

На правах рукописи

Федотова Мария Андреевна

**МАГНИТОГИДРОДИНАМИЧЕСКАЯ ТЕОРИЯ
ВОЛНОВЫХ ПРОЦЕССОВ ВО ВРАЩАЮЩЕЙСЯ
СТРАТИФИЦИРОВАННОЙ ПЛАЗМЕ**

Специальность:
01.04.02 – Теоретическая физика

АВТОРЕФЕРАТ
диссертации на соискание учёной степени
кандидата физико-математических наук

Москва – 2022

Работа выполнена
в Федеральном государственном бюджетном учреждении науки
Институте космических исследований Российской академии наук
(ИКИ РАН)

Научный руководитель: **Петросян Араке́л Саркисович**
доктор физико-математических наук, профессор,
ИКИ РАН

Официальные оппоненты: **Зыбин Кирилл Петрович**
член-корреспондент РАН, доктор физико-математических
наук, Физический институт имени П. Н. Лебедева РАН

Соколов Дмитрий Дмитриевич
доктор физико-математических наук, профессор,
Московский государственный университет
имени М. В. Ломоносова

Ведущая организация: Федеральное государственное бюджетное учреждение
науки Институт физики Земли имени О. Ю. Шмидта
Российской академии наук (ИФЗ РАН)

Защита диссертации состоится
на заседании диссертационного совета Д 002.113.03 Института космических
исследований РАН по адресу: Москва, ул. Профсоюзная, 84/32, ИКИ РАН,
подъезд А2 (конференц-зал).

С диссертацией можно ознакомиться в библиотеке ИКИ РАН
и на сайте <http://www.iki.rssi.ru/diss/2022/fedotova.htm>.

Автореферат разослан

Учёный секретарь
диссертационного совета Д 002.113.03
кандидат физико-математических наук



О. Ю. Цупко

ОБЩАЯ ХАРАКТЕРИСТИКА РАБОТЫ

Актуальность работы

Изучение фундаментальных свойств астрофизической плазмы помогает понять детальную эволюцию плазменных объектов, наблюдаемых во Вселенной, таких как Солнце, звёзды, планетные системы, галактики и скопления галактик. В последнее время активно развиваются теоретические и численные исследования, направленные на решение проблемы описания и изучения многомасштабных течений астрофизической плазмы путём исследования общих свойств, характеризующих объекты во Вселенной. Целый ряд новых приложений, возникших в последние годы, актуализирует задачу изучения крупномасштабных магнитогиродинамических течений. С одной стороны, магнитная гидродинамика вращающихся течений — предмет исследования в области динамики плазмы, как самостоятельного раздела теоретической физики. Поэтому результаты диссертационной работы самодостаточны и имеют непосредственное фундаментальное значение. С другой стороны, изучение таких течений имеет непосредственное отношение к астрофизике. Полученные в работе теоретические результаты имеют большое значение для понимания и предсказательного моделирования вращающихся астрофизических объектов. Течения в плазменной астрофизике, так же как течения в геофизике, как правило, являются стратифицированными. Учёт стратификации в магнитогиродинамических моделях вращающейся плазмы важен для анализа множества астрофизических объектов и явлений, например, процессов в солнечном тахоклине (тонком слое внутри Солнца, находящемся над конвективной зоной), в устойчиво-стратифицированных областях в недрах звёзд (излучающей зоны) и планет (внешний жидкий слой ядра), в астрофизических дисках, в экзопланетах и осциллирующих вращающихся звёзд и Солнца. Кроме того, учёт стратификации позволяет существенно расширить возможности для интерпретации новых данных наблюдений крупномасштабных волн Россби на Солнце. Важным принципиальным отличием течений астрофизической плазмы выступает свойство сжимаемости, характеризующее большинство наблюдаемых объектов во Вселенной. Отметим, что первые экспериментальные

наблюдения крупномасштабных течений астрофизической плазмы выполнены на основе изучения магнитных полей или методами астросейсмологии, что естественным образом мотивирует развитие магнитогидродинамической теории с учётом как эффектов сжимаемости, так и эффектов магнитных полей.

Полная система уравнений магнитной гидродинамики вращающейся плазмы в поле силы тяжести сложна как для аналитического исследования, так и для численного моделирования. Поэтому актуальна разработка приближённых моделей, описывающих течения астрофизической плазмы на глобальных масштабах. Приближение мелкой воды представляется одним из основных магнитогидродинамических приближений, используемых для изучения крупномасштабных процессов во вращающейся астрофизической плазме. При выводе магнитогидродинамических уравнений в приближении мелкой воды из полной системы уравнений магнитной гидродинамики несжимаемой плазмы усреднением по высоте слоя предполагается, что распределение давления удовлетворяет условию гидростатики, а толщина рассматриваемого слоя плазмы мала по отношению к характерному горизонтальному линейному размеру задачи [1]. Когда рассматривают крупномасштабные течения при наличии вращения в магнитогидродинамическом приближении мелкой воды, выделяют волны магнито-Пуанкаре и волны магнито-Россби. Волны магнито-Пуанкаре возникают во вращающихся течениях под действием силы тяжести и магнитного поля. Волны магнито-Россби — крупномасштабные волны, возникающие вследствие неоднородности силы Кориолиса в зависимости от широты на сфере. Нелинейные взаимодействия волн магнито-Россби связывают с длительностью солнечного цикла. Волны Россби часто исследуются в приближении β -плоскости для силы Кориолиса, которое описывает вращающиеся сферические течения плазмы в локальной декартовой системе координат. В этом случае параметр Кориолиса слабо меняется при малых изменениях широты и раскладывается в ряд до первого порядка по широте. Приближение β -плоскости развито для упрощения теории сферических волн Россби. Тем не менее заметим, что представление силы Кориолиса в таком приближении содержит слагаемое, не зависящее от широты, которое обеспечивает существование волн магнито-Пуанкаре на β -плоскости. Такие волны магнито-Пуанкаре не исследовались ранее в работах [2–6], хотя их нелинейные взаимодействия могут быть важны для интерпретации различных явлений в плазменной астрофизике. Таким образом, актуальна постановка задачи об исследовании эффектов стратификации в приближении мелкой воды, а также исследовании волн магнито-Пуанкаре в данном приближении на β -плоскости и их нелинейном взаимодействии с волнами магнито-Россби.

Магнитогидродинамическая теория мелкой воды — двумерная, что включает вертикальные компоненты скоростей и магнитного поля и учёт

вертикального изменения их горизонтальных составляющих. Таким образом, магнитогидродинамическая система уравнений в приближении мелкой воды не может полностью описывать важный для астрофизики случай устойчиво и непрерывно стратифицированного слоя плазмы. В геофизической гидродинамике стратифицированных вращающихся течений возникают инерционно-гравитационные волны в следствие двух восстанавливающих механизмов — вращения и стратификации. В случае магнитных течений волновая картина будет гораздо богаче вследствие наличия дополнительной восстанавливающей силы, а именно силы Лоренца, наряду с силой Кориолиса и силой плавучести. Кроме того, учёт трёхмерности позволяет детально исследовать волновые процессы в магнитогидродинамике стратифицированной плазмы с учётом горизонтальной составляющей силы Кориолиса, что представляется особенно принципиальным при изучении экваториальных течений. Для изучения устойчиво-стратифицированных течений как нейтральной жидкости, так и астрофизической плазмы широко используется приближение Буссинеска. Таким образом, актуальна постановка задачи о расширении теории стратифицированных вращающихся течений в приближении Буссинеска на случай наличия магнитного поля и горизонтальной составляющей вектора Кориолиса. Отметим, что приближение Буссинеска работает, когда градиент плотности пропорционален только градиенту температуры, и описывает несжимаемые стратифицированные течения [7]. Для корректного учёта горизонтальной составляющей силы Кориолиса наряду со стратификацией и сжимаемостью актуальным представляется использование неупругого приближения (*англ.* *anelastic approximation*) для изучения волновых процессов в сжимаемых течениях. В таком приближении акустические волны отфильтрованы, а градиент плотности зависит как от градиента давления, так и от градиента температуры [8]. Магнитогидродинамическая система уравнений в неупругом приближении не содержит акустических волн и получается из полной системы сжимаемых уравнений магнитной гидродинамики в предположении малых возмущений плотности и описывает течения с малыми числами Маха.

