

При рассмотрении областей III , IV и V , граничащих с альфвеновскими волнами, можно провести рассуждения, аналогичные изложенным при рассмотрении предыдущей конфигурации, и получить

$$u_2^V = \frac{1}{2}[u_2^{VI} + u_2^{IV} + \text{sign}(B_1)(B_2^{VI} - B_2^{IV})] \quad (3.211)$$

$$B_2^V = \frac{1}{2}[\text{sign}(B_1)(u_2^{VI} - u_2^{IV}) + B_2^{VI} + B_2^{IV}] \quad (3.212)$$

Принимая во внимание равенства

$$u_1^{III} = u_1^{IV} = u_1^V \quad B_1^{III} = B_1^{IV} = B_1^V \quad l^{III} = l^{IV} = l^V \quad (3.213)$$

далее для соответствующих параметров из областей IV и V используем значения параметров с индексом III .

Соотношения для магнитогравитационных ударных волн, записанные в соответствующих областях, имеют вид

$$u_1^{III(1)} = u_1^I + \sqrt{\frac{(l^I - l^{III})(\psi^I - \psi^{III}) + (l^I - l^{III})^2(B_1^I l^I)^2 / (l^I l^{III})}{l^I l^{III}}} \quad (3.214)$$

$$u_1^{III(2)} = -\sqrt{\frac{(l^{II} - l^{III})(\psi^{II} - \psi^{III}) + (l^{II} - l^{III})^2(B_1^I l^I)^2 / (l^{II} l^{III})}{l^{II} l^{III}}} \quad (3.215)$$

соответственно для левой и правой магнитогравитационных ударных волн.

С учетом неравенств $l^{III} \geq l^I \geq l^{II}$ для ударных волн можно заметить, что первое выражение является убывающей функцией переменной l^{III} , а второе - возрастающей. Тогда, чтобы эти две функции имели единственный корень l^{III} на полуинтервале $[l^I; +\infty)$, необходимо и достаточно, чтобы $u_1^{III(1)}(l^I) \geq u_1^{III(2)}(l^I)$, откуда для выполнения этой конфигурации следует следующее условие для начальных данных:

$$u_1^I \geq \sqrt{\frac{(l^I - l^{II})(\psi^I - \psi^{II}) + (l^I - l^{II})^2(B_1^I l^I)^2 / (l^I l^{II})}{l^I l^{II}}} \quad (3.216)$$

Отметим, что при выполнении равенства в (3.216) решение соответствует случаю вырождения левой ударной волны и превращения ее в волну разрежения.

3.6.5 Конфигурация две гидродинамические волны Римана и зона вакуума в сжимаемых течениях

Если $B_1^I = B_1^{II} = 0$, то магнитогравитационные волны разрежения превращаются в гидродинамические волны Римана, и может реализовываться конфигурация "две гидродинамические волны Римана и зона вакуума"(Рис.16).

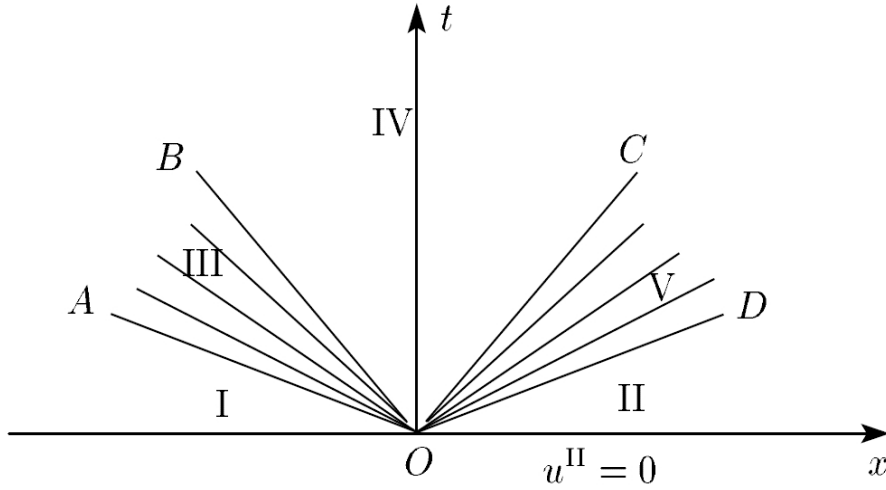


Рис. 16: Две гидродинамические волны Римана и зона вакуума

Условием ее реализации является

$$u_1^I < -2\sqrt{(a^I)^2 g} - 2\sqrt{(a^{II})^2 g} \quad (3.217)$$

Лучи OB и OC отделяют зону вакуума ($u_{1,2} = 0, B_{1,2} = 0, l = 0$) от зон, в которых величины u_2 и B_2 сохраняют начальные значения $u_2 = u_2^I$ и $B_2 = B_2^I$ слева и $u_2 = u_2^{II}$ и $B_2 = B_2^{II}$ справа, фактически являясь контактными разрывами.

