

Федеральное государственное бюджетное учреждение науки Институт
космических исследований Российской академии наук «ИКИ РАН»

На правах рукописи

Лужковский Артемий Араратович

**Самосогласованное описание нелинейного
взаимодействия квазимонохроматических волн с
резонансными частицами в неоднородной плазме**

Специальность 1.3.3. —
«Теоретическая физика»

Диссертация на соискание учёной степени
кандидата физико-математических наук

Научный руководитель:
доктор физико-математических наук
Шкляр Давид Рувимович

Москва — 2025

Оглавление

	Стр.
Введение	5
Цели и задачи работы	8
Научная новизна работы	9
Теоретическая и практическая значимость	10
Методы исследования и достоверность результатов	10
Основные положения, выносимые на защиту	11
Апробация работы	12
Личный вклад автора	13
Публикации по теме диссертации	14
Прочие публикации	14
Структура и объём диссертации	14
 Глава 1. Основные уравнения кинетического подхода для самосогласованного описания волн в бесстолкновительной плазме	 15
1.1 Система уравнений Больцмана–Власова–Максвелла	15
1.2 Приближение заданного поля	16
1.3 Дисперсионные свойства холодной бесстолкновительной плазмы	19
1.4 Особенности распространения свистовых волн в магнитосфере	21
 Глава 2. Поиск самосогласованного профиля амплитуды дактированного сигнала ОНЧ передатчика, сформированного вследствие резонансного взаимодействия с энергичными электронами в магнитосфере	 25
2.1 Уравнения движения и функция распределения резонансных частиц	26
2.1.1 Сведение уравнений движения резонансных электронов в поле дактированной свистовой волны к одномерной системе	26
2.1.2 Невозмущенная функция распределения частиц и линейный инкремент волны	30

2.1.3	Особенности одномерной системы уравнений движения резонансных частиц	32
2.1.4	Изменение энергии и функция распределения захваченных частиц	34
2.1.5	Функция распределения пролетных частиц	38
2.2	Вычисление нелинейного инкремента волны	40
2.3	Самосогласованный профиль амплитуды дактированного сигнала передатчика	43
2.4	Выводы	50
 Глава 3. Передача энергии между различными популяциями электронов посредством резонансного взаимодействия с волной свистовой моды		
3.1	Функция распределения резонансных частиц и линейный инкремент	53
3.2	Магнитосферная траектория свистовой волны	57
3.3	Применимость приближения заданного поля	59
3.4	Передача энергии	67
3.5	Выводы	77
 Глава 4. Самосогласованное описание ленгмюровских волн в неоднородной плазме		
4.1	Уравнение для волнового поля	80
4.2	Сила неоднородности и самосогласованная система уравнений . .	82
4.3	Безразмерная система уравнений и граничные условия	84
4.4	Невозмущенная функция распределения энергичных электронов	87
4.5	Результаты моделирования	88
4.6	Выводы	110
 Глава 5. Квазипериодические структуры ленгмюровских волн на частотно-временных спектрограммах		
5.1	Результаты моделирования	115
5.2	Выводы	123
Заключение		125

Список литературы	127
Приложение А. Вычисление коэффициентов b_n, c_n разложения функции $\Phi(\epsilon)$	140
Приложение Б. Закон сохранения энергии для системы уравнений (4.12)	145

Введение

Плазма создается и исследуется в различных лабораторных установках, таких как токамаки и плазменные ускорители [1; 2], а также широко распространена в природных условиях: в атмосферах звезд [3], межзвездном пространстве [4] и магнитосферах планет [5]. Особый интерес представляет магнитосферная плазма Земли, где наблюдаются уникальные явления. К ним относятся авроральные (полярные) сияния – оптические явления в полярных регионах, возникающие при взаимодействии заряженных частиц с верхними слоями атмосферы [6]. Важным процессом в околоземной магнитосфере является формирование радиационных поясов, в которых удерживаются высокоэнергичные заряженные частицы, прежде всего электроны и протоны. Эти пояса, открытые в конце 1950-х годов [7; 8], представляют угрозу для спутников и космических аппаратов [9], поскольку их электронное оборудование подвергается воздействию высокоэнергичной радиации. Кроме того, магнитосферная плазма характеризуется сложными процессами взаимодействия волн и частиц, которые существенно влияют на ее динамику и энергетический баланс [10; 11]. Исследование этих процессов является необходимым для глубокого понимания динамики околоземной плазмы и для оценки их влияния на космическую погоду и стабильность технических систем на Земле [12].

Современные космические миссии предоставляют большой объем уникальных научных данных, способствующих детальному изучению процессов в магнитосферной плазме. Это позволяет исследовать различные волновые явления, что, в свою очередь, стимулирует развитие соответствующих теоретических моделей и повышает актуальность данного направления исследований. Важными примерами таких миссий являются RBSP (Radiation Belt Storm Probes, позднее переименованная в Van Allen Probes) [13; 14] и ERG (Exploration of energization and Radiation in Geospace, позже переименованная в Arase) [15], направленные на изучение физических процессов непосредственно в радиационных поясах Земли. Также следует выделить миссию MMS (Magnetospheric Multiscale), предназначенную для исследования волн и частиц в хвостовой области магнитосферы [16].

Для описания динамики плазмы в магнитосфере Земли используется система самосогласованных уравнений, объединяющая кинетическое уравнение

Больцмана-Власова и уравнения Максвелла [17]. Эта система позволяет учитывать сложное нелинейное взаимодействие между заряженными частицами и электромагнитным полем: распределение частиц задает ток, который определяет структуру поля, которое, в свою очередь, влияет на эволюцию распределения частиц. Такой подход лежит в основе современной теоретической плазмофизики и широко применяется при моделировании процессов в магнитосфере. Однако вследствие высокой размерности фазового пространства и нелинейности взаимодействий система Больцмана-Власова-Максвелла не допускает общего аналитического решения. В связи с этим широкое распространение получили приближенные и численные методы анализа. К числу первых, в частности, относятся линейное [18; 19] и квазилинейное приближения [20; 21], а также приближение заданного поля волны [22; 23]. В случае, когда амплитуды волн достаточно малы, при исследовании нелинейных процессов в плазме электромагнитное поле часто представляют в виде совокупности линейных волн, амплитуды которых, однако, медленно изменяются во времени вследствие взаимодействия волна-волна и волна-частица. Такой подход, который принято называть теорией слабой турбулентности [24], используется в том числе и в настоящей диссертации. Помимо указанных выше аналитических подходов активно применяются численные методы, среди которых можно выделить, например, метод частиц в ячейках (Particle-in-Cell, PIC) [25–27], а также прямое численное решение кинетического уравнения и уравнений Максвелла [28–30].

В магнитосфере Земли могут возбуждаться и распространяться различные волновые моды, генерация и характеристики которых определяются параметрами плазмы и конфигурацией геомагнитного поля. Одним из наиболее изученных типов собственных волн магнитосферной плазмы являются свистовые волны – электромагнитные волны очень низкой частоты (ОНЧ, 3–30 кГц) с характерной дисперсией, способные распространяться на большие расстояния вдоль силовых линий магнитного поля Земли [31]. Эти волны могут возбуждаться как в результате естественных процессов, таких как молниевые разряды [31–33] и плазменные неустойчивости [10; 34], так и под воздействием искусственных источников, например, мощных наземных ОНЧ передатчиков [35–37].

Теоретические и экспериментальные исследования роли наземных ОНЧ передатчиков в динамике энергичных электронов радиационных поясов Земли начались давно и продолжаются по настоящее время (см., например, [38–42] и ссылки в этих работах). Совсем недавно ряд исследований сигналов ОНЧ

передатчиков и их влияния на плазмосферные электроны был выполнен на основе данных, полученных с бортов спутников CRRES, DEMETER и Van Allen Probes [43–46]. Эти исследования, наряду с другими результатами, подтвердили важность дактированного распространения сигналов передатчиков, а также позволили оценить амплитуды этих сигналов в экваториальной области магнитосферы, где резонансное взаимодействие с энергичными электронами наиболее эффективно.

Резонансное взаимодействие электронов с сигналом передатчика приводит к рассеянию электронов по питч-углам, в результате чего часть из них попадает в конус потерь и высыпается в атмосферу (см., например, [47–49]). Другим возможным следствием этого взаимодействия является увеличение энергии части резонансных электронов [50–52]. Поэтому исследование роли сигналов передатчиков в появлении высокоэнергичных электронов в радиационных поясах Земли представляет собой важную и до настоящего времени не полностью решенную задачу.

Несмотря на то, что систематическое исследование нелинейного резонансного взаимодействия между волнами свистовой моды и энергичными электронами началось еще в 1960-х годах с рассмотрения случая волн с постоянной частотой – чему в значительной степени способствовали эксперименты с ОНЧ передатчиком на станции Siple [35], – в настоящее время большинство исследований в этой области связано с изучением различных типов свистовых излучений, наблюдаемых в магнитосфере Земли. Помимо сигналов от ОНЧ передатчиков и генерируемых молниевыми разрядами свистов (включая магнитосферноотраженные и Nu-свисты [53–57]), важную роль играют когерентные хоровые волны (хоры) и широкополосный плазмосферный хисс [58–61]. Эти волны существенно различаются по своим спектральным характеристикам, а также по механизмам взаимодействия с энергичными электронами. Интенсивные когерентные волны типа хоров способны вступать в нелинейное резонансное взаимодействие с электронами, что может приводить как к их ускорению [62], так и к питч-угловому рассеянию [63; 64], вызывающему значительное высыпание частиц в атмосферу и, как следствие, потерю энергичных электронов. В то же время волны типа хисс взаимодействуют с электронами преимущественно в квазилинейном режиме, способствуя их постепенному рассеянию в конус потерь [65; 66].

Другим распространенным волновым явлением в космической физике являются ленгмюровские (или плазменные) волны. Они регулярно наблюдаются в солнечном ветре [67–69], околоземной среде [70–72], а также в хвосте магнитосферы [73; 74]. Рассмотрение электростатических ленгмюровских волн позволяет свести задачу к одномерной по координате и скорости (1D-1V) самосогласованной системе уравнений, что делает такую модель особенно удобной для эффективного численного моделирования кинетических процессов. Благодаря малой размерности фазового пространства, для исследования ленгмюровских волн часто используется прямое численное решение уравнений Больцмана-Власова-Максвелла [75–78]. Как правило, такие расчеты выполняются для однородной плазмы, однако особый интерес представляет исследование взаимодействия ленгмюровских волн с частицами в неоднородной плазме, где возможны новые эффекты, связанные с пространственными вариациями плотности. Дополнительная мотивация исследования динамики ленгмюровских волн в неоднородной плазме связана с их известной аналогией с волнами свистовой моды. Система уравнений движения резонансных электронов в поле ленгмюровской волны имеет такую же математическую структуру как и система уравнений, описывающая движение электронов в поле волны свистовой моды [50; 79]. Это сходство способствует развитию единых подходов к анализу нелинейных эффектов.