Цели работы

1. Развитие магнитогидродинамической теории в приближении двуслойной мелкой воды и приближении Буссинеска для описания крупномасштабных вращающихся течений плазмы с устойчивой стратификацией. Расширение теории в приближении Буссинеска на случай четырёх различных приближений силы Кориолиса: приближение стандартной f -плоскости, приближение нестандартной (с учётом горизонтальной компоненты вектора Кориолиса) f -плоскости, приближение стандартной β -плоскости и приближение нестандартной β -плоскости.

2. Развитие теории линейных волн во вращающихся магнитогидродинамических течениях с устойчивой стратификацией в приближении двуслойной мелкой воды во внешнем вертикальном поле и в горизонтальном магнитном, а также в приближении Буссинеска. Исследование дисперсионных соотношений волн магнито-Россби, волн магнито-Пуанкаре, магнитных инерционно-гравитационных волн и магнитострофических волн, развитие слабонелинейной теории взаимодействий волн и анализ неустойчивостей типа распад и усиление.
3. Развитие магнитогидродинамической теории в неупругом приближении для описания крупномасштабных сжимаемых вращающихся течений плазмы с устойчивой стратификацией, расширение теории на случай четырёх различных приближений силы Кориолиса: приближение стандартной f -плоскости, приближение нестандартной f -плоскости, приближение стандартной β -плоскости и приближение нестандартной β -плоскости.
4. Развитие теории линейных волн в сжимаемых вращающихся магнитогидродинамических течениях с устойчивой стратификацией в неупругом приближении в четырёх приближениях для силы Кориолиса. Исследование дисперсионных соотношений магнитных инерционно-гравитационных волн, магнитострофических волн и волн магнито-Россби, сравнение со случаем несжимаемых течений в приближении Буссинеска, развитие слабонелинейной теории взаимодействий волн и анализ неустойчивостей типа распад и усиление.

Научная новизна

Впервые система магнитогидродинамических уравнений в приближении двуслойной мелкой воды во внешнем вертикальном магнитном поле получена из полной трёхмерной системы уравнений магнитной гидродинамики для случая стратифицированных вращающихся течений. Впервые исследованы волны магнито-Пуанкаре на β -плоскости, найдены новые дисперсионные соотношения для волн магнито-Пуанкаре и магнито-Россби с учётом эффектов стратификации. Впервые сформулирована задача о реализуемости трёхволновых взаимодействий для волн магнито-Пуанкаре и магнито-Россби на β -плоскости в приближении мелкой воды. Исследовано влияние стратификации на групповые и фазовые скорости волн магнито-Пуанкаре и магнито-Россби. Показано наличие нелинейных трёхволновых взаимодействий волн магнито-Пуанкаре и волн магнито-Россби, вычислены коэффициенты взаимодействия трёх волн. Найдены инкременты неустойчивостей типа распад и усиление.

Впервые система магнитогидродинамических уравнений вращающейся стратифицированной плазмы в приближении Буссинеска исследована

сразу для четырёх различных приближений силы Кориолиса (стандартные f - и β -плоскости, нестандартные (с учётом горизонтальной составляющей вектора Кориолиса) f - и β -плоскости). Впервые в рамках полученных уравнений исследованы магнитные инерционно-гравитационные волны, магнитострофические волны и волны магнито-Россби. Показано нарушение условия перпендикулярности групповой скорости волновому вектору для магнитных инерционно-гравитационных волн в следствие наличия магнитного поля. Показано наличие нелинейных трёхволновых взаимодействий найденных новых типов волн, получены коэффициенты взаимодействия и инкременты неустойчивостей типа распад и усиление.

Впервые система магнитогидродинамических уравнений сжимаемой вращающейся плазмы в неупругом приближении получена из полной трёхмерной системы уравнений магнитной гидродинамики для случая сжимаемых течений. Система является новой, так как содержит одновременно силу Кориолиса и магнитное поле, а также предполагает постоянное ненулевое магнитное поле в исходном состоянии равновесия. Кроме того, полученная система впервые исследована сразу для четырёх различных приближений силы Кориолиса (стандартные f - и β -плоскости, нестандартные (с учётом горизонтальной составляющей вектора Кориолиса) f - и β -плоскости). Найденны новые типы волн в сжимаемых вращающихся течениях астрофизической плазмы с линейным профилем энтропии: магнитные инерционно-гравитационные волны, магнитострофические волны и волны магнито-Россби. Показано отличие от их аналогов в несжимаемых течениях в приближении Буссинеска. Кроме того, обнаружены магнитные инерционно-гравитационные и магнитострофические волны с принципиально новыми дисперсионными соотношениями. Показано наличие нелинейных трёхволновых взаимодействий найденных новых типов волн, получены коэффициенты взаимодействия и инкременты неустойчивостей типа распад и усиление.

Практическая и научная ценность работы

Полученные магнитогидродинамические уравнения двуслойной мелкой воды представляют собой единственную возможность самосогласованного учёта внешнего магнитного поля и стратификации. Учёт стратификации в магнитогидродинамических моделях мелкой воды для вращающейся плазмы важен для анализа осцилляций R -моды во вращающихся звёздах и на Солнце и позволяет существенно расширить возможности для интерпретации имеющихся данных наблюдений крупномасштабных волн Россби на Солнце. Также найденные в работе резонансные взаимодействия волн магнито-Пуанкаре и магнито-Россби на β -плоскости становятся принципиально важными для интерпретации различных явлений в плазменной астрофизике, в особенности солнечных сезонов.

В полученных магнитогидродинамических уравнениях в приближении Буссинеска учёт трёхмерности позволяет детально исследовать волновые процессы в магнитогидродинамике стратифицированной плазмы. Кроме того, проведённый в уравнениях учёт горизонтальной составляющей силы Кориолиса является особенно принципиальным при изучении астрофизических экваториальных течений.

Полученные магнитогидродинамические уравнения сжимаемой вращающейся плазмы в неупругом приближении важны для анализа процессов в солнечном тахоклине, устойчиво стратифицированных областях в недрах звёзд (излучающей зоны) и планет (внешний жидкий слой ядра), астрофизических дисках, экзопланетах, а также для анализа осцилляций вращающихся звёзд и Солнца. Отметим, что первые экспериментальные наблюдения крупномасштабных течений астрофизической плазмы выполнены на основе изучения магнитных полей или методами астросейсмологии, что естественным образом мотивирует развитие магнитогидродинамической теории с учётом как эффектов сжимаемости, так и эффектов магнитных полей.

Полученные в диссертации результаты могут быть полезны при планировании космических миссий и астрофизических наблюдений.