3.6.6 Решение задачи Римана для сжимаемых течений. Сравнение с решением для несжимаемых течений

Таким образом, получены решения для произвольных начальных данных, удовлетворяющих условиям

$$\begin{aligned} B_1^I l^I &= B_1^{II} l^{II} & l^{II} &\neq 0 \\ l^I &\geq l^{II} > 0 & u_1^{II} &= 0 \end{aligned} \quad (3.218)$$

и

$$l^{II} = 0 \quad B_1^I = b_1^{II} = 0 \quad u_1^{II} = 0 \quad (3.219)$$

Для

$$u_1^I \geq \sqrt{\frac{(l^I - l^{II})(\psi^I - \psi^{II}) + (l^I - l^{II})^2 (B_1^I l^I)^2 / (l^I l^{II})}{l^I l^{II}}} \quad (3.220)$$

реализуется конфигурация "две магнитогравитационные ударные волны и две альфвеновские волны (Рис.13);

$$u_1^I \geq \phi(l^{II}) - \phi(l^I) \quad (3.221)$$

$$u_1^I \leq \sqrt{\frac{(l^I - l^{II})(\psi^I - \psi^{II}) + (l^I - l^{II})^2 (B_1^I l^I)^2 / (l^I l^{II})}{l^I l^{II}}}$$

- конфигурация "магнитогравитационная ударная волна, магнитогравитационная волна разряжения и две альфвеновские волны (Рис.14); для

$$u_1^I \leq \phi(l^{II}) - \phi(l^I) \quad (3.222)$$

- конфигурация "две магнитогравитационные волны разрежения и две альфвеновские волны (Рис.12);

$$B_1^I = B_1^{II} = 0 \quad u_1^I < -2\sqrt{(a^I)^2 g + (B_1^I)^2} - 2\sqrt{(a^{II})^2 g + (B_1^{II})^2} \quad (3.223)$$

- конфигурация "две гидродинамические волны Римана и зона вакуума (Рис.16).

Таким образом, найденные области начальных параметров, на которых реализуются все пять возможных конфигураций, полностью покрывают область начальных условий в формулировке задачи распада произвольного разрыва. Поскольку эти области не перекрываются, то найденное решение задачи Римана единственно.

Полученное решение задачи Римана помимо самостоятельной ценности является основополагающим для построения целого класса конечнообъемных численных методов сквозного счета, позволяющих рассчитывать как непрерывные, так и разрывные решения без выделения разрывов.

Покажем, что исходная система магнитогидродинамических уравнений сжимаемой мелкой воды (??-??), соотношения на разрыве Ранкина-Гюгонно (3.147-3.151) и решение задачи распада разрыва переходят в систему классических магнитогидродинамических уравнений мелкой воды для несжимаемой плазмы с соответствующими соотношениями на разрыве и решением задачи распада разрыва в случае, когда характерная высота h_0 слоя становится много меньше характерной плотностной высоты H_ρ , т.е. при $\epsilon = h_0/H_\rho \rightarrow 0$. Разложим функции l , a^2 из (3.30,??) в ряд Тейлора в окрестности $\epsilon = 0$:

$$l = \rho_h h \left(1 + \frac{\epsilon}{2(\gamma - 1)} + O(\epsilon^2)\right) \quad (3.224)$$

$$a^2 = h\left(1 - \frac{\epsilon}{2(\gamma - 1)} + O(\epsilon^2)\right) \quad (3.225)$$

Тогда в нулевом приближении $l \approx \rho_h h$, $a^2 \approx h$, и система (??-??) переходит при делении на $\rho_h = \text{const}$ в классические магнитогидродинамические уравнения мелкой воды. Разложение функции $\psi(l)$ в ряд по малому параметру ϵ дает

$$\psi = \rho_h g \frac{h^2}{2} (1 + O(\epsilon^2)) \quad (3.226)$$

Из (3.224,3.225,3.226) следует, что соотношения на разрыве Ранкина-Гюгонио (3.147-3.151) переходят в соответствующие соотношения для классической магнитной гидродинамики мелкой воды при $\epsilon \rightarrow 0$. Поскольку исходная система уравнений (??-??) и соотношения Ранкина-Гюгонио на разрыве (3.147-3.151) переходят в систему магнитогидродинамических уравнений для несжимаемых течений и ее соотношения на разрыве при $\epsilon \rightarrow 0$, то и все решения исходной системы перейдут в решения для несжимаемой плазмы. Используя разложения для l , a^2 и ϕ запишем решения задачи Римана с точностью до $o(\epsilon)$. В этих уравнениях ϕ_0 - функции, описывающие альфвеновские волны для несжимаемого случая. Решениями будут являться следующие конфигурации:

$$u_1^I \geq ((h^I - h^{II}) \sqrt{\frac{g(h^I + h^{II})/2 + (B_1^I h^I)^2/h^I h^{II}}{h^I h^{II}}}) (1 + \alpha\epsilon) \quad \alpha > 0 \quad (3.227)$$