Теоретические и экспериментальные исследования взаимодействий волн и частиц позволили существенно продвинуться в понимании динамики магнитосферной плазмы. Тем не менее, ряд фундаментальных вопросов остается недостаточно изученным. В частности, не до конца решенными остаются проблемы нелинейного резонансного взаимодействия электронов с квазимонохроматическими волнами в условиях неоднородной магнитосферной плазмы. Описание таких процессов требует самосогласованного решения кинетического уравнения Больцмана-Власова для функции распределения и уравнений Максвелла, описывающих электромагнитное поле.

Цели и задачи работы:

Целью диссертационной работы является исследование самосогласованного резонансного взаимодействия квазимонохроматических пакетов волн с энергичными частицами в неоднородной плазме на основе численных методов, обеспечивающих учет взаимного влияния волновых электромагнитных полей и заряженных частиц плазмы.

Для достижения поставленной цели необходимо было решить следующие задачи :

1. Разработать и реализовать итерационный алгоритм для нахождения самосогласованного профиля амплитуды сигнала наземного ОНЧ передатчика, распространяющегося в магнитосфере вдоль внешнего магнитного поля.
2. На основе нелинейного инкремента волны исследовать механизм передачи энергии между различными популяциями резонансных электронов в процессе их взаимодействия со свистовой волной, распространяющейся под углом к внешнему магнитному полю в сильно неоднородной магнитосферной плазме.
3. Разработать программу для исследования самосогласованной динамики ленгмюровских волн в неоднородной плазме на основе кинетического уравнения Больцмана–Власова и закона Ампера–Максвелла.
4. Построить и проанализировать частотно-временные спектрограммы рассчитанных электрических полей для исследования динамики ленгмюровских волн в плазме.

Научная новизна работы

1. Впервые определен пространственный профиль амплитуды сигнала ОНЧ передатчика, распространяющегося вдоль силовой линии магнитного поля Земли, с учетом не только геометрических факторов распространения волнового пакета, но и резонансного циклотронного взаимодействия между волной и энергичными электронами плазмы.
2. Рассмотрен новый механизм передачи энергии от менее энергичных к более энергичным электронам через свистовую волну, возбуждаемую циклотронной неустойчивостью в экваториальной области и распространяющуюся в плазме в соответствии с уравнениями геометрической оптики.
3. Предложен новый самосогласованный численный подход к решению системы уравнений Больцмана–Власова и уравнения для поля волны, в котором вклад основной части нерезонансных частиц учитывается через диэлектрическую проницаемость среды. В отличие от традиционно используемого описания поля ленгмюровских волн с помощью уравнения Пуассона, применяется закон Ампера–Максвелла, что делает систему эволюционной и, благодаря этому, наиболее адекватной

для моделирования временной динамики физических процессов. Аналогичные численные методы решения системы уравнений, описывающей самосогласованную динамику ленгмюровских волн и резонансных частиц, широко применяются для случая однородной плазмы. В данном исследовании применен оригинальный численный метод, позволяющий учитывать неоднородность плазмы, что особенно важно для моделирования процессов, характерных для реальных космических условий.

4. Показано, что пространственная структура поля совокупности волновых пакетов ленгмюровских волн проявляется в виде периодических временных модуляций амплитуды поля на частотно-временной спектрограмме, регистрируемой в определенной точке.

Теоретическая и практическая значимость

Рассчитанный самосогласованный профиль сигнала ОНЧ передатчика предоставляет возможность детально исследовать динамику субрелятивистских электронов в поле сигнала передатчика. Существенно, что эти электроны ввиду их малого количества не оказывают значимого влияния на профиль амплитуды, что позволяет применять приближение заданного поля при рассмотрении их движения.

Показано, что в неравновесной неустойчивой плазме может происходить передача энергии от частиц с меньшей энергией к частицам с большей энергией через волну. Это продемонстрировано на примере возбуждения свистовых волн в экваториальной области и указывает на возможный механизм ускорения частиц в радиационных поясах Земли.

Предложенный подход для самосогласованного решения уравнения Больцмана-Власова и закона Ампера-Максвелла обеспечивает существенное снижение объема вычислений, что позволяет проводить необходимый численный расчет на персональном компьютере. Благодаря известной аналогии между свистовыми и ленгмюровскими волнами, разработанный алгоритм может быть использован не только для исследования ленгмюровских волн; этот алгоритм может быть обобщен и для описания свистовых волн в неоднородной плазме, что расширяет спектр практического применения полученных результатов.

Методы исследования и достоверность результатов

Результаты, представленные в настоящей диссертации, основаны на решении фундаментальных уравнений электродинамики и физики космической плазмы: уравнениях Максвелла и кинетическом уравнении Больцмана-Власова

с самосогласованным полем. Исследование носит преимущественно теоретический характер и содержит значительный объем численного моделирования. Достоверность полученных результатов и выводов обеспечивается строгим и корректным решением указанных фундаментальных уравнений в рамках применяемых физических приближений.

Для решения основной системы уравнений применялись различные подходы. В частности, использовался метод последовательных приближений для получения самосогласованного профиля амплитуды сигнала ОНЧ передатчика, распространяющегося в магнитосферной плазме вдоль силовой линии магнитного поля и взаимодействующего с энергичными электронами радиационных поясов. Для нахождения динамики ленгмюровских волн в неоднородной плазме была поставлена задача Коши для указанной системы уравнений. Кинетическое уравнение для функции распределения резонансных частиц решалось методом Рунге–Кутты 4-го порядка, а для расчета временной эволюции электрического поля применялась стандартная разностная схема второго порядка точности.

В третьей главе работы исследован механизм передачи энергии между различными популяциями электронов, опосредованный свистовой волной, которая генерируется в приэкваториальной области магнитосферы. Показано, что в рамках неустойчивой неравновесной плазмы такое взаимодействие может сопровождаться передачей энергии от менее энергичных частиц к более энергичным. Этот процесс важен для понимания механизмов возрастания потоков энергичных частиц в радиационных поясах Земли, наблюдаемого на спутниках во время геомагнитных возмущений.

В четвертой и пятой главах рассматривается взаимодействие ленгмюровских волн с электронами на основе самосогласованной эволюционной системы уравнений. Разработанный метод решения данной системы дает правильные результаты в различных случаях, исследованных другими авторами, что подтверждает достоверность получаемых новых результатов. Такой подход позволяет обеспечить достаточную степень надежности и воспроизводимости полученных результатов.

В ходе выполнения исследования для проведения расчетов и моделирования применялась программная среда MATLAB, что позволило реализовать необходимые численные методы и алгоритмы.

Основные положения, выносимые на защиту:

1. Развита подход к самосогласованному описанию резонансного взаимодействия энергичных электронов с сигналом ОНЧ передатчика, который позволил определить пространственный профиль амплитуды сигнала при его дактированном распространении в магнитосфере. Исследование основано на решении нелинейной системы, состоящей из кинетического уравнения для функции распределения резонансных частиц и уравнения для энергии волнового поля, в котором нелинейный нелокальный инкремент определяется функцией распределения резонансных частиц.
2. Эволюция квазимонохроматической волны, возбуждаемой в приэкваториальной области магнитосферы в результате развития циклотронной неустойчивости, сопровождается обменом энергией не только между волной и резонансными частицами, но и между различными группами резонансных частиц. В неравновесной неустойчивой плазме возможна опосредованная волной передача энергии от менее энергичных к более энергичным частицам, аналогичная обсуждавшемуся ранее процессу при распространении свистовых волновых пакетов, индуцированных молниевыми разрядами.
3. Разработан метод численного моделирования самосогласованной эволюции ленгмюровских волн и распределения энергичных электронов, в котором нерезонансные частицы включены в рассмотрение с помощью диэлектрической проницаемости, что позволяет существенно снизить объем вычислений и производить расчеты на персональном компьютере. Выполненное моделирование воспроизводит известные ранее результаты для монохроматических волн в однородной плазме, а также дает ряд новых результатов по эволюции поля и функции распределения резонансных частиц в различных случаях: устойчивой и неустойчивой плазмы, монохроматической волны и спектра волн, однородной и неоднородной плазмы.

Апробация работы

Основные результаты работы докладывались на научных семинарах в ИКИ РАН и на следующих конференциях:

1. 64-я Всероссийская научная конференция МФТИ

- Лужковский А.А., Шкляр Д.Р. “Самосогласованное описание резонансного взаимодействия электронов с сигналом наземного ОНЧ передатчика”, Москва (2021)
2. 19-я конференция молодых ученых “Фундаментальные и прикладные космические исследования”
Лужковский А.А., Шкляр Д.Р. “Ускорение высокоэнергичных электронов в поле монохроматического сигнала наземного ОНЧ передатчика: самосогласованный подход”, Москва (2022)
 3. 19-я конференция “Физика плазмы в солнечной системе”
Лужковский А.А., Шкляр Д.Р. “Перенос энергии между различными группами электронов в результате резонансного взаимодействия с волной свистовой моды”, Москва (2024)
 4. 66-я Всероссийская научная конференция МФТИ
Лужковский А.А., Шкляр Д.Р. “Резонансное взаимодействие электронов со свистовыми волнами как механизм передачи энергии между различными группами частиц”, Москва (2024)
 5. 20-я конференция “Физика плазмы в солнечной системе”
Лужковский А.А., Шкляр Д.Р. “Самосогласованное описание ленгмюровской турбулентности в неоднородной плазме”, Москва (2025)
 6. 22-я конференция молодых ученых “Фундаментальные и прикладные космические исследования”
Лужковский А.А., Шкляр Д.Р. “Эволюция ленгмюровского спектра в неоднородной плазме: самосогласованное описание”, Москва (2025)

Личный вклад автора

Исследования, положенные в основу диссертационной работы, выполнены автором лично либо при его непосредственном участии. Автор принимал участие в постановке и теоретическом развитии исследуемых задач. В рамках работы совместно с соавторами были разработаны численные методы и программные средства для самосогласованного моделирования нелинейного взаимодействия ленгмюровских волн с резонансными частицами в неоднородной плазме. Кроме того, был предложен и реализован итерационный метод расчета профиля амплитуды сигнала наземного ОНЧ передатчика, распространяющегося вдоль силовой линии магнитного поля и взаимодействующего с электронами радиационного пояса. Проанализирован механизм передачи энергии между различными популяциями электронов, взаимодействующих со

свистовой волной на нескольких циклотронных резонансах. Полученные результаты были интерпретированы автором самостоятельно либо в сотрудничестве с соавторами.