Обоснованность и достоверность полученных результатов

Вывод уравнений мелкой воды магнитной гидродинамики осуществлялся методом усреднения по глубине слоя исходной системы уравнений, широко используемым и хорошо себя зарекомендовавшим в геофизической гидродинамике и в физике планетных атмосфер. Полученная система магнитогидродинамических уравнений в приближении двуслойной мелкой воды во внешнем вертикальном магнитном поле в частном случае переходит в классические уравнения нейтральной жидкости и широко известные в астрофизике магнитогидродинамические уравнения без внешнего магнитного поля. Вывод уравнений сжимаемой плазмы в неупругом приближении магнитной гидродинамики осуществлялся методом, широко используемым и хорошо себя зарекомендовавшим в работах по исследованию течений астрофизической плазмы. Все полученные результаты линейной теории, развитые в диссертации, согласуются с известными результатами для течений нейтральной жидкости и для магнитогидродинамических течений. Для развития нелинейной теории используется хорошо зарекомендовавший себя асимптотический метод многомасштабных разложений.

Положения, выносимые на защиту

1. Получены новые системы магнитогидродинамических уравнений для стратифицированной плазмы, а именно: в приближении двуслойной мелкой воды во внешнем вертикальном магнитном поле и с учётом сжимаемости в неупругом приближении. Магнитогидро-

- намические уравнения в приближении Буссинеска и в неупругом приближении записаны для четырёх различных приближений силы Кориолиса: стандартных и нестандартных (с учётом горизонтальной составляющей) f - и β -плоскостей.
2. Развита теория волновых процессов во вращающейся стратифицированной плазме в приближении двуслойной мелкой воды. Найдены дисперсионные соотношения для волн магнито-Пуанкаре и магнито-Россби на β -плоскости и поправки к ним, описывающие влияние стратификации во внешнем вертикальном и в горизонтальном магнитных полях. Показано влияние стратификации на групповые и фазовые скорости найденных волн. Выявлены трёхволновые взаимодействия волн магнито-Пуанкаре и волн магнито-Россби и найдены инкременты неустойчивостей типа распад и усиление.
 3. Развита теория волновых процессов во вращающейся стратифицированной плазме в приближении Буссинеска. Найдены дисперсионные соотношения для магнитных инерционно-гравитационных волн, магнитострофических волн и волн магнито-Россби. Показано влияние стратификации и учёта горизонтальной составляющей силы Кориолиса на динамику найденных волн. Выявлены все возможные типы трёхволновых взаимодействий в четырёх различных приближениях силы Кориолиса и найдены инкременты неустойчивостей типа распад и усиление.
 4. Получена полная система магнитогидродинамических уравнений сжимаемой вращающейся плазмы с устойчивой стратификацией в неупругом приближении. Получены магнитогидродинамические уравнения в неупругом приближении для сжимаемых вращающихся течений с устойчивой стратификацией в приближении стандартных и нестандартных f - и β -плоскостей для силы Кориолиса. Найдены дисперсионные соотношения для магнитных инерционно-гравитационных волн, магнитострофических волн и волн магнито-Россби. Показано отличие в динамике найденных волн в неупругом приближении от волн в приближении Буссинеска. Показано влияние сжимаемости, стратификации и учёта горизонтальной составляющей силы Кориолиса на динамику найденных волн. Выявлены все возможные типы трёхволновых взаимодействий в четырёх различных приближениях силы Кориолиса и найдены инкременты неустойчивостей типа распад и усиление.

Апробация работы

Результаты диссертационной работы докладывались на семинарах сектора 53.9 ИКИ РАН, а также на международных и российских конференциях:

- Конференция молодых учёных ИКИ РАН, Москва, 2019–2021 гг.
- Всероссийская научная конференция МФТИ, Москва, 2018–2021 гг.
- Курчатовская междисциплинарная молодёжная научная школа, Москва, НИЦ «Курчатовский институт», 2019 г.
- Arcetri Workshop on Plasma Astrophysics, Florence, Italy, 2019.
- General Assembly of European Geosciences Union, Vienna, Austria, 2020.
- American Geophysical Union Fall Meeting, San Francisco, USA, 2020.

Публикации по теме диссертации

Результаты диссертационной работы опубликованы в 6 статьях в реферируемых российских и международных журналах, рекомендованных ВАК:

1. *Федотова М.А., Klimachkov D.A., Петросян А.С.* Магнитогидродинамическая теория мелкой воды для течений стратифицированной вращающейся астрофизической плазмы: Приближение бета-плоскости, магнитные волны Россби // *Физика плазмы*. 2020. Т. 46. Вып. 1. С. 57–71. DOI: 10.31857/S0367292120010072.
2. *Petrosyan A., Klimachkov D., Fedotova M., Zinyakov T.* Shallow Water Magnetohydrodynamics in Plasma Astrophysics: Waves, Turbulence, and Zonal Flows // *Atmosphere*. 2020. V. 11. Art. No. 314. 16 p. DOI: 10.3390/atmos11040314.
3. *Федотова М.А., Петросян А.С.* Волновые процессы в трехмерных стратифицированных течениях вращающейся плазмы в приближении Буссинеска // *Журн. эксперимент. и теорет. физики*. 2020. Т. 158. Вып. 2. С. 374–394. DOI: 10.31857/S0044451020080155.
4. *Федотова М.А., Петросян А.С.* Волновые процессы во вращающихся сжимаемых течениях астрофизической плазмы с устойчивой стратификацией // *Журн. эксперимент. и теорет. физики*. 2020. Т. 158. Вып. 6. С. 1188–1214. DOI: 10.31857/S0044451020120172.
5. *Fedotova M., Klimachkov D., Petrosyan A.* Variable Density Flows in Rotating Astrophysical Plasma. Linear Waves and Resonant Phenomena // *Universe*. 2021. V. 7. Art. No. 87. 42 p. <https://doi.org/10.3390/universe7040087>.
6. *Fedotova M., Klimachkov D., Petrosyan A.* Resonant interactions of magneto-Poincaré and magneto-Rossby waves in quasi-two-dimensional rotating astrophysical plasma // *Monthly Notices of the Royal Astronomical Society*. 2022. V. 509. Iss. 1. P. 312–326. <https://doi.org/10.1093/mnras/stab2957>.

Полный список работ включает также 10 публикаций в тезисах докладов российских и международных конференций.

Личный вклад автора

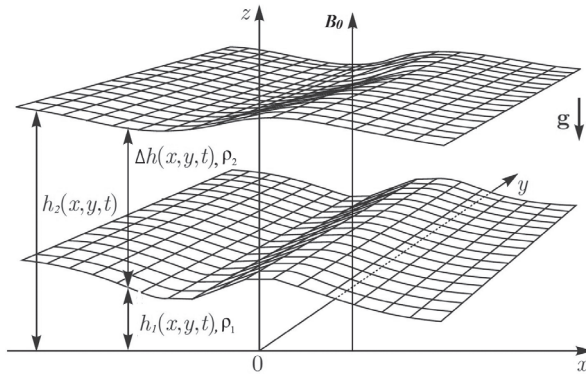
Автор принимала участие в постановке задач, проводила все аналитические исследования, принимала участие в интерпретировании полученных результатов, принимала участие в подготовке статей.

Структура и объём диссертации

Диссертация состоит из введения, трёх глав и заключения, содержит 124 страницы и 23 рисунка. Список используемой литературы содержит 126 наименований.

СОДЕРЖАНИЕ РАБОТЫ

В первой главе диссертации развита магнитогидродинамическая теория двуслойной мелкой воды для вращающейся стратифицированной плазмы со свободной границей в поле силы тяжести, находящейся во внешнем вертикальном магнитном поле (рисунок). Исследуются волны магнито-Пуанкаре и волны магнито-Россби и их трёхволновые взаимодействия.