- конфигурация "две магнитогравиационные ударные волны и две альфвеновские волны"

$$\begin{aligned} u_1^I &\geq (\phi_0(h^{II}) - \phi_0(h^I))(1 - \beta\epsilon) \quad \beta > 0 \\ u_1^I &\leq ((h^I - h^{II}) \sqrt{\frac{g(h^I + h^{II})/2 + (B_1^I h^I)^2/h^I h^{II}}{h^I h^{II}}}) (1 + \alpha\epsilon) \quad \alpha > 0 \end{aligned} \quad (3.228)$$

- конфигурация "магнитогравиационная ударная волна, магнитогравиационная волна разрежения и две альфвеновские волны"

$$u_1^I \leq (\phi_0(h^{II}) - \phi_0(h^I))(1 - \beta\epsilon) \quad \beta > 0 \quad (3.229)$$

- конфигурация "две магнитогравиационные волны разрежения и две альфвеновские волны"

$$B_1^I = B_1^{II} = 0 \quad u_1^I < (-2\sqrt{gh^I} - 2\sqrt{gh^{II}}) \left(1 - \frac{1}{4(\gamma - 1)}\epsilon\right) \quad (3.230)$$

- конфигурация "две гидродинамические волны Римана и зона вакуума".

Как видно, конфигурации и решение задачи распада разрыва в случае приближения мелкой воды для сжимаемой магнитной жидкости переходят в конфигурации и решение задачи распада разрыва для классических магнитогидродинамических уравнений мелкой воды несжимаемой жидкости при предельном переходе $\epsilon \rightarrow 0$. Проведенный анализ показывает, что изменились границы между областями в решении задачи распада разрыва для сжимаемых течений по сравнению с несжимаемыми.

Видно, что уменьшилась область начальных условий, при которых реализуется конфигурация "две гидродинамические волны Римана и зона вакуума". Область начальных условий, которая реализовывала эту конфигурацию изменилась, расширив область начальных условий для конфигурации "две магнитогравитационные волны разрежения и две альфвеновские волны". Кроме того увеличилась область начальных условий, при которых реализуется конфигурация "магнитогравитационная ударная волна, магнитогравитационная волна разрежения и две альфвеновские волны". Область начальных условий, реализующая конфигурации "две магнитогравитационные волны разрежения и две альфвеновские волны" и "две магнитогравитационные ударные волны и две альфвеновские волны" теперь частично реализует конфигурацию "магнитогравитационная ударная волна, магнитогравитационная волна разрежения и две альфвеновские волны".

Полученное решение задачи Римана на ровной границе позволяет получить решение на наклонной плоскости, используя замену переменных (??). Таким образом, на наклонной плоскости реализуются те же конфигурации, что и в случае ровной границы. Также не меняются условия реализации для каждой из конфигураций, но решения внутри конфигураций качественно отличаются от решений на плоской границе. Вместо областей с однородным течением теперь реализуются области равноускоренного течения. Характеристики и ударные волны распространяются по параболическим траекториям.

3.7 Выводы

Получена система магнитогидродинамических уравнений вращающейся сжимаемой плазмы в приближении мелкой воды над неоднородной границей. Полу-

ченная система нетривиальным образом зависит от формы подстилающей поверхности, а также отношения характерного вертикального масштаба течения и масштаба высот, на котором вариация плотности становится существенной. В отличие от магнитогидродинамических уравнений мелкой воды для несжимаемой плазмы, высота свободной поверхности не является определяющей характеристикой для описания течений, так как закон сохранения массы записывается через новую переменную, которая зависит от плотности жидкости и высоты столба. Динамика течений, описываемых полученной системой в случаях когда характерная плотностная высота много меньше характерной высоты слоя, существенно отличается от случая, описываемого системой магнитогидродинамических уравнений несжимаемой плазмы в приближении мелкой воды, вследствие различия выражений для скорости распространения слабых возмущений и того, что в качестве параметра используется переменная, нетривиально связанная с высотой слоя, несмотря на формальную аналогию гиперболической структуры систем уравнений для обеих моделей.

На основе предложенной системы уравнений получены новые магнитогидродинамические уравнения мелкой воды для сферических течений в приближении β -плоскости с учетом крупномасштабной сжимаемости. Развита теория линейных волн на основе предложенных уравнений. Полученные дисперсионные соотношения для волн магнито-Пуанкаре, магнитострофических волн и волн магнито-Россби существенно образом зависят как от высоты свободной поверхности, так и от величины, характеризующей степень изменения плотности вследствие статической сжимаемости, а также от термодинамических характеристик плазмы. Исследование линейных волн в магнитной гидродинамике вращающейся плазмы с учетом крупномасштабной сжимаемости показывает зависимость групповых скоростей волн магнито-Пуанкаре, магнитострофических волн, волн магнито-Россби от степени сжимаемости плазмы. Несмотря на изменения в кривизне дисперсионных кривых линейных волн в обеих моделях, сохраняются те же самые условия реализации трехволновых взаимодействий в приближении слабой нелинейности, что и в случае несжимаемой плазмы.

Методом многомасштабных разложений получены коэффициенты взаимодействия трех волн в приближении слабой нелинейности. Найдены зависимости

коэффициентов взаимодействия для волн магнито-Пуанкаре и магнитоострофических волн, для волн магнито-Россби во внешнем вертикальном магнитном поле, а также для волн магнито-Россби в горизонтальном магнитном поле от величины изменения плотности, вызванного крупномасштабной сжимаемостью. Аналогичные зависимости найдены для инкрементов параметрических неустойчивостей.