Публикации по теме диссертации

1. Shklyar D.R., Luzhkovskiy A.A., Self-consistent amplitude profile of ducted VLF transmitter signal due to resonant interaction with energetic electrons in the magnetosphere. *Advances in Space Research*, 2023, 71, 228–243. <https://doi.org/10.1016/j.asr.2022.08.081>
2. Luzhkovskiy A.A., Shklyar D.R., Energy Transfer Between Various Electron Populations Via Resonant Interaction With Whistler Mode Wave. *Journal of Geophysical Research: Space Physics*, 2023, 128. <https://doi.org/10.1029/2023ja031962>
3. Luzhkovskiy A.A., Shklyar D.R., Self-consistent description of Langmuir waves in an inhomogeneous plasma. *Physics of Plasmas*, 2025, 32. <https://doi.org/10.1063/5.0266890>

Прочие публикации

1. Luzhkovskiy A.A., Nonlinear Interaction of Landau-Resonance Electrons with the EMIC Wave in a Multicomponent Plasma. *Plasma Physics Reports*, 2025, 50, 1360–1374. <https://doi.org/10.1134/S1063780X24601202>

Структура и объём диссертации Диссертация состоит из введения, пяти глав, заключения, списка литературы из 111 наименований и двух приложений. Полный объём диссертации составляет 146 страниц машинописного текста, включая 35 рисунков и 1 таблицу.

Глава 1. Основные уравнения кинетического подхода для самосогласованного описания волн в бесстолкновительной плазме

1.1 Система уравнений Больцмана–Власова–Максвелла

Полная самосогласованная система уравнений, описывающая резонансное взаимодействие заряженных частиц с электромагнитными волнами в бесстолкновительной магнитосферной плазме, объединяет кинетическое описание частиц на основе уравнения Больцмана–Власова

$$\frac{\partial F_s}{\partial t} + \mathbf{v} \frac{\partial F_s}{\partial \mathbf{r}} + \frac{q_s}{m_s} \left\{ \boldsymbol{\mathcal{E}} + \frac{1}{c} [\mathbf{v} \times (\boldsymbol{\mathcal{B}} + \mathbf{B}_0)] \right\} \frac{\partial F_s}{\partial \mathbf{v}} = 0 \quad (1.1)$$

и динамику полей, описываемую системой уравнений Максвелла

$$\nabla \cdot \boldsymbol{\mathcal{E}} = 4\pi\rho, \quad (1.2)$$

$$\nabla \times \boldsymbol{\mathcal{E}} = -\frac{1}{c} \frac{\partial \boldsymbol{\mathcal{B}}}{\partial t}, \quad (1.3)$$

$$\nabla \cdot \boldsymbol{\mathcal{B}} = 0, \quad (1.4)$$

$$\nabla \times \boldsymbol{\mathcal{B}} = \frac{4\pi}{c} \mathbf{j} + \frac{1}{c} \frac{\partial \boldsymbol{\mathcal{E}}}{\partial t}. \quad (1.5)$$

Здесь $F_s(\mathbf{r}, \mathbf{v}, t)$ функция распределения частиц сорта s (например, $s = e, i$ – электроны и протоны) в фазовом пространстве, q_s – заряд частиц, m_s – масса частиц, c – скорость света в вакууме, $\mathbf{r}$ – координата, $\mathbf{v}$ – скорость, $\boldsymbol{\mathcal{E}}$ и $\boldsymbol{\mathcal{B}}$ – волновое электрическое и магнитное поле. В рамках исследования магнитосферной плазмы в кинетическом уравнении принято выделять величину $\mathbf{B}_0$, под которой понимается внешнее магнитное поле Земли. В работе оно полагается дипольным и неизменным во времени, то есть $\mathbf{B}_0 = \mathbf{B}_0(\mathbf{r})$. Плотность заряда

$$\rho = \sum_s q_s \int F_s(\mathbf{r}, \mathbf{v}, t) d\mathbf{v} \quad (1.6)$$

и плотность тока

$$\mathbf{j} = \sum_s q_s \int \mathbf{v} F_s(\mathbf{r}, \mathbf{v}, t) d\mathbf{v} \quad (1.7)$$

вычисляются по функциям распределения заряженных частиц.

В выражениях для плотности заряда и тока интегрирование ведется по всему пространству скоростей, элемент объема которого обозначается как $d\mathbf{v}$. В зависимости от выбранной системы координат этот элемент можно записать по-разному. Например, в декартовой системе координат имеем

$$d\mathbf{v} = dv_x dv_y dv_z.$$

В координатах, где ось z направлена вдоль внешнего магнитного поля $\mathbf{B}_0$, удобно выделить продольную компоненту скорости $v_{\parallel} = v_z$, сонаправленную с полем, и поперечные компоненты v_x , v_y , перпендикулярные полю. Особенно удобным при наличии $\mathbf{B}_0$ является переход в цилиндрические координаты, определенные относительно направления поля:

$$d\mathbf{v} = v_{\perp} dv_{\perp} dv_{\parallel} d\varphi,$$

где

$$v_{\perp} = \sqrt{v_x^2 + v_y^2}$$

— поперечная скорость, а

$$\varphi = \arctan \frac{v_y}{v_x}$$

— гиροфаза.

1.2 Приближение заданного поля

Система уравнений (1.1)-(1.5), приведенная выше, представляет собой замкнутую нелинейную систему уравнений. Нелинейность этой системы обусловлена тем, что электромагнитные поля $(\mathcal{E}, \mathcal{B})$, действующие на частицы, определяются самими частицами через их распределение в фазовом пространстве, а эволюция этого распределения, в свою очередь, зависит от возникающих полей. Такой характер взаимодействия означает, что плотности заряда и тока являются функционалами электромагнитного поля, что приводит к сложной интегро-дифференциальной структуре уравнений для поля.

Аналитические решения этой системы возможны лишь для сильно упрощенных случаев. В частности, широко используется линейное приближение,

когда исходные уравнения линеаризуются относительно малых возмущений функции распределения и электромагнитных полей. Такой подход существенно упрощает математический анализ задачи и делает возможным получение дисперсионных соотношений и исследование устойчивости равновесных состояний. Однако линейный подход не является самосогласованным. Его применимость ограничена малыми временами и амплитудами возмущений, а также невозможностью учитывать нелинейные эффекты.

Даже для сравнительно простых физических проблем, таких как резонансное взаимодействие квазимонохроматических волн с заряженными частицами, решение исходной системы требует использования численных методов. Наиболее развитый подход к проблеме самосогласованного описания, восходящий к классической работе [22], – это приближение заданного поля. Это приближение, использовавшееся во множестве работ (см. монографию [23] и ссылки в ней), заключается в следующем.

Предполагается, что все частицы можно разделить на две группы: «холодные» частицы, которые определяют дисперсионные свойства плазмы, но не участвуют в резонансном взаимодействии волна–частица, и резонансные частицы, которые определяют изменение энергии волны, но не влияют на дисперсионные свойства плазмы из-за относительно малого числа резонансных частиц. Таким образом, волновое поле может быть представлено в виде волны (или волн) с известной дисперсией, но медленно (по сравнению с частотой волны и волновым вектором) изменяющейся амплитудой. При этом плотность тока электронов (1.7) может быть представлена как сумма линейного тока $\mathbf{j}_L$, обусловленного нерезонансными частицами, и нелинейного (резонансного) тока $\mathbf{j}_R$, связанного с электронами, вступающими в резонансное взаимодействие с волной:

$$\mathbf{j} = \mathbf{j}_L + \mathbf{j}_R. \quad (1.8)$$

Следующее предположение в рассматриваемом приближении состоит в том, что можно ввести нелинейное время τ_{NL} , характеризующее резонансное взаимодействие. Если амплитуда волны мало меняется за нелинейное время, то есть если $\gamma\tau_{NL} \ll 1$, где γ – нелинейный инкремент, то можно применять приближение заданного поля для решения задачи. На первом шаге решается кинетическое уравнение для функции распределения резонансных частиц f_s в

заданном поле $(\boldsymbol{\mathcal{E}}, \boldsymbol{\mathcal{B}})$

$$\frac{\partial f_s}{\partial t} + \mathbf{v} \frac{\partial f_s}{\partial \mathbf{r}} + \frac{q_s}{m_s} \left\{ \boldsymbol{\mathcal{E}} + \frac{1}{c} [\mathbf{v} \times (\boldsymbol{\mathcal{B}} + \mathbf{B}_0)] \right\} \frac{\partial f_s}{\partial \mathbf{v}} = 0. \quad (1.9)$$

Согласно теореме Лиувилля, если решить систему уравнений характеристик для уравнения (1.9), которая совпадает с уравнениями движения частицы, то функция распределения f_s выражается через начальное невозмущенное распределение $f_{s0} = f_s(t = 0, \mathbf{r}, \mathbf{v})$ как

$$f_s(t, \mathbf{r}, \mathbf{v}) = f_{s0}(\mathbf{r}_0(t, \mathbf{r}, \mathbf{v}), \mathbf{v}_0(t, \mathbf{r}, \mathbf{v})), \quad (1.10)$$

где $\mathbf{r}_0$ и $\mathbf{v}_0$ – начальные координаты и скорости, выраженные через текущие значения $t, \mathbf{r}, \mathbf{v}$ из решения уравнений движения. Таким образом, вычисление функции распределения сводится к решению уравнений движения частиц в заданном поле. По рассчитанной функции распределения резонансных частиц вычисляется инкремент волны, который оказывается сложной, нелинейной, но заданной функцией волнового поля. Важно отметить, что независимо от того, в каких переменных выражена функция распределения резонансных частиц f_s , она всегда нормирована так, что интеграл этой функции по $d\mathbf{v}$ дает локальную плотность энергичных частиц данного сорта:

$$n_{hs}(\mathbf{r}, t) = \int f_s(\mathbf{r}, \mathbf{v}, t) d\mathbf{v}. \quad (1.11)$$

На втором шаге решается уравнение для плотности энергии волны U [80]

$$\frac{\partial U}{\partial t} + \nabla \cdot (\mathbf{v}_g U) = 2\gamma U, \quad (1.12)$$

где $\mathbf{v}_g$ – групповая скорость, γ – инкремент волны, определяемый током резонансных частиц:

$$\gamma = -\frac{\langle \mathbf{j}_R \cdot \boldsymbol{\mathcal{E}} \rangle}{2U}, \quad (1.13)$$

а $\langle \dots \rangle$ означает усреднение за период волны. Уравнение (1.12) является прямым следствием системы уравнений (1.1)-(1.5) и (1.8) для квазимонохроматического волнового пакета в указанном приближении и отображает закон сохранения энергии в системе «волна-резонансные частицы». Стоит также отметить, что в диссертационной работе исследуется частотный диапазон много больше локальной частоты нижнего гибридного резонанса, поэтому в этом приближении ионы

не влияют на дисперсию волн, и далее, там где это не приведет к недопониманию, нижний индекс $s = e$ опускается – подразумевается, что рассматриваются электроны. Следовательно, инкремент волны определяется только плотностью тока резонансных электронов $\mathbf{j}_R$:

$$\mathbf{j}_R = -e \int \mathbf{v} f d\mathbf{v} \equiv -e \int \mathbf{v} (f - f_0) d\mathbf{v}, \quad (1.14)$$

где $-e$ – заряд электрона, а f_0 – невозмущенная функция распределения резонансных электронов, не вносящая вклад в резонансный ток.