Тонкий слой плазмы в вертикальном магнитном поле, разделённый на два слоя различной, но постоянной плотности

В разделе 1.2 получена система магнитогидродинамических уравнений двуслойной мелкой воды для вращающейся плазмы в поле силы тяжести во внешнем вертикальном магнитном поле. Система получена из исходных трёхмерных уравнений магнитной гидродинамики усреднением уравнений по высоте слоёв в предположении гидростатичности распределений давлений и малости толщины слоёв по отношению к характерным горизонтальным линейным размерам задачи. В результате полученная система уравнений записывается относительно переменных высоты слоёв, средних

по высоте горизонтальных скоростей течения и среднего по высоте магнитного поля. В полученной системе уравнений наличие внешнего вертикального магнитного поля приводит к дополнительным слагаемым в уравнениях для изменения импульса и для магнитной индукции. В разделе получены уравнения для вертикальной составляющей магнитного поля, необходимые для задания корректных начальных условий и тождественного удовлетворения условия бездивергентности магнитного поля. Таким образом, модернизированные уравнения двуслойной мелкой воды описывают трёхмерную структуру магнитного поля и позволяют глубже понять как линейные, так и нелинейные эффекты в изучаемых плазменных течениях. Полученная система имеет стационарное решение в виде покоящегося слоя плазмы во внешнем вертикальном магнитном поле. При отсутствии внешнего магнитного поля полная система уравнений мелкой воды во внешнем вертикальном магнитном поле сводится к известной системе со стационарными решениями в виде горизонтальных (полоидального, тороидального и их суммы) магнитных полей. В частном случае равенства высоты и плотности слоёв система уравнений двуслойной мелкой воды во внешнем магнитном поле сводится к известной системе уравнений однослойной мелкой воды во внешнем магнитном поле.

В разделе 1.3 получена система магнитогидродинамических уравнений двуслойной мелкой воды для вращающейся плазмы в поле силы тяжести во внешнем вертикальном магнитном поле в приближении β -плоскости. **В подразделе 1.3.1** полученная система уравнений линеаризована на фоне стационара с вертикальным магнитным полем и получено полное дисперсионное соотношение. Найдены решения в виде суммы волны (магнито-Пуанкаре или магнито-Россби) и малой поправки, описывающей влияние стратификации:

$$\begin{aligned} \omega_{MP_v} + \delta_{MP_v} &= \sqrt{\frac{B_0^2}{h_{01}^2} + \frac{B_0^2}{\Delta h_0^2} + f_0^2 + gk^2 h_{02}} + \frac{1}{2} \left(\frac{B_0^2}{h_{01}^2} + \frac{B_0^2}{\Delta h_0^2} + f_0^2 + gk^2 h_{02} \right) \pm \\ &\pm \frac{1}{2} \left(\left(\frac{B_0^2}{h_{01}^2} + \frac{B_0^2}{\Delta h_0^2} + f_0^2 + gk^2 h_{02} \right)^2 - \frac{\Phi_1 \left(\frac{\rho_2}{\rho_1}, \omega_{MP_v} \right)}{\left(\omega_{MP_v}^2 - \omega_1^2 \right) \cdot \left(\omega_{MP_v}^2 - \omega_2^2 \right)} \right)^{1/2}, \\ \omega_{MR_v} + \delta_{MR_v} &= \\ &= \frac{B_0^2}{h_{01} \Delta h_0} \left(\frac{B_0^2}{h_{01} \Delta h_0} + \frac{gk^2 (h_{01}^3 + \Delta h_0^3)}{h_{01} \Delta h_0} \right) - \frac{\Phi_2 \left(\frac{\rho_2}{\rho_1}, \omega_{MR_v} \right)}{\left(\omega_{MR_v}^2 - \omega_1^2 \right) \cdot \left(\omega_{MR_v}^2 - \omega_2^2 \right) g h_{02} \beta k_x}, \end{aligned}$$

где

$$\begin{aligned} \varphi_1 \left(\frac{\rho_2}{\rho_1}, \omega_{MP_v} \right) &= \left(\frac{\rho_2}{\rho_1} - 1 \right) g^2 k^4 h_{01} \Delta h_0 \left(\omega_{MP_v}^2 + \frac{\beta k_x}{k^2} \omega_{MP_v} + \frac{B_0^2}{h_{01}^2} \right) \times \\ &\times \left(\omega_{MP_v}^2 + \frac{\beta k_x}{k^2} \omega_{MP_v} + \frac{B_0^2}{\Delta h_0^2} \right); \\ \varphi_2 \left(\frac{\rho_2}{\rho_1}, \omega_{MR_v} \right) &= \left(\frac{\rho_2}{\rho_1} - 1 \right) g^2 k^4 h_{01} \Delta h_0 \left(\omega_{MR_v}^2 + \frac{\beta k_x}{k^2} \omega_{MR_v} + \frac{B_0^2}{h_{01}^2} \right) \times \\ &\times \left(\omega_{MR_v}^2 + \frac{\beta k_x}{k^2} \omega_{MR_v} + \frac{B_0^2}{\Delta h_0^2} \right); \\ \omega_{1,2}^2 &= \frac{1}{2} \left(f_0^2 + \frac{B_0^2}{h_{01}^2} + \frac{B_0^2}{\Delta h_0^2} \pm \sqrt{\left(\frac{B_0^2}{h_{01}^2} - \frac{B_0^2}{\Delta h_0^2} \right)^2 + f_0^2 \left(f_0^2 + \frac{2B_0^2}{h_{01}^2} + \frac{2B_0^2}{\Delta h_0^2} \right)} \right); \end{aligned}$$

B_0 — внешнее вертикальное магнитное поле; h_{01} — высота нижнего слоя; $\Delta h_0 = h_{02} - h_{01}$ — высота нижнего слоя; $f_0 = 2\Omega_0 \cdot \sin\theta_0$; $\beta = 2\Omega_0 \cdot \cos\theta_0 / R$; Ω_0 — угловая скорость вращения, постоянная в обоих слоях; θ_0 — широта; R — радиус сферы; $k^2 = k_x^2 + k_y^2$ — волновой вектор; g — ускорение свободного падения; ρ_1 — плотность в нижнем слое; ρ_2 — плотность в верхнем слое.

Показано, что наличие стратификации увеличивает групповую и фазовую скорости волн магнито-Пуанкаре при малых значениях волнового вектора и уменьшает их при больших значениях; увеличивает фазовую скорость волн магнито-Россби и уменьшает их групповую скорость. В отсутствие магнитного поля получено дисперсионное уравнение, аналогичное дисперсионному уравнению слоя нейтральной жидкости в приближении мелкой воды с решением в виде гидродинамической волны Россби. Найдена поправка к гидродинамической волне Россби, связанная со стратификацией.

В подразделе 1.3.2 полученная система уравнений линеаризована на фоне стационара с горизонтальным магнитным полем и получено полное дисперсионное соотношение. При равенстве магнитных полей в слоях найдены решения в виде суммы волны (магнито-Пуанкаре или магнито-Россби, аналогичные волнам в однослойной модели) и малой поправки, описывающей влияние стратификации:

$$\omega_{MP_h} + \delta_{MP_h} = \sqrt{2(\mathbf{B}_0 \cdot \mathbf{k})^2 + f_0^2 + gk^2 h_{02}} + \frac{1}{2} \left(2(\mathbf{B}_0 \cdot \mathbf{k})^2 + f_0^2 + gh_{02}k^2 \right) \pm$$

$$\pm \frac{1}{2} \left[\left(2(\mathbf{B}_0 \cdot \mathbf{k})^2 + f_0^2 + gh_{02}k^2 \right)^2 - \frac{\Phi_3 \left(\frac{\rho_2}{\rho_1}, \omega_{MP_h} \right)}{\left(\omega_{MP_h}^2 - \omega_3^2 \right) \cdot \left(\omega_{MP_h}^2 - \omega_4^2 \right)} \right]^{1/2},$$

$$\omega_{MR_h} + \delta_{MR_h} = \frac{(\mathbf{B}_0 \cdot \mathbf{k})^2 \left((\mathbf{B}_0 \cdot \mathbf{k})^2 + gk^2 h_{02} \right)}{\beta k_x g h_{02}} - \frac{\Phi_4 \left(\frac{\rho_2}{\rho_1}, \omega_{MR_h} \right)}{\left(\omega_{MR_h}^2 - \omega_3^2 \right) \cdot \left(\omega_{MR_h}^2 - \omega_4^2 \right) g h_{02} \beta k_x},$$