Исследована нелинейная динамика магнитогидродинамических течений сжимаемой жидкости в приближении мелкой воды без вращения на ровной границе. В явном виде найдены все непрерывные (магнитогравитационные волны и альфвеновские волны) и разрывные (ударные магнитогравитационные волны и альфвеновские разрывные волны) решения системы. Найдены все центрированные автомодельные решения. Решена задача распада произвольного разрыва для уравнений магнитной гидродинамики сжимаемой жидкости в приближении мелкой воды над ровной поверхностью. Показано, что решение представляет собой одну из пяти конфигураций: "две магнитогравитационные ударные волны и две альфвеновские волны" "две центрированные магнитогравитационные волны разрежения и две альфвеновские волны" "левая магнитогравитационная ударная волна, магнитогравитационная волна разрежения, обращенная вперед, и две альфвеновские волны" "магнитогравитационная волна разрежения, обращенная назад, правая магнитогравитационная волна и две альфвеновские волны" "две гидродинамические волны Римана и зона вакуума". Для каждой конфигурации найдены необходимые и достаточные условия реализации. Проведен сравнительный анализ полученного решения с решением классической задачи Римана для магнитной гидродинамики несжимаемой жидкости в приближении мелкой воды. Учет сжимаемости магнитной жидкости в приближении мелкой воды приводит к изменению границ областей начальных условий, реализующих различные конфигурации решения задачи Римана. Область начальных условий, при которой реализуется конфигурация "две центрированные магнитогравитационные волны разрежения и две альфвеновские волны" уменьшается по сравнению с классической несжимаемой моделью магнитогидродинамических течений в приближении мелкой воды, а область начальных условий, при которой реализуется конфигурация "магнитогравитационная волна разрежения,

магнитогравитационная волна и две альфвеновские волны увеличивается. Конфигурация "две гидродинамические волны Римана и зона вакуума" может быть реализована только при равенстве нулю нормальной составляющей магнитного поля.

Найдены непрерывные решения системы на наклонной плоскости в виде обобщенных волн Римана. Показано, что характеристиками волн являются параболы. Найдены разрывные решения, которые распространяются вдоль параболических характеристик. Показано, что волны на наклонной поверхности отличаются тем, что в областях с однородным течением теперь реализуется равноускоренное течение. Решение задачи Римана обобщено на случай наклонной поверхности. Наличие наклонного профиля подстилающей поверхности приводит к качественному изменению решений в реализуемых конфигурациях: вместо областей с однородным течением реализуются области ускоренного течения, характеристики и ударные волны распространяются по параболическим траекториям.

Заключение

Развита теория вращающихся магнитогидродинамических течений в приближении мелкой воды во внешнем вертикальном магнитном поле на неровной границе. Показано, что структура магнитогидродинамических течений мелкой воды существенно модифицируется в случае наличия внешнего вертикального магнитного поля. Для описания динамики магнитного поля в рассматриваемом течении, необходим учет вертикальной компоненты магнитного поля. Таким образом, магнитное поле в системе принципиально трехкомпонентно, в то время как поле скоростей двухкомпонентно. При этом условие бездивергентности, содержащее три компоненты вектора магнитного поля, в новой системе выполняется тождественно как следствие уравнений магнитной индукции при задании корректных начальных условий. При отсутствии же внешнего вертикального магнитного поля, как хорошо известно, в приближении мелкой воды магнитное поле двумерно. Таким образом, сделан вывод о невозможности анализа волн магнитной гидродинамики во внешнем вертикальном поле с использованием двумерных уравнений магнитной гидродинамики, и показано, что в качестве исходных необходимо использовать усредненные по высоте магнитогидродинамические уравнения. Показано, что предложенная система уравнений в частном случае отсутствия вертикального магнитного поля переходит в известную систему магнитогидродинамических уравнений мелкой воды.

Полученная система уравнений обобщена на случай сжимаемой плазмы над неоднородной границей. Новая система нетривиальным образом зависит от формы подстилающей поверхности, а также отношения характерного вертикального масштаба течения и масштаба высот, на котором вариация плотности становится существенной. В отличие от магнитогидродинамических уравнений мелкой воды для несжимаемой плазмы, высота свободной поверхности не является определяющей характеристикой для описания течений, так как закон сохранения массы записывается через новую переменную, которая зависит от плотности жидкости и высоты столба. Динамика течений, описываемых полученной системой в случаях, когда характерная плотностная высота много меньше характерной высоты слоя, существенно отличается от случая, описываемого системой магнитогидродинамических уравнений несжимаемой жидкости мелкой

воды, вследствие различия выражений для скорости распространения слабых возмущений и того, что в качестве параметра используется переменная, нетривиально связанная с высотой слоя, несмотря на формальную аналогию гиперболической структуры систем уравнений для обеих моделей.