Таким образом, можно получить приближенное решение общей системы уравнений Больцмана–Власова–Максвелла: резонансный ток и, следовательно, инкремент определяются кинетическим уравнением с заданным полем, тогда как закон сохранения энергии (1.12), который является прямым следствием исходной системы уравнений, дает возможность найти самосогласованное поле в следующем приближении. Следует отметить, что предположение о том, что невозмущенная функция распределения существенно не изменяется из-за взаимодействия волна–частица (что фактически используется), хорошо обосновано в исследуемом в Главах 2 и 3 случае магнитосферной плазмы, поскольку резонансная скорость довольно быстро меняется вдоль лучевой траектории, и по мере распространения волна все время взаимодействует с новыми группами резонансных частиц.

1.3 Дисперсионные свойства холодной бесстолкновительной плазмы

Для полноты изложения в этом параграфе приводятся известные результаты для модели холодной однородной магнитоактивной плазмы, которая широко применяется для анализа дисперсионных свойств среды. Показатель преломления волн $N \equiv kc/\omega$ в общем случае задается соотношением (см., например,

[81]):

$$\begin{aligned}
N_{1,2}^2 &= \frac{-\tilde{B} \pm \sqrt{\tilde{B}^2 - 4\tilde{A}\tilde{C}}}{2\tilde{A}}, \\
\tilde{A} &= \varepsilon_1 \sin^2 \theta + \varepsilon_3 \cos^2 \theta, \\
\tilde{B} &= -\varepsilon_1 \varepsilon_3 (1 + \cos^2 \theta) - (\varepsilon_1^2 - \varepsilon_2^2) \sin^2 \theta, \\
\tilde{C} &= \varepsilon_3 (\varepsilon_1^2 - \varepsilon_2^2),
\end{aligned} \tag{1.15}$$

где ω – частота волны, k – модуль волнового вектора $\mathbf{k}$, θ – угол между $\mathbf{k}$ и направлением внешнего магнитного поля $\mathbf{B}_0$, называемый углом волновой нормали, а действительные компоненты тензора диэлектрической проницаемости $\varepsilon_{ij}(\omega)$

$$\varepsilon_{ij} = \begin{pmatrix} \varepsilon_1 & i\varepsilon_2 & 0 \\ -i\varepsilon_2 & \varepsilon_1 & 0 \\ 0 & 0 & \varepsilon_3 \end{pmatrix}$$

определяются следующим образом

$$\begin{aligned}
\varepsilon_1 &= 1 - \sum_s \frac{\omega_{ps}^2}{\omega^2 - \omega_{cs}^2}, & \varepsilon_2 &= - \sum_s \text{sign}(q_s) \frac{\omega_{ps}^2 \omega_{cs}}{\omega(\omega^2 - \omega_{cs}^2)}, \\
\varepsilon_3 &= 1 - \sum_s \frac{\omega_{ps}^2}{\omega^2}.
\end{aligned} \tag{1.16}$$

Здесь суммирование ведется по всем сортам частиц s , плотность холодных частиц n_{cs} сорта s связана с плазменной частотой следующим соотношением

$$\omega_{ps}^2 = \frac{4\pi n_{cs} q_s^2}{m_s},$$

а циклотронная частота определяется через модуль внешнего магнитного поля $B_0 = |\mathbf{B}_0|$:

$$\omega_{cs} = \frac{|q_s| B_0}{m_s c}.$$

Компоненты комплексного вектора поляризации электрического поля $\mathbf{a}$ могут быть представлены в виде [81]:

$$a_y = -i \frac{\varepsilon_2}{N^2 - \varepsilon_1} a_x, \quad a_z = \frac{N^2 \sin \theta \cos \theta}{N^2 \sin^2 \theta - \varepsilon_3} a_x. \tag{1.17}$$

При определении диэлектрического тензора и вектора поляризации предполагается, что внешнее магнитное поле $\mathbf{B}_0$ направлено вдоль оси z , а волновой вектор лежит в плоскости (x, z) , так что $k_y = 0$.

Общее выражение для плотности энергии волны U из (1.12) определяется через поляризационные коэффициенты a_i и компоненты диэлектрического тензора ε_{ij} и может быть записано следующим образом [80]

$$U = \frac{|E|^2}{16\pi\omega} \sum_i \sum_j \frac{\partial}{\partial\omega} (\omega^2 \varepsilon_{ij}) a_i^* a_j, \quad (1.18)$$

где $|E|$ — амплитуда x -компоненты электрического поля волнового пакета (без ограничения общности в работе полагается, что $a_x = 1$), a_i^* обозначает комплексно-сопряженную величину a_i , а суммирование ведется по $i, j = (x, y, z)$.

1.4 Особенности распространения свистовых волн в магнитосфере

Магнитосферная плазма обладает выраженной пространственной неоднородностью таких параметров, как плотность $n_c(\mathbf{r})$ и напряженность магнитного поля $\mathbf{B}_0(\mathbf{r})$, при этом длина волны исследуемых возмущений λ обычно значительно меньше типичного масштаба неоднородностей $\mathcal{L}$, то есть выполняется неравенство $\lambda \ll \mathcal{L}$. Такое соотношение позволяет применить геометро-оптический (лучевой) подход для описания распространения волновых пакетов [82; 83]. В рамках этого подхода траектория волнового пакета определяется системой гамильтоновых уравнений:

$$\frac{d\mathbf{r}}{dt} = \frac{\partial\omega(\mathbf{k}, \mathbf{r})}{\partial\mathbf{k}} \equiv \mathbf{v}_g, \quad \frac{d\mathbf{k}}{dt} = -\frac{\partial\omega(\mathbf{k}, \mathbf{r})}{\partial\mathbf{r}}. \quad (1.19)$$

Здесь производные частоты по координате и по волновому вектору вычисляются на основе дисперсионного соотношения (1.15). Важно отметить, что при таком подходе все параметры среды, входящие в дисперсионное соотношение и другие формулы, трактуются как локальные функции координаты, то есть на каждом участке плазмы используются результаты, полученные для однородной среды, но с подстановкой локальных значений параметров. В геометро-оптическом приближении решение для электрического поля в неоднородной плазме

ищется в виде

$$\mathcal{E} = \text{Re}\{\mathbf{E}\} = \text{Re}\{\mathbf{E}_0(t, \mathbf{r})e^{i\psi}\}. \quad (1.20)$$

Здесь $\mathbf{E}$ – комплексное электрическое поле, символ Re означает взятие действительной части, а комплексная амплитуда $\mathbf{E}_0(t, \mathbf{r})$ является медленно меняющейся функцией времени и пространственных координат и может быть представлена с помощью вектора поляризации $\mathbf{a}$:

$$\mathbf{E}_0(t, \mathbf{r}) = |E(t, \mathbf{r})|\mathbf{a}e^{i\phi},$$

где ϕ – нелинейная фаза, а под $|E(t, \mathbf{r})|$ понимается амплитуда x -компоненты электрического поля (см. (1.18)). Эйконал $\psi(t, \mathbf{r})$ связан с частотой волнового пакета и локальным волновым вектором соотношениями:

$$\omega = -\frac{\partial\psi}{\partial t}$$

и

$$\mathbf{k} = \nabla\psi.$$

Магнитное поле волны $\mathcal{B}$ рассматривается в аналогичном представлении (1.20) и связано с электрическим полем $\mathcal{E}$ законом индукции Фарадея (1.3).

В работе, в частности, исследуется взаимодействие резонансных частиц с квазимонохроматическим сигналом, генерируемым наземным ОНЧ передатчиком. ОНЧ передатчики, работающие в диапазоне очень низких частот (3 - 30 кГц), представляют собой специализированные устройства, предназначенные для передачи радиосигналов на значительные расстояния. Их главная особенность заключается в способности генерировать радиоволны с длиной волны 10-100 км, которые распространяются вдоль поверхности Земли, в так называемом волноводе «Земля-ионосфера», огибая препятствия, а также проникают в морскую воду и грунт. Благодаря этому ОНЧ передатчики широко применяются для связи с подводными лодками, находящимися на глубине, а также для передачи сигналов в труднодоступные районы, где использование других диапазонов невозможно или неэффективно. Нижней границей естественного волновода служит поверхность Земли с высокой электропроводностью, а верхней – слой ионосферы, обладающий отражающими свойствами для радиоволн определенных частот.

Однако волновод «Земля-ионосфера» не является идеальным, поэтому часть энергии ОНЧ волн, генерируемых мощными наземными передатчиками, может «просачиваться» в земную магнитосферу. Попадая в магнитосферу,

ОНЧ волны распространяются преимущественно вдоль силовых линий магнитного поля Земли и резонансно взаимодействуют с находящимися там заряженными частицами, прежде всего с электронами. Такое взаимодействие способно вызывать ускорение частиц, а также приводить к их пич-угловому рассеянию и высыпанию в атмосферу.

В радиофизике принято различать два подхода к классификации излучений: частотное и физическое. Частотное разделение основывается на диапазоне частот, что удобно для описания технических характеристик передатчиков и источников сигналов. Как уже упоминалось, выделяют диапазон очень низких частот (ОНЧ), соответствующий 3 – 30 кГц. Однако в условиях плазмы магнитосферы Земли важную роль играет и физическая классификация, основанная на типе волновой моды. К таким модам относятся, в частности, свистовая (whistler) мода, ионно-циклотронная мода, магнито-звуковая мода и другие. Каждый режим характеризуется своими особенностями распространения и взаимодействия с заряженными частицами. В магнитосфере Земли ОНЧ диапазон соответствует именно свистовой моде, то есть излучения в этом диапазоне распространяются в магнитосфере преимущественно в виде свистовых волн, обладающих характерной дисперсией.

В Главах 2 и 3 будет рассматриваться случай плотной плазмы, типичной для земной магнитосферы, когда электронная плазменная частота значительно превышает электронную циклотронную частоту ($\omega_p^2 \gg \omega_c^2$). Кроме того, анализ будет ограничен диапазоном частот, существенно превышающих частоту нижнего гибридного резонанса, но остающихся меньше циклотронной частоты электронов

$$\omega_{\text{ЛН}} \ll \omega < \omega_c.$$

В этих условиях компоненты диэлектрического тензора (1.16) принимают следующий вид:

$$\epsilon_1 = \frac{\omega_p^2}{\omega_c^2 - \omega^2}, \quad \epsilon_2 = -\frac{\omega_p^2 \omega_c}{\omega(\omega_c^2 - \omega^2)}, \quad \epsilon_3 = -\frac{\omega_p^2}{\omega^2}, \quad (1.21)$$

а дисперсионное соотношение (1.15) для свистовых волн может быть выражено в форме

$$N^2 = \frac{k^2 c^2}{\omega^2} = \frac{\omega_p^2}{\omega(\omega_c |\cos \theta| - \omega)} \quad (1.22)$$

или в явном виде как функция частоты от волнового вектора и параметров плазмы

$$\omega = \omega_c |\cos \theta| \frac{k^2}{k^2 + \omega_p^2/c^2}. \quad (1.23)$$

Плотность энергии (1.18) свистовой волны тогда принимает вид:

$$U = \frac{|E|^2 \omega_p^2 \omega_c |\cos \theta|}{8\pi\omega(\omega_c - \omega |\cos \theta|)^2}. \quad (1.24)$$

В магнитосфере Земли распространение свистовых волн часто происходит внутри дактов плотности – протяженных каналов, ориентированных вдоль силовых линий магнитного поля и характеризующихся пониженной или повышенной концентрацией плазмы по сравнению с окружающей средой. Эти структуры выполняют функцию естественных волноводов, обеспечивая направленное распространение волны вдоль магнитного поля и минимизируя ее рассеяние в поперечном направлении. Это позволяет свести задачу к одномерному анализу вдоль оси канала. При этом решение полной системы уравнений геометрической оптики (1.19) становится избыточным, так как распространение волны полностью описывается одномерной моделью вдоль дакта. В этом случае угол волновой нормали θ считается равным нулю, что соответствует продольному распространению, то есть распространению волны вдоль силовой линии магнитного поля, которое также принято называть дактированным или каналированным.