где

$$\Phi_3 \left(\frac{\rho_2}{\rho_1}, \omega_{MP_h} \right) = \left(1 - \frac{\rho_2}{\rho_1} \right) g^2 k^2 h_{01} \Delta h_0 \left[k^2 \omega_{MP_h}^4 - 2\beta k_x \omega_{MP_h}^3 + 2(\mathbf{B}_0 \cdot \mathbf{k})^2 k^2 \omega_{MP_h}^2 + \right. \\ \left. + 2(\mathbf{B}_0 \cdot \mathbf{k})^2 \beta k_x \omega_{MP_h} - (\mathbf{B}_0 \cdot \mathbf{k})^4 \right];$$

$$\Phi_4 \left(\frac{\rho_2}{\rho_1}, \omega_{MR_h} \right) = \left(1 - \frac{\rho_2}{\rho_1} \right) g^2 k^2 h_{01} \Delta h_0 \left[k^2 \omega_{MR_h}^4 - 2\beta k_x \omega_{MR_h}^3 + 2(\mathbf{B}_0 \cdot \mathbf{k})^2 k^2 \omega_{MR_h}^2 + \right. \\ \left. + 2(\mathbf{B}_0 \cdot \mathbf{k})^2 \beta k_x \omega_{MR_h} - (\mathbf{B}_0 \cdot \mathbf{k})^4 \right];$$

$$\omega_{3,4}^2 = \frac{f_0^2}{2} + (\mathbf{B}_0 \cdot \mathbf{k})^2 \pm f_0 \sqrt{\frac{f_0^2}{4} + (\mathbf{B}_0 \cdot \mathbf{k})^2};$$

$(\mathbf{B}_0 \cdot \mathbf{k})$ — скалярное произведение волнового вектора и вектора магнитного поля; $\mathbf{B}_0 = (B_{0x}, B_{0y})$ — горизонтальное магнитное поле в состоянии покоя.

Показано, что наличие стратификации значительно увеличивает фазовую и групповую скорости волн магнито-Пуанкаре; уменьшает групповую скорость волн магнито-Россби, увеличивает фазовую скорость волн магнито-Россби при малых значениях волнового вектора и уменьшает при больших значениях.

В разделе 1.4 развита слабонелинейная теория волн магнито-Пуанкаре и волн магнито-Россби в приближении двуслойной мелкой воды на β -плоскости. **В подразделе 1.4.1** качественно исследованы полученные дисперсионные уравнения на выявление трёхволновых взаимодействий, удовлетворяющий условию синхронизма $\omega(\mathbf{k}_1) + \omega(\mathbf{k}_2) = \omega(\mathbf{k}_1 + \mathbf{k}_2)$. Качественный анализ дисперсионных кривых заключается в построении двух кривых, смещённых относительно друг друга на \mathbf{k}_c . Пересечение двух кривых означает выполнение условия синхронизма, а точка пересечения соответствует $(\mathbf{k}_1 + \mathbf{k}_2, \omega(\mathbf{k}_1 + \mathbf{k}_2))$. Выявлены следующие трёхволновые взаимодействия в двуслойной мелкой воде на β -плоскости как в вертикальном, так и в горизонтальном магнитном поле: две волны магнито-Россби и волна магнито-Пуанкаре; две волны магнито-Пуанкаре и волна магнито-Россби; три волны магнито-Россби. **В подразделе 1.4.2** методом многомасштабных раз-

ложений выведена система амплитуд трёх взаимодействующих волн и получены коэффициенты взаимодействия как во внешнем вертикальном поле так и в горизонтальном магнитном. Слагаемые в коэффициентах взаимодействия образуют три группы: связанные с нижним слоем плазмы, связанные с верхним слоем плазмы и связанные с отношением плотностей слоёв. В частном случае коэффициенты взаимодействия в двухслойной мелкой воде переходят в коэффициенты взаимодействия в однослойной мелкой воде. Система амплитудных уравнений имеет общий вид и описывает неустойчивости типа распад и усиление. Когда в начальный момент времени амплитуда одной из волн много больше двух других, имеет место распад волны с частотой $\omega(\mathbf{k}_1)$ на две волны с частотами $\omega(\mathbf{k}_2)$ и $\omega(\mathbf{k}_3)$. Когда в начальный момент времени амплитуда одной из волн много меньше двух других, имеет место усиление волны с частотой $\omega(\mathbf{k}_1)$ двумя волнами с частотами $\omega(\mathbf{k}_2)$ и $\omega(\mathbf{k}_3)$. В подразделе 1.4.3 исследованы такие неустойчивости и найдены их инкременты для трёхволновых взаимодействий волн магнито-Пуанкаре и магнито-Россби в двухслойной мелкой воде во внешнем магнитном поле и в горизонтальном магнитном поле. Найдены следующие неустойчивости: распад или усиление волны магнито-Россби при участии волны магнито-Пуанкаре и волны магнито-Россби; распад или усиление волны магнито-Пуанкаре при участии волны магнито-Россби и волны магнито-Пуанкаре; распад или усиление волны магнито-Россби при участии двух волн магнито-Россби.

Во второй главе диссертации развита теория волновых процессов во вращающихся течениях стратифицированной астрофизической плазмы в приближении Буссинеска. Учёт силы Кориолиса проведён в четырёх различных приближениях: приближение стандартной f -плоскости (вектор Кориолиса постоянен и направлен вдоль оси z); приближение нестандартной f -плоскости (вектор Кориолиса постоянен и имеет как вертикальную компоненту, так и компоненту вдоль оси y); приближение стандартной β -плоскости (вектор Кориолиса слабо меняется при малых изменениях широты и имеет только вертикальную компоненту, которая раскладывается в ряд по широте до первого порядка малости); приближение нестандартной β -плоскости (вектор Кориолиса слабо меняется при малых изменениях широты и имеет как вертикальную, так и горизонтальную компоненты, которые раскладываются в ряд по широте до первого порядка малости). Исследуются магнитные инерционно-гравитационные волны, магнито-строфические волны и волны магнито-Россби. Система магнитогидродинамических уравнений несжимаемой вращающейся стратифицированной плазмы в приближении Буссинеска линеаризована на фоне стационарного состояния (покоящийся слой плазмы с линейным профилем плотности и постоянным магнитным полем). В подразделе 2.2.1 получено дисперсионное соотношение на стандартной f -плоскости и найдены решения в виде

волн, восстанавливающими силами которых выступают сила Лоренца, сила Кориолиса и сила плавучести: трёхмерные магнитные инерционно-гравитационные волны

$$\omega_{mig_{3D}} = \pm \left[\begin{aligned} & \frac{1}{2} \left(f_V^2 \frac{k_z^2}{k^2} - N^2 \frac{k_h^2}{k^2} + 2(\mathbf{B}_0 \cdot \mathbf{k})^2 \right) + \\ & + \frac{1}{2k^2} \sqrt{f_V^4 k_z^4 + 4(\mathbf{B}_0 \cdot \mathbf{k})^2 f_V^2 k_z^2 k^2 - 2f_V^2 k_z^2 N^2 k_h^2 + N^4 k_h^4} \end{aligned} \right]^{1/2}$$

и трёхмерные магнитострофические волны

$$\omega_{mig_{3D}} = \pm \left[\begin{aligned} & \frac{1}{2} \left(f_V^2 \frac{k_z^2}{k^2} - N^2 \frac{k_h^2}{k^2} + 2(\mathbf{B}_0 \cdot \mathbf{k})^2 \right) - \\ & - \frac{1}{2k^2} \sqrt{f_V^4 k_z^4 + 4(\mathbf{B}_0 \cdot \mathbf{k})^2 f_V^2 k_z^2 k^2 - 2f_V^2 k_z^2 N^2 k_h^2 + N^4 k_h^4} \end{aligned} \right]^{1/2},$$

где $f_V \equiv f_0$; $k^2 = k_x^2 + k_y^2 + k_z^2 = k_h^2 + k_z^2$ — волновой вектор; N^2 — частота Брента – Вайсяля для несжимаемых течений; $\mathbf{B}_0 = (B_{0x}, B_{0y}, B_{0z})$ — магнитное поле в состоянии покоя.