Показано, что наличие вертикального магнитного поля обеспечивает выполнение условий синхронизма, а именно три волны могут взаимодействовать, когда частоты и волновые векторы двух волн таковы, что сумма их частот равна частоте третьей волны и одновременно сумма волновых векторов этих волн равна волновому вектору третьей волны. В результате анализа дисперсионных поверхностей исследуемых волн обнаружено, что такое условие может выполняться для следующих конфигураций трех волн: три волны магнито-Пуанкаре, три магнитострофические волны, а также две магнитострофические волны и одна магнито-Пуанкаре волна и две магнито-Пуанкаре волны и одна магнитострофическая волна. Найдены дисперсионные соотношения для линейных волн в горизонтальном (тороидальном и полоидальном) магнитном поле. Показано наличие трехволновых взаимодействий в течении в горизонтальном магнитном поле. При учете крупномасштабной сжимаемости дисперсионные соотношения для дисперсионных соотношений модернизируются.

Асимптотическим методом многомасштабных разложений получено слабонелинейное решение задачи взаимодействия волн во внешнем вертикальном магнитном поле и в горизонтальном магнитном поле. Для каждого из обнаруженных видов взаимодействий найдены системы нелинейных уравнений для медленно меняющихся амплитуд взаимодействующих волн, в которых коэффициенты определяются начальными условиями задачи и различаются для различных трехволновых конфигураций.

Показано, что в слабонелинейном приближении полученные системы уравнений для волн во внешнем вертикальном магнитном поле и в горизонтальном магнитном поле предсказывают распадные неустойчивости и явления параметрического усиления. Для каждого типа неустойчивости и для каждой конфигурации трех волн найдены коэффициенты усиления.

Проведен линейный и слабонелинейный анализ волн магнито-Россби в магнитогидродинамическом приближении мелкой воды, представляющих собой круп-

номасштабные волны, возникающие вследствие неоднородности силы Кориолиса в зависимости от широты на сфере, распространяющиеся вследствие сохранения полной завихренности во вращающейся плазме, по аналогии с нейтральной жидкостью. Получены магнитогидродинамические уравнения мелкой воды на β -плоскости во внешнем магнитном поле с учетом тождеств, обеспечивающих бездивергентность магнитного поля в приближенных уравнениях. Также рассмотрен случай отсутствия внешнего магнитного поля, в котором система уравнений мелкой воды сводится к традиционной и имеет стационарные решения в виде горизонтальных (полоидального, тороидального и их суммы) магнитных полей. Система уравнений на β -плоскости обобщена на случай сжимаемых течений. Выписаны дисперсионные соотношения для волн магнито-Россби во внешнем вертикальном магнитном поле и в горизонтальном (тороидальном и полоидальном) магнитном поле.

Приближение мелкой воды магнитной гидродинамики использовано для развития слабонелинейной теории волн магнито-Россби во внешнем вертикальном магнитном поле и при отсутствии вертикального магнитного поля для стационарных состояний наличия горизонтального поля (полоидального, тороидального и их суммы). Показано, что учет крупномасштабной сжимаемости приводит к изменению фазовой и групповой скоростей волн магнито-Россби. Качественный анализ дисперсионных кривых волн магнито-Россби в магнитной гидродинамике показал возможность трехволновых взаимодействий в приближении слабой нелинейности. Аналогично волны магнито-Россби в сжимаемой магнитогидродинамической плазме в приближении мелкой воды испытывают трехволновые взаимодействия. Методом многомасштабных асимптотических разложений развита слабонелинейная теория волн магнито-Россби и получены трехволновые уравнения для медленно меняющихся амплитуд. Приближенный анализ полученных систем уравнений для медленных амплитуд показал, что в системе могут развиваться два типа параметрических неустойчивостей: параметрический распад и параметрическое усиление волн магнито-Россби. Получены инкременты найденных неустойчивостей для случая течения во внешнем вертикальном магнитном поле и в отсутствии внешнего поля на фоне стационарного состояния в виде горизонтального магнитного поля. Анало-

гично проведено исследование слабонелинейных волн магнито-Росби в сжимаемых течениях, получены уравнения трехволновых взаимодействий и найдены инкременты параметрических неустойчивостей.