Для корректного описания самосогласованного взаимодействия квазимонохроматических волн с резонансными частицами в условиях магнитосферной плазмы необходимо учитывать влияние эффектов распространения на характеристики циклотронного усиления. Как показано в работе [84], различные типы распространения свистовых волн в неоднородной плазме – каналированное внутри дактов и неканалированное в областях плавного изменения концентрации плазмы – приводят к существенно различающимся частотным профилям усиления и эффективности взаимодействия с энергичными электронами. Эти результаты подчеркивают важность учета геометрии распространения волновых пакетов при построении самосогласованных моделей взаимодействия волн и частиц.

Глава 2. Поиск самосогласованного профиля амплитуды дактированного сигнала ОНЧ передатчика, сформированного вследствие резонансного взаимодействия с энергичными электронами в магнитосфере

В данной главе исследуется взаимодействие заряженных электронов с монохроматическим сигналом, который излучается наземным ОНЧ передатчиком и распространяется в магнитосфере в свистовой моде. Предполагается, что сигнал инжектируется в магнитосферу Земли в течение продолжительного времени, в результате чего вдоль силовой трубки, соответствующей L -оболочке расположения передатчика, устанавливается стационарный профиль амплитуды волны. Рассматривается случай дактированного распространения волны, то есть распространения вдоль силовой линии геомагнитного поля, при котором во взаимодействие с волной вступают только электроны первого циклотронного резонанса.

Исследование, представленное в главе, базируется на кинетическом уравнении для функции распределения резонансных электронов f (1.9) и уравнении на плотность энергии волны (1.12). Эти уравнения лежат в основе самосогласованного подхода, который реализуется посредством итерационного алгоритма, позволяющего поэтапно учитывать взаимное влияние волны и частиц. Алгоритм включает следующие этапы:

1. На нулевом шаге амплитуда волны вдоль силовой линии определяется геометрическими факторами: групповой скоростью и поперечным сечением лучевой трубки.
2. На $(n + 1)$ -м шаге инкремент γ (1.13) вычисляется по профилю амплитуды волны, полученному на предыдущем n -м шаге.
3. Определяется новый профиль амплитуды волны с учетом нелинейного инкремента γ в соответствии с (1.12).

Сходимость метода зависит от плотности резонансных частиц на экваторе, амплитуды сигнала при выходе в магнитосферу, модели невозмущенной функции распределения и плотности холодной плазмы. Перейдем к более детальному рассмотрению поставленной задачи.

2.1 Уравнения движения и функция распределения резонансных частиц

2.1.1 Сведение уравнений движения резонансных электронов в поле дактированной свистойой волны к одномерной системе

Предполагается, что электромагнитное поле волны формируется в результате самосогласованного резонансного взаимодействия с энергичными нерелятивистскими электронами. В этом разделе рассматриваются уравнения движения для таких электронов, их строгий вывод подробно изложен, например, в работе [50]. Поскольку, как уже отмечалось ранее, профиль амплитуды волны считается стационарным, амплитуда поля волны не зависит от времени. В этих условиях электромагнитное поле сигнала ОНЧ передатчика, распространяющегося по волноводному каналу (дакту плотности) вдоль неоднородного внешнего магнитного поля $\mathbf{B}_0(s)$, можно представить в виде [см. (1.20)]:

$$\begin{aligned}\mathcal{E}_L &= -|E(s)| \cos \xi; & \mathcal{E}_\Phi &= |E(s)| \sin \xi; \\ \mathcal{B}_L &= -|B(s)| \sin \xi; & \mathcal{B}_\Phi &= -|B(s)| \cos \xi;\end{aligned}\tag{2.1}$$

где фаза ξ определяется

$$\xi = \int^s k(s') ds' - \omega t,$$

а амплитуда магнитного поля $|B(s)|$ связана с амплитудой электрического поля $|E(s)|$ соотношением

$$|B(s)| = \frac{k(s)c}{\omega} |E(s)|.$$

Здесь s — координата вдоль силовой линии внешнего магнитного поля, а величины (L, Φ, s) образуют правую тройку ортогональных криволинейных координат. Положительное направление s выбирается так, чтобы оно совпадало с направлением распространения волны, то есть волновое число k считается положительным. За начало отсчета координаты s принимается геомагнитный

экватор ($s = 0$). Предполагается, что частота волны ω и волновое число $k(s)$ удовлетворяют локальному дисперсионному соотношению для свистовой волны (1.22), распространяющейся вдоль внешнего магнитного поля ($\theta = 0$):

$$\frac{k^2(s)c^2}{\omega^2} = \frac{\omega_p^2(s)}{\omega(\omega_c(s) - \omega)} . \quad (2.2)$$

Как известно из литературы, уравнения движения для резонансных электронов в рассматриваемом случае могут быть получены из гамильтониана:

$$H(p_{\parallel}, s; \mu, \varphi; t) = \frac{p_{\parallel}^2}{2m} + \mu\omega_c - \frac{e|E|}{\omega} \sqrt{\frac{2\mu\omega_c}{m}} \sin \left(\int^s k(s') ds' - \omega t + \varphi \right) , \quad (2.3)$$

где канонически сопряженные переменные: $(p_{\parallel}, s)$ – продольный импульс частицы $p_{\parallel} = mv_{\parallel}$ и координата вдоль силовой линии поля s ; (μ, φ) – магнитный момент $\mu = mv_{\perp}^2/2\omega_c$ ($v_{\perp}$ – поперечная скорость частицы) и giroфаза φ . Сумма первых двух членов в (2.3) – это кинетическая энергия частицы $w = mv^2/2$. Поскольку переменные t и φ входят в (2.3) только в комбинации $(\varphi - \omega t)$, из уравнений гамильтоновой механики следует, что величина $H - \mu\omega$ сохраняется. Условие

$$\frac{d}{dt} \left(\int^s k(s') ds' - \omega t + \varphi \right) \ll \omega ,$$

определяет частицы, находящиеся в резонансе с волной. Для таких частиц изменения гамильтониана H и энергии w практически совпадают ($\Delta H \simeq \Delta w$), так что для них сохраняется интеграл движения

$$C \equiv w - \mu\omega = \text{const.} \quad (2.4)$$

Как известно, при продольном распространении волн существенным является только первый циклотронный резонанс, и частица вступает в резонанс с волной, когда ее продольная скорость $v_{\parallel}$ близка к резонансной скорости v_R , определяемой соотношением

$$v_R = \frac{\omega - \omega_c}{k}.$$

Для волн свистовой моды, для которых выполняется неравенство $\omega < \omega_c$ ($v_R < 0$), волна и резонансные электроны распространяются в противоположных направлениях.

При точном резонансе, то есть при равенстве продольной скорости частицы резонансному значению $v_{\parallel} = v_R$, удобно определить следующие величины

$$w_{\parallel R} = \frac{mv_R^2}{2}; \quad w_R = \frac{C\omega_c - w_{\parallel R}\omega}{\omega_c - \omega}; \quad \mu_R = \frac{w_R - C}{\omega} \equiv \frac{C - w_{\parallel R}}{\omega_c - \omega}, \quad (2.5)$$

где $w_{\parallel R}$ – продольная кинетическая энергия резонансной частицы, w_R – кинетическая энергия резонансной частицы, а μ_R – магнитный момент такой частицы. В рассматриваемом случае, когда плазма неоднородна, электронная циклотронная частота, волновое число и, соответственно, резонансная скорость являются функциями координаты s , измеряемой вдоль силовой линии геомагнитного поля, которое полагается дипольным. Для фиксированного значения C величины w_R и μ_R зависят только от координаты s .

Рассмотрим частицы с фиксированным значением C . Для достаточно малых амплитуд волны $|E|$ и больших магнитных моментов μ , при выполнении неравенства

$$\frac{\omega_c}{kv_{\perp}} \left(\frac{e|E|}{m\omega v_{\perp}} \right)^{1/2} \ll 1$$

величина μ в гамильтониане взаимодействия, то есть в третьем члене в (2.3), может быть заменена на μ_R . Тогда гамильтониан принимает вид:

$$H(p_{\parallel}, s; \mu, \varphi; t) = \frac{p_{\parallel}^2}{2m} + \mu\omega_c - \frac{e|E|}{\omega} \sqrt{\frac{2\mu_R\omega_c}{m}} \sin \left(\int^s k(s')ds' - \omega t + \varphi \right). \quad (2.6)$$

Уравнения движения, следующие из этого гамильтониана:

$$\begin{aligned} \frac{ds}{dt} &\equiv \frac{\partial H}{\partial p_{\parallel}} = \frac{p_{\parallel}}{m}; \\ \frac{dp_{\parallel}}{dt} &\equiv -\frac{\partial H}{\partial s} = -\mu \frac{d\omega_c}{ds} + \frac{e|E|k}{\omega} \sqrt{\frac{2\mu_R\omega_c}{m}} \cos \left(\int^s k(s')ds' - \omega t + \varphi \right); \\ \frac{d\varphi}{dt} &\equiv \frac{\partial H}{\partial \mu} = \omega_c; \\ \frac{d\mu}{dt} &\equiv -\frac{\partial H}{\partial \varphi} = \frac{e|E|}{\omega} \sqrt{\frac{2\mu_R\omega_c}{m}} \cos \left(\int^s k(s')ds' - \omega t + \varphi \right). \end{aligned} \quad (2.7)$$

Наличие интеграла движения C позволяет свести задачу к одномерной. Для этого введем новую переменную:

$$\zeta = \int^s k(s')ds' - \omega t + \varphi \quad (2.8)$$

которая подчиняется уравнению [см. (2.7)]:

$$\frac{d\zeta}{dt} = k(s)(v_{\parallel} - v_R), \quad (2.9)$$

где $v_{\parallel} = p_{\parallel}/m$, а v_R определен выше. Для резонансных частиц $v_{\parallel}$ близко к v_R , и ζ меняется медленно. Стоит отметить, что в неоднородной плазме свойство частицы быть резонансной или нерезонансной не является постоянным, поскольку резонансная частица может выйти из резонанса с волной, и наоборот, нерезонансная частица может стать резонансной. В дальнейшем нас будет интересовать движение частицы в резонансной области, где происходит существенное изменение кинетической энергии и магнитного момента. В нерезонансной области изменения этих величин малы.