В случае отсутствия магнитного поля решением становятся трёхмерные инерционно-гравитационные волны, для которых характерно свойство перпендикулярности групповой скорости волновому вектору. Показано, что наличие магнитного поля нарушает это свойство — групповая скорость магнитных инерционно-гравитационных волн не перпендикулярна волновому вектору. В частном случае только вертикальных возмущений решениями являются магнитные инерционные волны

$$\omega_{z_1} = \pm \sqrt{\frac{f_V^2}{2} + B_{0z}^2 k_z^2} + f_V \sqrt{\frac{f_V^2}{4} + B_{0z}^2 k_z^2},$$

$$\omega_{z_2} = \pm \sqrt{\frac{f_V^2}{2} + B_{0z}^2 k_z^2} - f_V \sqrt{\frac{f_V^2}{4} + B_{0z}^2 k_z^2}.$$

В частном случае горизонтальных возмущений найдены волны Альфвена и магнитогравитационные волны.

В подразделе 2.2.2 получено дисперсионное соотношение на нестандартной f -плоскости и найдены решения в виде волн, восстанавливающими силами которых представляются сила Лоренца, сила Кориолиса и сила плавучести: трёхмерные магнитные инерционно-гравитационные волны и трёхмерные магнитострофические волны. Их дисперсионные соотношения схожи с дисперсионными соотношениями для аналогичных волн на стандартной f -плоскости с точностью до слагаемых с вектором Кориолиса.

Слагаемые с вертикальной компонентой $f_V k_z$ переходят в слагаемые с учётом горизонтальной компоненты вектора Кориолиса $f_H k_y + f_V k_z$. В частном случае вертикальных возмущений решениями также становятся магнитные инерционные волны ω_{z_1} , ω_{z_2} . В частном случае горизонтальных возмущений в следствие учёта горизонтальной составляющей вектора Кориолиса решениями дисперсионного уравнения на нестандартной f -плоскости представляются двумерные магнитные инерционно-гравитационные и двумерные магнито-строфические волны.

В подразделе 2.2.3 записана система уравнений несжимаемой вращающейся стратифицированной плазмы на стандартной β -плоскости. Система линеаризована на фоне стационара с постоянным магнитным полем и линейным профилем плотности, получено дисперсионное соотношение и найдены решения в виде стандартных волн магнито-Россби, а также низкочастотных трёхмерных волн магнито-Россби, динамика которых определяется не только силой Кориолиса и Лоренца, но и силой плавучести:

$$\omega_{MR_{3D}} = \frac{(\mathbf{B}_0 \cdot \mathbf{k})^2 [k^2 (\mathbf{B}_0 \cdot \mathbf{k})^2 - N^2 k_h^2]}{\beta k_x [(\mathbf{B}_0 \cdot \mathbf{k})^2 - \beta]}.$$

В частном случае нейтральных течений найдены низкочастотные трёхмерные гидродинамические волны Россби, динамика которых определяется как силой Кориолиса, так и силой плавучести:

$$\omega_{R_{3D}} = \frac{N^2 \beta k_x}{f_V^2 k_z^2 - N^2 k_h^2}.$$

В случае горизонтальных течений данный тип волн переходит в стандартную гидродинамическую волну Россби.

В подразделе 2.2.4 записана линеаризованная система уравнений несжимаемой вращающейся стратифицированной плазмы на нестандартной β -плоскости. Система линеаризована на фоне стационара с постоянным магнитным полем и линейным профилем плотности. Получено дисперсионное соотношение на стандартной β -плоскости и найдены решения в виде волн, динамика которых определяется силами Лоренца, Кориолиса и плавучести: одномерные магнитные инерционно-гравитационные и магнито-строфические волны, низкочастотные трёхмерные волны магнито-Россби:

$$\omega_{MR'_{3D}} = \frac{(\mathbf{B}_0 \cdot \mathbf{k})^2 [k^2 (\mathbf{B}_0 \cdot \mathbf{k})^2 - N^2 k_h^2]}{k_x \left[(\mathbf{B}_0 \cdot \mathbf{k})^2 \left(\beta - \gamma \frac{k_z}{k_y} \right) - \beta N^2 \right]},$$

где $\gamma = -(2\Omega_0 \cdot \sin\theta_0)/R$.

В случае горизонтальных течений данный тип волн переходит в стандартную двумерную магнитогиродинамическую волну Россби в однородной жидкости. В частном случае нейтральных течений найдены низкочастотные трёхмерные гидродинамические волны Россби, динамика которых определяется как силой Кориолиса, так и силой плавучести:

$$\omega_{R'_3D} = \frac{N^2 \beta k_x}{(f_H k_y + f_V k_z)^2 - N^2 k_h^2}.$$

В случае горизонтальных течений данный тип волн переходит в стандартную гидродинамическую волну Россби в однородной жидкости.

В разделе 2.3 развита слабонелинейная теория волн во вращающихся течениях плазмы с устойчивой стратификацией в приближении Буссинеска. **В подразделе 2.3.1** качественно исследованы полученные дисперсионные уравнения на выявление трёхволновых взаимодействий, удовлетворяющий условию синхронизма. На стандартной f -плоскости выявлены следующие трёхволновые взаимодействия: две магнитогравитационные волны и волна Альфвена; две магнитные инерционные волны с частотами ω_{ζ_1} и магнитная инерционная волна с частотой ω_{ζ_2} ; три магнитные инерционные волны с частотами ω_{ζ_2} . На нестандартной f -плоскости при малой горизонтальной составляющей вектора Кориолиса реализуется взаимодействие двух магнитострофических волн и магнитной инерционно-гравитационной волны. Однако при достаточно большой горизонтальной составляющей вид дисперсионных кривых сильно меняется, что допускает возникновение ещё одного типа трёхволновых взаимодействий: две магнитные инерционно-гравитационные волны и магнитострофическая волна. На стандартной β -плоскости выявлены следующие трёхволновые взаимодействия: три волны магнито-Россби; две магнитогравитационные волны и волна магнито-Россби; две волны магнито-Россби и магнитогравитационная волна; три низкочастотные волны магнито-Россби. На нестандартной β -плоскости реализуются взаимодействия магнитострофических и магнитных инерционно-гравитационных волн, аналогичные взаимодействиям на нестандартной f -плоскости, а также взаимодействие трёх низкочастотных волн магнито-Россби.