Исследована нелинейная динамика магнитогидродинамических течений сжимаемой жидкости в приближении мелкой воды в отсутствие вращения на ровной границе. В явном виде найдены все непрерывные (магнитогравитационные волны и альфвеновские волны) и разрывные (ударные магнитогравитационные волны и альфвеновские разрывные волны) решения системы. Найдены все центрированные автомодельные решения. Решена задача распада произвольного разрыва для уравнений магнитной гидродинамики сжимаемой жидкости в приближении мелкой воды над ровной поверхностью. Показано, что решение представляет собой одну из пяти конфигураций: "две магнитогравитационные ударные волны и две альфвеновские волны" "две центрированные магнитогравитационные волны разрежения и две альфвеновские волны" "левая магнитогравитационная ударная волна, магнитогравитационная волна разрежения, обращенная вперед, и две альфвеновские волны" "магнитогравитационная волна разрежения, обращенная назад, правая магнитогравитационная волна и две альфвеновские волны" "две гидродинамические волны Римана и зона вакуума". Для каждой конфигурации найдены необходимые и достаточные условия реализации. Проведен сравнительный анализ полученного решения с решением классической задачи Римана для магнитной гидродинамики несжимаемой жидкости в приближении мелкой воды. Учет сжимаемости магнитной жидкости в приближении мелкой воды приводит к изменению границ областей начальных условий, реализующих различные конфигурации решения задачи Римана. Область начальных условий, при которой реализуется конфигурация "две центрированные магнитогравитационные волны разрежения и две альфвеновские волны" уменьшается по сравнению с классической несжимаемой моделью магнитогидродинамических течений в приближении мелкой воды, а область начальных условий, при которой реализуется конфигурация "магнитогравитационная волна разрежения, магнитогравитационная волна и две альфвеновские волны" увеличивается. Конфигурация "две гидродинамические волны Римана и зона вакуума" может быть реализована только при равенстве нулю нормальной

составляющей магнитного поля.

Найдены непрерывные решения системы на наклонной плоскости в виде обобщенных волн. Показано, что характеристиками волн являются параболы. Найдены разрывные решения, которые распространяются вдоль параболических характеристик. Показано, что волны на наклонной поверхности отличаются тем, что в областях с однородным течением теперь реализуется равноускоренное течение. Решение задачи Римана обобщено на случай наклонной поверхности. Наличие наклонного профиля подстилающей поверхности приводит к качественному изменению решений в реализуемых конфигурациях: вместо областей с однородным течением реализуются области ускоренного течения, характеристики и ударные волны распространяются по параболическим траекториям.

Автор глубоко признателен своему научному руководителю, Петросяну Аракеку Саркисовичу, за постановку задач, за помощь в исследованиях и в интерпретации результатов, за поддержку и готовность к научному общению на протяжении всего времени выполнения работы. Также автор благодарит коллектив сектора 53.9 за продуктивные обсуждения. Автор выражает благодарность всему коллективу кафедры Космической физики во главе с Л.М.Зеленым, в особенности А.М.Садовскому, Д.Р.Шкляру и Т.М.Буринской за курсы лекций по физике плазмы, прочитанные ими автору. Автор признателен С.Ю.Доброхотову за полезные обсуждения асимптотических методов многих масштабов.

Список литературы

- [1] Zaqarashvili, T.V., Oliver, R., Ballester, J.L., Shergelashvili, B.M. Rossby waves in shallow water magnetohydrodynamics. *Astronomy & Astrophysics* 470(3) (2007): 815-20.
- [2] Gilman, Peter A. "Magnetohydrodynamic "shallow water" equations for the solar tachocline." *The Astrophysical Journal Letters* 544.1 (2000): L79.
- [3] Miesch, Mark S., and Peter A. Gilman. "Thin-shell magnetohydrodynamic equations for the solar tachocline." *Solar Physics* 220.2 (2004): 287-305.

- [4] Heng, Kevin, and Anatoly Spitkovsky. "Magnetohydrodynamic shallow water waves: linear analysis." *The Astrophysical Journal* 703.2 (2009): 1819.
- [5] Spitkovsky, Anatoly, Yuri Levin, and Greg Ushomirsky. "Propagation of thermonuclear flames on rapidly rotating neutron stars: extreme weather during type I X-ray bursts." *The Astrophysical Journal* 566.2 (2002): 1018.
- [6] Inogamov N.A. and Sunyaev R., Spread of matter over a neutron star surface during disk accretion, *Astronomy Letters*, 25, 269, 1999.
- [7] Inogamov, N. A., and R. A. Sunyaev. "Spread of matter over a neutron-star surface during disk accretion: Deceleration of rapid rotation." *Astronomy Letters* 36.12 (2010): 848-894.
- [8] Umurhan, O. M. "Potential vorticity dynamics in the framework of disk shallow-water theory-I. The Rossby wave instability." *Astronomy & Astrophysics* 521 (2010): A25.
- [9] Umurhan, O. M. "Potential vorticity dynamics in the framework of disk shallow-water theory-II. Mixed barotropic-baroclinic instability." *Astronomy & Astrophysics* 543 (2012): A124.
- [10] Cho, James Y-K. "Atmospheric dynamics of tidally synchronized extrasolar planets." *Philosophical Transactions of the Royal Society A: Mathematical, Physical and Engineering Sciences* 366.1884 (2008): 4477-4488.
- [11] Kevin Heng and Jared Workman, Analytical Models of Exoplanetary Atmospheres. I. Atmospheric Dynamics via the Shallow Water System, *The Astrophysical Journal Supplement Series*, Vol.213, 2, p. 27, 2014
- [12] Heng, Kevin and Showman, Adam P., Atmospheric Dynamics of Hot Exoplanets, *Annual Review of Earth and Planetary Sciences*, Vol. 43, 1, p. 509-540, 2015
- [13] Gilman, Peter A, Stability of baroclinic flows in a zonal magnetic field: Part I, *Journal of the Atmospheric Sciences*, Vol. 24, 2, p. 101-118, 1967