Для описания движения в резонансной области удобно выбрать новую независимую переменную

$$\tilde{t} = \int_0^s \frac{ds'}{v_R(s')}, \quad (2.10)$$

однозначно связанную с координатой s . В резонансной области можно считать $d\tilde{t} \simeq dt$. Обозначив правую часть уравнения (2.9) как u и используя (2.7), получаем замкнутую систему двух уравнений первого порядка:

$$\frac{d\zeta}{d\tilde{t}} = u; \quad \frac{du}{d\tilde{t}} = \frac{1}{\tau^2} \cos \zeta - \alpha. \quad (2.11)$$

Нелинейное время τ и параметр неоднородности α определяются как:

$$\frac{1}{\tau^2} = \frac{e|E|k^2 v_{\perp R}}{m\omega}; \quad \alpha = \frac{k}{2} \left(\frac{dv_R^2}{ds} + \frac{v_{\perp R}^2}{\omega_c} \frac{d\omega_c}{ds} \right), \quad (2.12)$$

где

$$v_{\perp R}^2 = \frac{\omega_c}{\omega_c - \omega} \left(\frac{2C}{m} - v_R^2 \right), \quad (2.13)$$

и все функции s следует рассматривать как функции $\tilde{t}$ согласно определению (2.10). В принятом приближении уравнение для изменения кинетической энергии частицы:

$$\frac{dw}{d\tilde{t}} \simeq \frac{\partial H}{\partial \tilde{t}} = \frac{m\omega}{k^2 \tau^2} \cos \zeta \equiv \frac{m\omega}{k^2} \left(\frac{du}{d\tilde{t}} + \alpha \right), \quad (2.14)$$

где было использовано уравнение (2.11) для u . Из (2.14) получаем

$$w - w_0 = \frac{m\omega}{k^2} \left[u - u_0 + \int_{\tilde{t}_0}^{\tilde{t}} \alpha(t) dt \right], \quad (2.15)$$

где нижний индекс «0» обозначает начальные значения, то есть значения при $\tilde{t} = \tilde{t}_0$. После решения системы уравнений (2.11) изменение кинетической энергии частицы определяется из (2.15), а изменение магнитного момента, если оно представляет интерес, находится из (2.4) и равно

$$\mu - \mu_0 = \frac{w - w_0}{\omega} . \quad (2.16)$$

Используя определения (2.5) и (2.12), можно легко проверить, что параметр неоднородности α можно выразить как

$$\alpha = \frac{k^2}{m\omega} \frac{dw_R}{d\tilde{t}} . \quad (2.17)$$

Это также следует из (2.14), если учесть, что w_R есть не что иное, как энергия частицы, находящейся в резонансе с волной, что всегда верно для частицы, захваченной по фазе, и что для такой частицы величина u , а следовательно, и $du/d\tilde{t}$ в среднем равны нулю.

2.1.2 Невозмущенная функция распределения частиц и линейный инкремент волны

Величина (2.4) остается инвариантом движения и в отсутствие волнового воздействия, поэтому естественно использовать ее наряду с энергией w в качестве аргумента невозмущенной функции распределения частиц. В переменных w и C невозмущенная функция распределения может быть записана в виде:

$$f_0(w, C) = \frac{n_{eq}}{\pi v_T^3 I(\nu)} \left(\frac{(w - C) \omega_{ceq}}{w \omega} \right)^\nu \exp \left(-\frac{w}{T} \right) , \quad (2.18)$$

где n_{eq} – экваториальная плотность энергичных электронов, ω_{ceq} – циклотронная частота на экваторе, T – эффективная температура, а ν – параметр, характеризующий конус потерь. Тепловая скорость v_T определяется как

$$v_T = \left(\frac{2T}{m} \right)^{1/2} .$$

Нормировочный множитель, обеспечивающий корректную нормировку функции распределения (1.11), вычисляется следующим образом:

$$I(\nu) = \int_0^\infty dx \int_{-\infty}^\infty dz \left(\frac{x}{x + z^2} \right)^\nu e^{-(x+z^2)} \equiv \mathcal{B}(1/2, \nu + 1) \mathcal{G}(3/2) , \quad (2.19)$$

где $\mathcal{B}(z, \kappa)$ и $\mathcal{G}(z)$ – бета- и гамма-функции соответственно. Если вместо C использовать магнитный момент μ в качестве независимой переменной, функция распределения принимает более привычный вид:

$$f_0(w, \mu) = \frac{n_{eq}}{\pi v_T^3 I(\nu)} \left(\frac{\mu \omega_{ceq}}{w} \right)^\nu \exp \left(-\frac{w}{T} \right), \quad (2.20)$$

что позволяет явно интерпретировать физический смысл параметра ν . Для данной функции распределения связь между локальной плотностью энергичных электронов $n(s)$ и их экваториальной плотностью n_{eq} выражается через циклотронную частоту:

$$n(s) = n_{eq} \left(\frac{\omega_{ceq}}{\omega_c(s)} \right)^\nu,$$

где s – координата вдоль выбранной силовой линии, а $\omega_c(s)$ – локальная циклотронная частота. Таким образом, рассмотренная функция распределения полностью определяется экваториальной плотностью n_{eq} , температурой T и параметром конуса потерь ν .

Хотя в дальнейшем основное внимание в этой главе будет уделено исследованию нелинейного инкремента волн в неоднородной плазме, целесообразно привести также выражение для линейного инкремента в однородной плазме. Общее выражение для линейного инкремента волн в магнитоактивной плазме с анизотропным распределением скоростей было получено в [85]; см. также работу [51]. Для волн свистовой моды, распространяющихся вдоль внешнего магнитного поля, и функции распределения, записанной в переменных w и C , это выражение имеет следующий вид:

$$\gamma_L = \frac{8\pi^3 e^2 \omega^2 \omega_c}{m^2 c^2 k^3} \int_{w_{\parallel R}}^{\infty} \mu_R(C) \left(\frac{\partial f_0}{\partial w} \right)_{C, w=w_R} dC. \quad (2.21)$$

Если в качестве функции распределения использовать выражение (2.18), то формула для линейного инкремента (2.21) принимает вид:

$$\begin{aligned} \gamma_L = \frac{8\pi^2 e^2 \omega \omega_c n_{eq}}{m^2 c^2 k^3 v_T^3 I(\nu)} \left(\frac{\omega_{ceq}}{\omega} \right)^\nu \int_{w_{\parallel R}}^{\infty} e^{-\frac{w_R}{T}} \left(\frac{w_R - C}{w_R} \right)^\nu \times \\ \times \left(\frac{\nu C}{w_R} - \frac{w_R - C}{T} \right) dC. \end{aligned} \quad (2.22)$$

Здесь используются величины, определенные в (2.5).

2.1.3 Особенности одномерной системы уравнений движения резонансных частиц

Задача нахождения функции распределения резонансных электронов в поле квазимонохроматической волны свистовой моды, распространяющейся вдоль неоднородного магнитного поля, сводится к решению системы уравнений для (ζ, u) (2.11). Согласно теореме Лиувилля (1.10), функция распределения $f(\tilde{t}, u, \zeta, w; C)$ выражается через невозмущенную функцию $f_0(w; C)$ как:

$$f(\tilde{t}, u, \zeta, w; C) = f_0[w_0(\tilde{t}, u, \zeta, w; C); C] , \quad (2.23)$$

где $w_0(\tilde{t}, u, \zeta, w; C)$ определяется из уравнения (2.15). После того как величина $u_0(\tilde{t}, u, \zeta; C)$ найдена из решения системы уравнений (2.11), функция распределения находится из приведенного выше соотношения и уравнения (2.15). Далее подробно рассмотрим систему уравнений (2.11).

Уравнения (2.11) описывают движение частицы в эффективном потенциале

$$p = \alpha\zeta - \frac{1}{\tau^2} \sin \zeta , \quad (2.24)$$

который изображен на Рис.2.1 и качественно меняет форму в зависимости от величины

$$\beta = \frac{1}{\alpha\tau^2} , \quad (2.25)$$

– фундаментального безразмерного параметра задачи. Для определенности полагается $\alpha > 0$. Модификация формул для случая $\alpha < 0$ очевидна. Эффективная энергия определяется как

$$\varepsilon = \frac{u^2}{2} + p(\zeta, \tilde{t}) \equiv \frac{u^2}{2} + \alpha\zeta - \frac{1}{\tau^2} \sin \zeta \quad (2.26)$$

и выполняет функцию гамильтониана, на основе которого выводятся уравнения (2.11) при рассмотрении ζ и u в качестве канонически сопряженных переменных. В случае постоянных значений α и τ величина ε сохраняется, если же α и τ зависят от s (и, следовательно, от $\tilde{t}$), то сохранение ε не происходит.

Когда нелинейность доминирует над неоднородностью, то есть при $|\beta| > 1$, потенциал p содержит потенциальные ямы, и, соответственно, существуют захваченные по фазе (или просто захваченные) частицы, чья продольная скорость осциллирует вокруг резонансной скорости, изменяющейся в пространстве. В

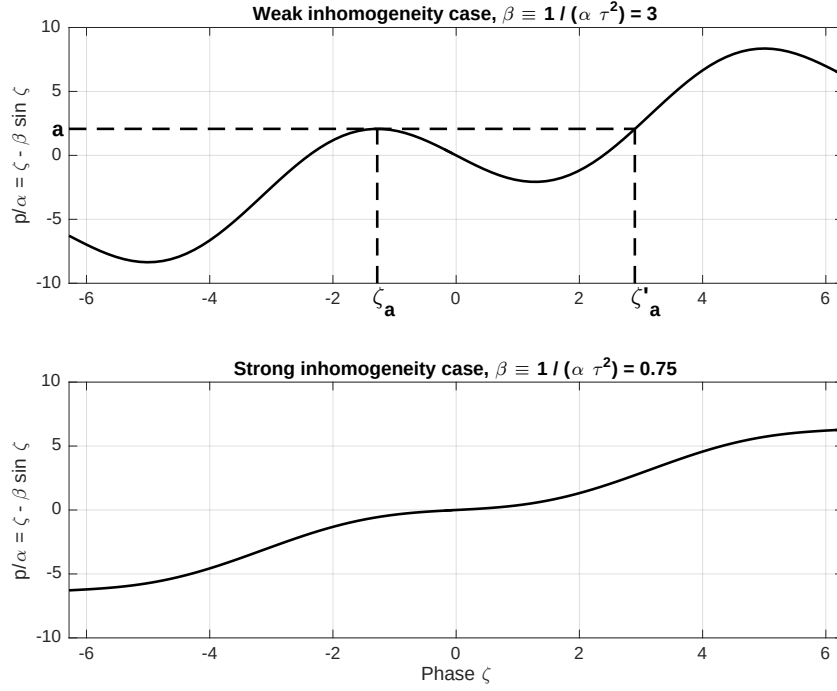


Рисунок 2.1 — Эффективный потенциал для слабой (верхняя панель) и сильной (нижняя панель) неоднородности.