В подразделе 2.3.2 получены коэффициенты взаимодействия в амплитудных уравнениях трёх взаимодействующих волн для каждого из четырёх приближений силы Кориолиса. Система амплитудных уравнений имеет общий вид и описывает неустойчивости типа распад и усиление. **В подразделе 2.3.3** исследованы такие неустойчивости и найдены их инкременты. На стандартной f -плоскости возможны следующие неустойчивости: распад или усиление магнитогравитационной волны при участии волны Альфвена и магнитогравитационной волны; распад или усиление магнитной инерци-

онной волны ω_{z_1} при участии магнитной инерционной волны ω_{z_2} и магнитной инерционной волны ω_{z_1} ; распад или усиление магнитной инерционной волны ω_{z_2} при участии двух магнитных инерционных волн ω_{z_2} . На нестандартной f -плоскости возможны следующие неустойчивости: распад или усиление магнитной инерционно-гравитационной волны при участии двух магнитострофических волн; распад или усиление магнитной инерционно-гравитационной волны при участии магнитной инерционно-гравитационной волны и магнитострофической волны. На стандартной β -плоскости возможны следующие неустойчивости: распад или усиление волны Альфвена при участии двух магнитогравитационных волн; распад или усиление волны магнито-Россби при участии двух магнитогравитационных волн; распад или усиление волны магнито-Россби при участии двух волн магнито-Россби; распад или усиление низкочастотной волны магнито-Россби при участии двух низкочастотных волн магнито-Россби. На нестандартной β -плоскости возможны следующие неустойчивости: распад или усиление магнитной инерционно-гравитационной волны при участии двух магнитострофических волн; распад или усиление магнитной инерционно-гравитационной волны при участии магнитной инерционно-гравитационной и магнитострофической волн; распад или усиление низкочастотной волны магнито-Россби при участии двух низкочастотных волн магнито-Россби.

В третьей главе диссертации развита теория волновых процессов в сжимаемых вращающихся течениях стратифицированной астрофизической плазмы в неупругом приближении. Учёт силы Кориолиса также проведён в четырёх различных приближениях: приближения стандартной и нестандартной f -плоскостей; приближение стандартной и нестандартной β -плоскостей. Исследуются сжимаемые магнитные инерционно-гравитационные волны, магнитострофические волны и волны магнито-Россби.

В разделе 3.2 получена система магнитогидродинамических уравнений сжимаемой вращающейся плазмы в неупругом приближении со стационарным состоянием в виде покоящегося слоя плазмы с линейным профилем энтропии и постоянным магнитным полем.

В разделе 3.3 развита линейная теория волновых процессов в сжимаемом стратифицированной вращающемся слое плазмы с линейным профилем энтропии. **В подразделе 3.3.1** получено дисперсионное соотношение на стандартной f -плоскости и найдены решения в виде волн, восстанавливающими механизмами которых становятся вращение, магнитное поле и сжимаемость: трёхмерные сжимаемые магнитные инерционно-гравитационные волны и трёхмерные сжимаемые магнитострофические волны. Их дисперсионные соотношения имеют вид, схожий с дисперсионными соотношениями аналогичных волн в приближении Буссинеска с точностью до слагаемых

с частотой Брэнта–Вяйсяля. Именно эти слагаемые отражают влияние сжимаемости на динамику волн. В приближении Буссинеска частота Брэнта – Вяйсяля (для несжимаемых течений) зависит только от профиля плотности, тогда как в неупругом приближении частота Брэнта–Вяйсяля (для сжимаемых течений) зависит как от профиля плотности, так и от профиля давления. В частном случае двумерных горизонтальных возмущений найдены волны Альфвена и сжимаемые магнитогравитационные волны. В частном случае вертикальных возмущений решением дисперсионного уравнения представляются магнитные инерционные волны, аналогичные волнам в приближении Буссинеска.

В подразделе 3.3.2 получено дисперсионное соотношение на нестандартной f -плоскости и найдены решения в виде волн с принципиально новыми дисперсионными соотношениями, восстанавливающими механизмами которых становятся вращение, магнитное поле и сжимаемость: сжимаемые магнитные инерционно-гравитационные волны

$$\omega_{mig_{x_1}} = \frac{N^2 f_H}{2gk_x} + \sqrt{\frac{N^4 f_H^2}{4g^2 k_x^2} + B_{x_0}^2 k_x^2 - N_\theta^2},$$

$$\omega_{mig_{x_2}} = \frac{N^2 f_H}{2gk_x} - \sqrt{\frac{N^4 f_H^2}{4g^2 k_x^2} + B_{x_0}^2 k_x^2 - N_\theta^2},$$

где N_θ^2 — частота Брэнта – Вяйсяля для сжимаемых течений.

А также схожие (с точностью до слагаемых с частотой Брэнта – Вяйсяля) с волнами в приближении Буссинеска одномерные сжимаемые магнитные инерционно-гравитационные и магнитострофические волны.

В подразделе 3.3.3 получено дисперсионное соотношение на стандартной β -плоскости и найдены решения в виде сжимаемых магнитогравитационных волн, аналогичных волнам на стандартной f -плоскости, волн магнито-Россби, аналогичных волнам в приближении Буссинеска, волн Альфвена, а также волн с принципиально новым дисперсионным соотношением, восстанавливающими механизмами которых становятся вращение, магнитное поле и сжимаемость: трёхмерные сжимаемые низкочастотные волны магнито-Россби

$$\omega_{MR_{3D}} = \frac{(\mathbf{B}_0 \cdot \mathbf{k})^2 [k^2 (\mathbf{B}_0 \cdot \mathbf{k})^2 - k_n^2 N_\theta^2]}{k_x \beta [(\mathbf{B}_0 \cdot \mathbf{k})^2 - N_\theta^2] + \frac{N^2 f_V k_z}{g} (\mathbf{B}_0 \cdot \mathbf{k}) \cdot (B_{y_0} k_x - B_{x_0} k_y)}$$

В подразделе 3.3.4 получено дисперсионное соотношение на нестандартной β -плоскости и найдены решения в виде сжимаемых магнитных инерционно-гравитационных волн, аналогичных волнам на нестандартной

f -плоскости, волн магнито-Россби, аналогичных волнам в приближении Буссинеска, а также волн с принципиально новым дисперсионным соотношением, восстанавливаемыми механизмами которых становятся вращение, магнитное поле и сжимаемость: сжимаемых магнитных инерционно-гравитационных волн

$$\omega_{mig\beta} = \left[\frac{f_H^2}{2} + \frac{\beta N^2 f_H}{2gk_y^2} - \frac{N_{\theta}^2}{2} + B_{0y}^2 k_y^2 + \left[\left(\frac{f_H^2}{2} + \frac{\beta N^2 f_H}{2gk_y^2} - \frac{N_{\theta}^2}{2} \right)^2 + f_H^2 B_{0y}^2 k_y^2 + \frac{f_H \beta N^2 B_{0y}^2}{g} \right]^{1/2} \right]^{1/2},$$

сжимаемых магнитострофических волн

$$\omega_{mstr\beta} = \left[\frac{f_H^2}{2} + \frac{\beta N^2 f_H}{2gk_y^2} - \frac{N_{\theta}^2}{2} + B_{0y}^2 k_y^2 - \left[\left(\frac{f_H^2}{2} + \frac{\beta N^2 f_H}{2gk_y^2} - \frac{N_{\theta}^2}{2} \right)^2 + f_H^2 B_{0y}^2 k_y^2 + \frac{f_H \beta N^2 B_{0y}^2}{g} \right]^{1/2} \right]^{1/2}$$

и трёхмерных сжимаемых низкочастотных волн магнито-Россби

$$\omega_{MR'_{3D}} = (\mathbf{B}_0 \cdot \mathbf{k})^2 \left[k^2 (\mathbf{B}_0 \cdot \mathbf{k})^2 - k_h^2 N_{\theta}^2 \right] \times \left[k_x (\mathbf{B}_0 \cdot \mathbf{k})^2 \left(\beta - \gamma \frac{k_z}{k_y} - \beta k_x N_{\theta}^2 - \frac{N^2}{g} (\mathbf{B}_0 \cdot \mathbf{k}) \left[\frac{f_H}{g} \left(B_{0x} k_h^2 + B_{0z} k_x k_z \right) + \frac{f_H \beta N^2 B_{0y}^2}{g} \right] + f_V k_z \left(B_{0x} k_y - B_{0y, k_x} \right) \right] \right].$$