- [14] Tobias, Steven M and Diamond, Patrick H and Hughes, David W, Beta-plane magnetohydrodynamic turbulence in the solar tachocline, *The Astrophysical Journal Letters*, Vol. 667, 1, p. L113, 2007
- [15] Alexander M. Balk, Large-Scale Quasi-geostrophic Magnetohydrodynamics, *The Astrophysical Journal*, Vol. 796, 2, p. 143, 2014
- [16] Карельский, К. В., А. С. Петросян, and С. В. Тарасевич. "Нелинейная динамика магнитогидродинамических течений тяжелой жидкости в приближении мелкой воды." *Журнал экспериментальной и теоретической физики* 140.3 (2011): 606-620.
- [17] Karelsky, K. V., A. S. Petrosyan, and S. V. Tarasevich. "Nonlinear dynamics of magnetohydrodynamic shallow water flows over an arbitrary surface." *Physica Scripta* 2013.T155 (2013): 014024.
- [18] De Sterck, Hans. "Hyperbolic theory of the "shallow water" magnetohydrodynamics equations." *Physics of plasmas* 8.7 (2001): 3293-3304.
- [19] Dellar, Paul J. "Dispersive shallow water magnetohydrodynamics." *Physics of Plasmas* 10.3 (2003): 581-590.
- [20] Zeitlin, V. "Remarks on rotating shallow-water magnetohydrodynamics." *Nonlinear Processes in Geophysics* 20.5 (2013): 893-898.
- [21] Aristov, S. N., and P. G. Frik. "Nonlinear effects of the Ekman layer on the dynamics of large-scale eddies in shallow water." *Journal of applied mechanics and technical physics* 32.2 (1991): 189-194.
- [22] Аристов, С. Н., and К. Г. Шварц. "Вихревые течения в тонких слоях жидкости." Киров: ВятГУ (2011).
- [23] Климачков Д.А., Петросян А.С., Нелинейные взаимодействия волн в магнитной гидродинамике астрофизической плазмы в приближении мелкой воды, *ЖЭТФ*, Том 149, Вып. 5, стр. 965, 2016

- [24] Klimachkov D.A., Petrosyan A.S., Parametric Instabilities in Shallow Water Magnetohydrodynamics of Astrophysical Plasma in External Magnetic Field, *Phys. Lett. A*, 381, p.106, 2017
- [25] G. K. Vallis, *Atmospheric and Oceanic Fluid Dynamics: Fundamentals and Large-Scale Circulation*, Cambridge Univ. Press (2006).
- [26] L. Ostrovsky, *Asymptotic Perturbation Theory of Waves*, World Sci., Singapore (2014).
- [27] G. Falkovich, *Fluid Mechanics: a Short Course for Physicists*, Cambridge Univ. Press (2011).
- [28] A. D. Craik, *Wave interactions and fluid flows*, Cambridge Univ. Press (1988).
- [29] Галеев, А. А., and Р. З. Сагдеев. "Нелинейная теория плазмы." *Вопросы теории плазмы* 7 (1973): 3.
- [30] Dikpati, Mausumi, and Paul Charbonneau. "A Babcock-Leighton flux transport dynamo with solar-like differential rotation." *The Astrophysical Journal* 518.1 (1999): 508.
- [31] D. W. Hughes, R. Rosner and N. O. Weiss, *The Solar Tachocline*, Cambridge University Press (2007).
- [32] T. V. Zaqarashvili, R. Oliver, J. L. Ballester, M. Carbonell, M. L. Khodachenko, H. Lammer, M. Leitzinger, and P. Odert, *Astron. Astrophys.* 532, A139 (2011).
- [33] McIntosh, Scott W., et al. "The detection of Rossby-like waves on the Sun." *Nature Astronomy* 1.4 (2017): 0086.
- [34] Kuhn, J. R., et al. "Rossby waves on the Sun as revealed by solar 'hills'." *Nature* 405.6786 (2000): 544.
- [35] Lou, Yu-Qing. "Rossby-type wave-induced periodicities in flare activities and sunspot areas or groups during solar maxima." *The Astrophysical Journal* 540.2 (2000): 1102.