этом случае есть и пролетные частицы, совершающие неограниченное движение. Если их начальная «скорость» $u_0 > 0$, они отражаются от потенциала, после чего их скорость u меняет знак. Под скоростью u понимается нормированное отклонение продольной скорости частицы от резонансного значения. В точке отражения продольная скорость частицы $v_{\parallel} = v_R$ в лабораторной системе отсчета, то есть $u = 0$. В противоположном случае, когда $|\beta| < 1$, потенциал p — монотонная функция ζ , и захваченные частицы отсутствуют.

Подробнее остановимся на случае $|\beta| > 1$ и $\alpha > 0$, то есть $\beta > 1$. Для определенности рассмотрим частицы, координата ζ которых находится между двумя соседними максимумами потенциала, слева и справа от точки $\zeta = 0$. Обозначим меньший из этих максимумов через $\alpha \cdot a$, а соответствующую координату — ζ_a . Легко видеть, что

$$a = -\alpha \cos(1/\beta) + \sqrt{\beta^2 - 1}; \quad \zeta_a = -\alpha \cos(1/\beta).$$

Вторая точка в этом интервале, где потенциал равен $\alpha \cdot a$, обозначается как ζ'_a . Значение второго максимума и соответствующая координата ζ отличаются от $\alpha \cdot a$ и ζ_a на $2\pi\alpha$ и 2π соответственно. Для минимума потенциала выполняется

$$p_{\min} = -\alpha \cdot a, \quad \zeta_{\min} = -\zeta_a.$$

Частицы с эффективной энергией в интервале $-\alpha \cdot a < \varepsilon < \alpha \cdot a$ и координатой ζ в интервале $\zeta_a < \zeta < \zeta'_a$ являются захваченными по фазе. Остальные частицы с $\zeta_a < \zeta < \zeta_a + 2\pi$ – пролетные.

Важной характеристикой резонансного взаимодействия при $|\beta| > 1$ (что можно назвать случаем слабой неоднородности) является фазовый объем захваченных частиц на плоскости (u, ζ) , усредненный по длине волны:

$$\begin{aligned} \frac{1}{2\pi} \int_{S_T} \int du d\zeta &= \frac{2}{2\pi} \int_{S_T} \int \frac{d\varepsilon d\zeta}{\sqrt{2(\varepsilon - \alpha\zeta + \tau^{-2} \sin \zeta)}} = \\ &= \frac{\sqrt{2}}{\pi\tau\sqrt{|\beta|}} \int_{\zeta_a}^{\zeta'_a} \sqrt{a - \zeta + \beta \sin \zeta} d\zeta. \end{aligned} \quad (2.27)$$

Здесь S_T – фазовый объем захваченных частиц на плоскости (u, ζ) , множитель 2 учитывает оба направления скорости u . Для дальнейшего рассмотрения вводится положительная безразмерная величина $\Omega(\beta)$, которая связана с фазовым объемом захваченных частиц следующим образом:

$$\Omega(\beta) = \frac{1}{\sqrt{|\beta|}} \int_{\zeta_a}^{\zeta'_a} \sqrt{a - \zeta + \beta \sin \zeta} d\zeta. \quad (2.28)$$

2.1.4 Изменение энергии и функция распределения захваченных частиц

Дальнейшее рассмотрение относится к частицам с фиксированным значением C , что подразумевается, но не указывается явно в каждом выражении.

Как известно, изменение энергии захваченных частиц может быть весьма существенным, тогда как у пролетных частиц оно значительно меньше. Действительно, для захваченных частиц величина $u = k(s)(v_{\parallel} - v_R)$ осциллирует вокруг нуля, следовательно, в среднем $du/d\tilde{t} = 0$. Из уравнения (2.14) тогда получаем, что энергия захваченных по фазе частиц изменяется по закону:

$$\frac{dw}{d\tilde{t}} = \frac{m\omega}{k^2} \alpha, \quad (2.29)$$

то есть увеличивается при $\alpha > 0$ и наоборот. Величина α/k^2 равна нулю на экваторе и является нечетной функцией координаты s . Учитывая, что и ω_c , и v_R^2 имеют минимумы на экваторе ($s = 0$), из определения α (2.12) следует,

что $\text{sign}(\alpha) = \text{sign}(s)$. Поскольку положительное направление координаты s выбрано по направлению распространения волны (то есть $s < 0$ соответствует полушарию с передатчиком, а $s > 0$ – противоположному полушарию), а волна и резонансные частицы движутся навстречу друг другу, можно сделать вывод, что энергия захваченных частиц увеличивается при их движении к экватору и уменьшается при удалении от него. Если бы профиль амплитуды волны был симметричен относительно экватора (что имеет место при отсутствии резонансного взаимодействия волна-частица), то точки захвата и выхода из захвата также были бы симметричны, и итоговое изменение энергии частицы было бы равно нулю. Однако при наличии взаимодействия профиль амплитуды становится асимметричным, и итоговое изменение энергии захваченных частиц становится отличным от нуля. Нетрудно видеть, что при положительном инкременте волны энергия захваченных частиц увеличивается. В этом случае амплитуда волны как функция координаты s возрастает в направлении распространения волны, то есть в полушарии, противоположном расположению передатчика, амплитуда больше. Поскольку волна и резонансные частицы движутся в противоположных направлениях, частицы захватываются дальше от экватора, чем выходят из захвата в противоположном полушарии. Как показано выше, энергия захваченных частиц возрастает при движении к экватору и уменьшается при удалении от него, поэтому итоговое изменение энергии оказывается положительным.

Если бы не только величина v_g , но и инкремент волны γ в уравнении (1.12) был бы локальной, возможно, нелинейной функцией амплитуды волны и координаты s , задача нахождения профиля волны сводилась бы к решению обыкновенного нелинейного дифференциального уравнения. Особенность рассматриваемой задачи состоит в том, что инкремент – это нелокальный нелинейный функционал, который сам зависит от профиля волны, который мы хотим найти. Иными словами, чтобы найти профиль волны, необходимо решить нелинейное интегро-дифференциальное уравнение. Как будет показано ниже, единственный нелокальный член в выражении для нелинейного инкремента – это усредненная функция распределения захваченных частиц. Определение этой функции основано на сохранении фазового объема и теореме Лиувилля (1.10), которая в данном случае утверждает, что функция распределения захваченных частиц в данной точке фазового пространства равна функции распределения в той точке, где частица была захвачена. Будем считать, что

функция распределения в точке захвата, скажем, s_0 , равна невозмущенной функции $f_0(w_{R0}, C)$, где w_{R0} – функция от s_0 согласно (2.5), где все значения функций взяты в точке $s = s_0$. Таким образом, для заданного C , w_{R0} зависит только от точки s_0 [см. (2.5)]. Следовательно, усреднение функции распределения захваченных по фазе частиц фактически производится по координатам s_0 , вдоль которых происходил захват. В качестве весовой функции, согласно сохранению фазового объема, выступает скорость изменения фазового объема вдоль координаты. Остановимся на этом подробнее.

Пусть $P_T(s, C)$ – фазовый объем захваченных частиц на плоскости $(s, v_{\parallel})$, относящийся к одной длине волны и характеризующийся интегралом движения C в точке s . Фазовый объем $P_T(s, C)$ связан с величиной $\Omega(\beta)$ (2.28) следующим образом:

$$P_T(s, C) = \frac{2\sqrt{2}}{k^2\tau} \Omega(\beta) . \quad (2.30)$$

Хотя наше рассмотрение не ограничено каким-либо конкретным ОНЧ передатчиком, для определенности будем использовать параметры, близкие к Новосибирскому передатчику радиотехнической системы дальней навигации (РСДН-20) [86]. Это позволит далее определить функцию распределения захваченных частиц. Будем считать, что дактированный квазимонохроматический волновой пакет с частотой 11.9 кГц, представляющий сигнал передатчика, распространяется вдоль L -оболочки 2.5 из северного в южное полушарие в положительном направлении оси s . Следовательно, резонансные частицы движутся на север. Захваченные по фазе частицы существуют в области, где параметр β (2.25) удовлетворяет условию $1/|\beta| \equiv |\alpha|\tau^2 < 1$. Типичное поведение этого параметра вдоль силовой линии $L = 2.5$ показано на левом графике рис. 2.2, а на правом – профиль фазового объема $P_T(s, C)$ (2.30). Обе величины рассчитаны для $C = 100$ кэВ и профиля магнитного поля волны после второй итерации (см. ниже). Обозначим через s_1 точку в южном полушарии, где $\beta(s) = 1$ и где начинается захват частиц. Фазовый объем $P_T(s, C)$ достигает максимума на экваторе ($s = 0$). Рассмотрим точку $0 < s < s_1$ и найдем функцию $f_T(s, C)$ в этой точке. Поскольку частицы, находящиеся в захвате в точке s , были захвачены на интервале $s < s_0 < s_1$, их усредненная функция распределения равна:

$$\overline{f_T(s, C)} = \frac{1}{P_T(s, C)} \left| \int_{s_1}^s f_0(w_{R0}, C) \frac{dP_T(s_0, C)}{ds_0} ds_0 \right| . \quad (2.31)$$

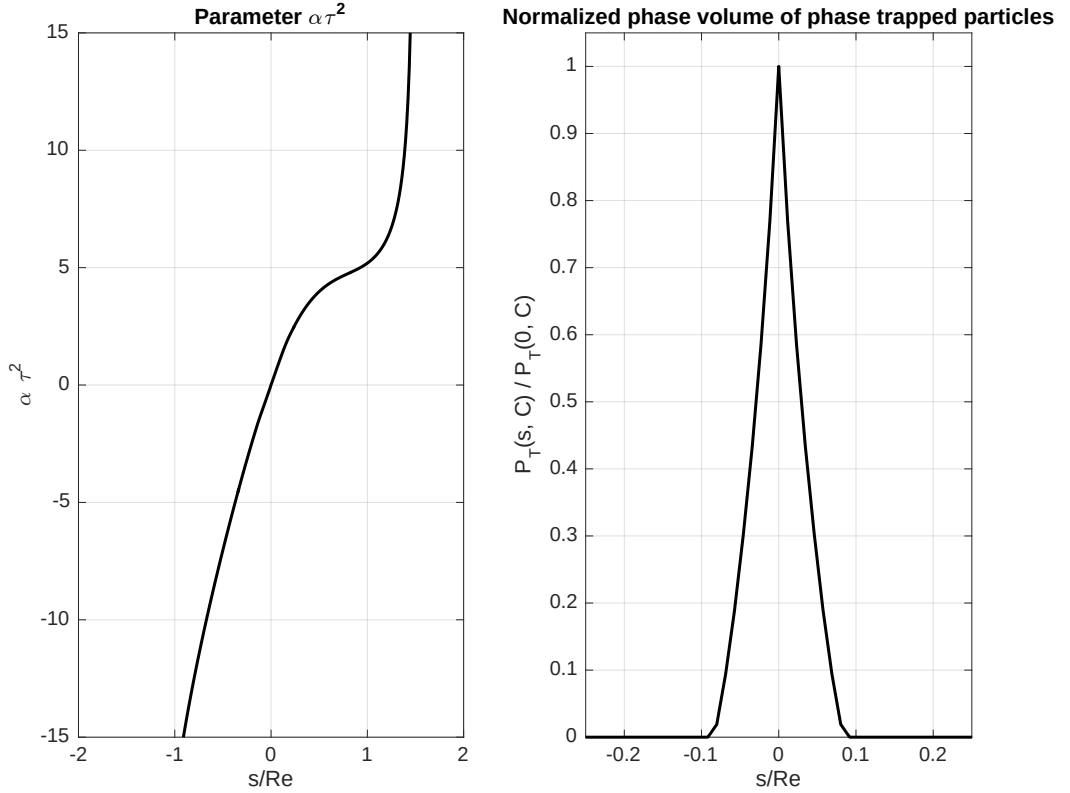


Рисунок 2.2 — Параметр $\alpha \tau^2$ (левая панель) и нормированный фазовый объем захваченных частиц (правая панель).