В разделе 3.4 развита слабонелинейная теория волн во вращающихся сжимаемых течениях плазмы с устойчивой стратификацией в неупругом приближении. **В подразделе 3.4.1** качественно исследованы полученные дисперсионные уравнения на выявление трёхволновых взаимодействий, удовлетворяющий условию синхронизма. На стандартной f -плоскости выявлены следующие трёхволновые взаимодействия: две магнитогравитационные волны и волна Альфвена; две магнитострофические волны и магнитная инерционно-гравитационная волна; магнитострофическая волна и две магнитные инерционно-гравитационные волны; магнитная инерционно-гравитационная волна и две магнитострофические волны; три магнитострофические волны. На нестандартной f -плоскости выявлены следующие трёхволновые взаимодействия: две магнитные инерционно-гравитационные волны и волна Альфвена; три магнитные инерционно-гравитационные

волны. На стандартной β -плоскости выявлены следующие трёхволновые взаимодействия: две магнитогравитационные волны и волна Альфвена; три волны магнито-Россби; две магнитогравитационные волны и волна магнито-Россби; две волны магнито-Россби и магнитогравитационная волна; три сжимаемые низкочастотные волны магнито-Россби. На нестандартной β -плоскости выявлены следующие трёхволновые взаимодействия: две сжимаемые магнитные инерционно-гравитационные волны и волна магнито-Россби; две волны магнито-Россби и сжимаемая магнитная инерционно-гравитационная волна; волна магнито-Россби и две сжимаемые магнитные инерционно-гравитационные волны; две сжимаемые магнитные инерционно-гравитационные волны $\omega_{mig\beta}$ и сжимаемая магнитострофическая волна $\omega_{mst\beta}$; три сжимаемые низкочастотные волны магнито-Россби.

В подразделе 3.4.2 получены коэффициенты взаимодействия в амплитудных уравнениях трёх взаимодействующих волн для всех четырёх приближений силы Кориолиса. Система амплитудных уравнений имеет общий вид и описывает неустойчивости типа распад и усиление. **В подразделе 3.4.3** исследованы такие неустойчивости и найдены их инкременты. На стандартной f -плоскости возможны следующие неустойчивости: распад или усиление волны Альфвена при участии двух сжимаемых магнитогравитационных волн; распад или усиление магнитной инерционной волны при участии двух магнитных инерционных волн; распад или усиление сжимаемой магнитострофической волны при участии либо двух сжимаемых магнитных инерционно-гравитационных волн, либо сжимаемой магнитострофической и сжимаемой магнитной инерционно-гравитационной волн, либо двух сжимаемых магнитострофических волн; распад или усиление сжимаемой магнитной инерционно-гравитационной волны при участии либо сжимаемой магнитной инерционно-гравитационной и сжимаемой магнитострофической волн, либо двух сжимаемых магнитострофических волн. На нестандартной f -плоскости возможны следующие неустойчивости: распад или усиление сжимаемой магнитной инерционно-гравитационной волны при участии либо двух сжимаемых магнитных инерционно-гравитационных волн, либо сжимаемой магнитной инерционно-гравитационной волны и волны Альфвена; распад или усиление волны Альфвена при участии двух сжимаемых магнитных инерционно-гравитационных волн; распад или усиление одномерной сжимаемой магнитострофической волны при участии либо одномерной сжимаемой магнитострофической и одномерной сжимаемой магнитной инерционно-гравитационной волн, либо двух одномерных сжимаемых инерционно-гравитационных волн.

На стандартной β -плоскости возможны следующие неустойчивости: распад или усиление волны магнито-Россби при участии либо двух волн магнито-Россби, либо двух сжимаемых магнитогравитационных волн; рас-

пад или усиление сжимаемой магнитогравитационной волны при участии двух волн магнито-Россби; распад или усиление сжимаемой низкочастотной волны магнито-Россби при участии двух сжимаемых низкочастотных волн магнито-Россби. На нестандартной β -плоскости возможны следующие неустойчивости: распад или усиление волны магнито-Россби при участии либо двух волн магнито-Россби, либо двух сжимаемых магнитных инерционно-гравитационных волн, либо волны магнито-Россби и сжимаемой магнитной инерционно-гравитационной волны; распад или усиление сжимаемой магнитной инерционно-гравитационной волны при участии либо двух сжимаемых магнитных инерционно-гравитационных волн, либо сжимаемой магнитной инерционно-гравитационной и магнито-Россби волн, либо двух волн магнито-Россби; распад или усиление сжимаемой магнитной инерционно-гравитационной волны $\omega_{mig\beta}$ при участии сжимаемой магнитной инерционно-гравитационной волны $\omega_{mig\beta}$ и сжимаемой магнитострофической волны $\omega_{mst\beta}$; распад или усиление сжимаемой низкочастотной волны магнито-Россби при участии двух сжимаемых низкочастотных волн магнито-Россби.

В заключении приведены результаты работы.

Работа поддержана Фондом развития теоретической физики и математики «Базис» и Российским фондом фундаментальных исследований (грант № 19-02-00016).

Литература

- [1] *Gilman P. A.* Magnetohydrodynamic “shallow water” equations for the solar tachocline // *The Astrophysical J.* 2000. V. 544. No. 1. P. L79–L82.
- [2] *Heng K., Spitkovsky A.* Magnetohydrodynamic shallow water waves: linear analysis // *The Astrophysical J.* 2009. V. 703. No. 2. P. 1819–1831.
- [3] *Zaqarashvili T. V., Oliver R., Ballester J. L., Shergelashvili B. M.* Rossby waves in “shallow water” magnetohydrodynamics // *Astronomy and Astrophysics.* 2007. V. 470. No. 3. P. 815–820. <https://doi.org/10.1051/0004-6361:20077382>.
- [4] *Федотова М. А., Климачков Д. А., Петросян А. С.* Магнитогидродинамическая теория мелкой воды для течений стратифицированной вращающейся астрофизической плазмы. приближение бета-плоскости, магнитные волны Россби // *Физика плазмы.* 2020. Т. 46. № 1. С. 57–71. DOI: 10.31857/S0367292120010072.
- [5] *Климачков Д. А., Петросян А. С.* Волны Россби в магнитной гидродинамике вращающейся плазмы в приближении мелкой воды // *Журн. эксперимент. и теорет. физики.* 2017. Т. 152. № 4. С. 705–721. DOI: 10.7868/S004445101710008X.
- [6] *Климачков Д. А., Петросян А. С.* Крупномасштабная сжимаемость во вращающихся течениях астрофизической плазмы в приближении мелкой воды // *Журн. эксперимент. и теорет. физики.* 2018. Т. 154. № 6. С. 1239–1257. DOI: 10.1134/S0044451018120180.
- [7] *Vallis G. K.* Atmospheric and Oceanic Fluid Dynamics: Fundamentals and Large-Scale Circulation - Cambridge University Press, 2006. 995 p. <https://doi.org/10.1017/CBO9780511790447>.

- [8] *Brown B.P., Vasil G.M., Zweibel E.G.* Energy conservation and gravity waves in sound-proof treatments of stellar interiors. Part I. Anelastic approximations // *The Astrophysical J.* 2012. V. 756. No. 2. Art. No. 109. 20 p. DOI: 10.1088/0004-637X/756/2/109.