- [36] Gibson Sarah E., Vourlidis Angelos, Hassler Donald M., Rachmeler Laurel A., Thompson Michael J., Newmark Jeffrey, Velli Marco, Title Alan, McIntosh Scott W. "Solar Physics From Unconventional Viewpoints", *Frontiers in Astronomy and Space Sciences*, Vol.5, 2018
- [37] Zaqarashvili, Teimuraz V., et al. "Magnetic Rossby waves in the solar tachocline and Rieger-type periodicities." *The Astrophysical Journal* 709.2 (2010): 749.
- [38] Zaqarashvili, Teimuraz V., et al. "Long-term variation in the Sun's activity caused by magnetic Rossby waves in the tachocline." *The Astrophysical Journal Letters* 805.2 (2015): L14.
- [39] McIntosh, Scott W., et al. "The solar magnetic activity band interaction and instabilities that shape quasi-periodic variability." *Nature Communications* 6 (2015): 6491..
- [40] В. И. Петвиашвили, О. А. Похотелов, *Уединенные волны в плазме и атмосфере*, Энергоатомиздат (1989).
- [41] Connaughton, Colm, Sergey Nazarenko, and Brenda Quinn. "Rossby and drift wave turbulence and zonal flows: the Charney–Hasegawa–Mima model and its extensions." *Physics Reports* 604 (2015): 1-71.
- [42] Zaqarashvili, T. V., R. Oliver, and J. L. Ballester. "Global shallow water magnetohydrodynamic waves in the solar tachocline." *The Astrophysical Journal Letters* 691.1 (2009): L41.
- [43] Климачков Д.А., Петросян А.С., Нелинейная теория магнитогидродинамических течений сжимаемой жидкости в приближении мелкой воды, *ЖЭТФ*, Том 150, Вып. 3, стр. 602, 2016
- [44] К. В. Карельский, А. С. Петросян, А. В. Черняк, Нелинейная динамика течений тяжелого сжимаемого газа в приближении мелкой воды, *ЖЭТФ* 141, 1206 (2012).
- [45] Карельский, К. В., А. С. Петросян, А. В. Черняк, Нелинейная теория течений сжимаемого газа в поле силы тяжести в приближении мелкой воды

над неоднородной границей, Журнал экспериментальной и теоретической физики 143.4 (2013): 779-798.

- [46] Климачков, Д. А., and А. С. Петросян. "Волны Россби в магнитной гидродинамике вращающейся плазмы в приближении мелкой воды." Журнал экспериментальной и теоретической физики 152.4 (2017): 705-721.
- [47] Б. Зельдович, Ю. Райзер, *Физика ударных волн и высокотемпературных явлений*, Наука (1966).
- [48] Karelsky, K. V., A. S. Petrosyan, and A. G. Slavin. "A finite-difference representation of the Coriolis force in numerical models of Godunov type for rotating shallow water flows." Russian Journal of Numerical Analysis and Mathematical Modelling 24.3 (2009): 229-259.
- [49] Рождественский Б.Л., Яненко Н.Н., *Системы квазилинейных уравнений и их приложения к газовой динамике*, Наука, (1968)
- [50] Годунов, С.К, *Разностный метод численного расчета разрывных решений уравнений гидродинамики*, Математический сборник 47.3 (1959): 271-306.
- [51] Karelsky, K. V., et al. "Particular solutions of shallow-water equations over a non-flat surface." Physics Letters A 271.5-6 (2000): 341-348.
- [52] В. Н. Ораевский, Основы физики плазмы 2, 7 (1984).
- [53] Andersson, Nils, Kostas Kokkotas, and Bernard F. Schutz. "Gravitational radiation limit on the spin of young neutron stars." The Astrophysical Journal 510.2 (1999): 846.
- [54] Lou, Y. Q. Magnetohydrodynamic tidal waves on a spinning magnetic compact star. The Astrophysical Journal Letters, 563(2), L147 (2001).
- [55] Lou, Yu-Qing, and Biao Lian. "Three-dimensional hydrodynamic instabilities in stellar core collapses." Monthly Notices of the Royal Astronomical Society 420.3 (2012): 2147-2161.

- [56] Márquez-Artavia, X., C. A. Jones, and S. M. Tobias. "Rotating magnetic shallow water waves and instabilities in a sphere." *Geophysical & Astrophysical Fluid Dynamics* 111.4 (2017): 282-322.
- [57] Raphaldini, Breno, and Carlos FM Raupp. "Nonlinear dynamics of magnetohydrodynamic Rossby waves and the cyclic nature of solar magnetic activity." *The Astrophysical Journal* 799.1 (2015): 78.
- [58] Löptien, Björn, et al. "Global-scale equatorial Rossby waves as an essential component of solar internal dynamics." *Nature Astronomy* 2.7 (2018): 568.
- [59] Lanza, A. F., et al. "Magnetic activity in the photosphere of CoRoT-Exo-2a-Active longitudes and short-term spot cycle in a young Sun-like star." *Astronomy & Astrophysics* 493.1 (2009): 193-200.
- [60] Bonomo, Aldo S., and Antonino F. Lanza. "Starspot activity and rotation of the planet-hosting star Kepler-17." *Astronomy & Astrophysics* 547 (2012): A37.
- [61] Должанский, Ф. *Основы геофизической гидродинамики*, Litres, 2018.
- [62] Л. Д. Ландау, Е. М. Лифшиц, *Электродинамика сплошных сред*, Наука (1982).
- [63] Дж. Бэтчелор, *Введение в динамику жидкости*, Мир (1973).
- [64] V. Vojarevics and K. Pericleous, *Proceedings of the joint 15th Riga and 6th PAMIR international conference* 2, 87 (2005).
- [65] Karelsky, K. V., and A. S. Petrosyan. "Particular solutions and Riemann problem for modified shallow water equations." *Fluid dynamics research* 38.5 (2006): 339.
- [66] Newell, Alan C. "Rossby wave packet interactions" *Journal of Fluid Mechanics* 35.2 (1969): 255-271.