Заметим, что для свистовых волн, распространяющихся вдоль магнитного поля, резонансная скорость для первого циклотронного резонанса отрицательна, то есть резонансные частицы движутся в отрицательном направлении оси s . На интервале $0 < s < s_1$ обе величины $dP_T(s_0, C)/ds_0$ и ds_0 отрицательны. Поэтому, чтобы подчеркнуть, что вероятность является положительной величиной, в уравнении (2.31) был взят модуль. Выражение (2.31) для функции распределения захваченных частиц применимо в интервале $0 < s < s_1$ южного полушария. Рассмотрим теперь функцию распределения захваченных частиц в северном полушарии в интервале $s_2 < s < 0$, где s_2 определяется условием $|\beta(s_2)| = 1$ и является минимальным s в северном полушарии, для которого существуют захваченные частицы. Когда резонансные частицы удаляются от экватора, фазовый объем захваченных частиц уменьшается вдоль их траекторий, и некоторые частицы выходят из захвата. Обозначим через s' точку в южном полушарии, в которой фазовый объем захваченных частиц $P_T(s', C)$ равен фазовому объему $P_T(s, C)$ в точке, для которой рассчитывается функция распределения. Благодаря сохранению фазового объема можно утверждать, что частицы, остающиеся захваченными в точке s северного полушария, были захвачены в южном полушарии между точками s_1 и s' , поэтому их функция

распределения определяется как:

$$\overline{f_T(s, C)} = \frac{1}{P_T(s, C)} \left| \int_{s_1}^{s'} f_0(w_{R0}, C) \frac{dP_T(s_0, C)}{ds_0} ds_0 \right|. \quad (2.32)$$

Выражения (2.31) и (2.32) завершают определение функции распределения захваченных по фазе частиц.

2.1.5 Функция распределения пролетных частиц

Для пролетных частиц время резонансного взаимодействия с волной и изменение их кинетической энергии значительно меньше, чем для захваченных частиц. Поэтому для нахождения функции распределения в некоторой точке s можно решить уравнения движения, полагая параметры α и τ постоянными, равными их значениям в точке s . Тогда величина ϵ (2.26) является интегралом движения, так что

$$u = \sqrt{2(\epsilon - \alpha\zeta + \tau^{-2} \sin \zeta)} \operatorname{sign} u \equiv \sqrt{2\alpha} \sqrt{\epsilon - \zeta + \beta \sin \zeta} \operatorname{sign} u, \quad (2.33)$$

где $\epsilon = \epsilon/\alpha$, и, как прежде, $\alpha > 0$. Тогда можно проинтегрировать второе уравнение из (2.11) следующим образом:

$$u - u_0 + \int_{\tilde{t}_0}^{\tilde{t}} \alpha(t) dt = \frac{1}{\sqrt{2\alpha} \tau^2} \int_{\zeta_0}^{\zeta} \frac{\cos x dx}{\sqrt{\epsilon - x + \beta \sin x} \operatorname{sign} u}, \quad (2.34)$$

где учтено, что, согласно первому уравнению из (2.11), $d\tilde{t} = d\zeta/u$, и использовано выражение (2.33) для u . Обратите внимание, что выражение (2.34) совпадает с (2.15) с точностью до множителя $m\omega/k^2$, который определяет начальную энергию частицы w_0 и, следовательно, функцию распределения (см. (2.23)).

Далее потребуется асимптотическое выражение для функции распределения при $\sqrt{\alpha\tilde{t}} \gg 1$. В этом случае для частиц с координатой $\zeta \sim 1$ начальная координата ζ_0 – большое отрицательное число (см. рис. 2.1). Благодаря быстрой сходимости интеграла в (2.34) по нижнему пределу, последний можно заменить на $-\infty$. Тогда для частиц с $u > 0$ и $u < 0$ получаем соответственно:

$$u - u_0 + \int_{\tilde{t}_0}^{\tilde{t}} \alpha(t) dt = \frac{1}{\sqrt{2\alpha} \tau^2} \int_{-\infty}^{\zeta} \frac{\cos x dx}{\sqrt{\epsilon - x + \beta \sin x}}, \quad (2.35)$$

$$u - u_0 + \int_{\tilde{t}_0}^{\tilde{t}} \alpha(t) dt = \frac{1}{\sqrt{2\alpha} \tau^2} \int_{-\infty}^{\zeta_c} \frac{\cos x dx}{\sqrt{\epsilon - x + \beta \sin x}} - \frac{1}{\sqrt{2\alpha} \tau^2} \int_{\zeta_c}^{\zeta} \frac{\cos x dx}{\sqrt{\epsilon - x + \beta \sin x}}, \quad (2.36)$$

где ζ_c – точка отражения для частиц с эффективной энергией ϵ , то есть наименьший корень уравнения $\epsilon - \zeta + \beta \sin \zeta = 0$.

Поскольку для пролетных частиц изменение кинетической энергии мало, для разности между функцией распределения и ее невозмущенным значением можно записать:

$$\begin{aligned} f - f_0 &= f_0(w_0, C) - f_0(w, C) \simeq f'_0(w_R, C)(w_0 - w) = \\ &= f'_0(w_R, C) \frac{m\omega}{k^2} \left[u_0 - u - \int_{\tilde{t}_0}^{\tilde{t}} \alpha(t) dt \right], \end{aligned} \quad (2.37)$$

где

$$f'_0(w_R, C) = \left. \frac{\partial f_0(w, C)}{\partial w} \right|_{w=w_R},$$

а величина w_R определена в (2.5), и использовано соотношение (2.15).

Для вычисления инкремента волны требуется сумма разностей между функцией распределения и ее невозмущенным значением для частиц с $u > 0$ и $u < 0$. Обозначим эту величину как df . Подставляя в (2.37) выражения (2.35) и (2.36) и суммируя результаты, получаем:

$$df = -f'_0(w_R, C) \frac{m\omega}{k^2} \sqrt{2\alpha} \beta \Phi(\epsilon), \quad (2.38)$$

где

$$\Phi(\epsilon) = \int_{-\infty}^{\zeta_c} \frac{\cos x dx}{\sqrt{\epsilon - x + \beta \sin x}}. \quad (2.39)$$

Функция $\Phi(\epsilon)$ впервые введена и исследована в работе [79], в которой было показано, что $\Phi(\epsilon)$ – периодическая функция по ϵ с периодом 2π . Ее разложение в ряд Фурье имеет вид:

$$\Phi(\epsilon) = b_0 + \sum_{n=1}^{\infty} b_n \cos n\epsilon + c_n \sin n\epsilon, \quad (2.40)$$

где коэффициенты Фурье b_0, b_n, c_n определяются следующим образом (для определения ζ_a и ζ'_a см. рисунок 2.1):

$$b_0 = -\frac{1}{\pi\beta} \int_{\zeta_a}^{\zeta'_a} \sqrt{a - x + \beta \sin x} dx, \quad (2.41)$$

$$b_n = \sqrt{\frac{2\pi}{n}} \frac{1}{\beta} J_n(\beta n) - \sqrt{\frac{2}{\pi n}} \frac{1}{\beta} \int_{\zeta_a}^{\zeta'_a} dx \left[\cos(nx - n\beta \sin x) \cdot \mathcal{C}(\sqrt{n} \cdot u_a) - \right. \\ \left. - \sin(nx - n\beta \sin x) \cdot \mathcal{S}(\sqrt{n} \cdot u_a) \right], \quad (2.42)$$

$$c_n = \sqrt{\frac{2\pi}{n}} \frac{1}{\beta} J_n(\beta n) - \sqrt{\frac{2}{\pi n}} \frac{1}{\beta} \int_{\zeta_a}^{\zeta'_a} dx \left[\cos(nx - n\beta \sin x) \cdot \mathcal{S}(\sqrt{n} u_a) + \right. \\ \left. + \sin(nx - n\beta \sin x) \cdot \mathcal{C}(\sqrt{n} u_a) \right]. \quad (2.43)$$

Здесь $J_n(z)$ – функции Бесселя первого рода порядка n , $\mathcal{C}(z)$ и $\mathcal{S}(z)$ – косинус и синус интегралы Френеля соответственно, а

$$u_a = \sqrt{a - x + \beta \sin x}.$$

Важно отметить, что коэффициент b_0 связан с ранее введенной величиной $\Omega(\beta)$ (см. формулу (2.28)) следующим образом: $b_0 = -\text{sign}(\beta) \Omega(|\beta|)/\pi\sqrt{|\beta|}$. В приложении А приводится вывод этих выражений, который отсутствовал в оригинальной работе [79].

2.2 Вычисление нелинейного инкремента волны

Инкремент волны γ определяется выражениями (1.13), (1.14) и плотностью энергии свистовой волны (1.12), которая для продольного распространения ($\theta = 0^\circ$) может быть записана в виде

$$U = \frac{|B|^2}{8\pi} \frac{\omega_c}{(\omega_c - \omega)}, \quad (2.44)$$

где $|B|$ – амплитуда магнитного поля волны. Подставляя (1.14) и (2.44) в (1.13), получаем:

$$\gamma = \frac{4\pi e(\omega_c - \omega)}{|B|^2 \omega_c} \int (v_L \mathcal{E}_L + v_\Phi \mathcal{E}_\Phi)(f - f_0) dv_L dv_\Phi dv_\parallel. \quad (2.45)$$

Используя выражения (2.1) для компонент электрического поля и переходя к переменным ζ, u и C , из (2.45) имеем:

$$\gamma = -\frac{4\pi e^2 \omega}{km^2 c^2} \int_{w_{\parallel R}}^{\infty} v_{\perp R}^2(C) \tau^2 dC \int_{-\infty}^{\infty} du \int_{\zeta_a}^{\zeta_a+2\pi} d\zeta \cos \zeta \cdot (f - f_0), \quad (2.46)$$

где $v_{\perp R}^2$ определено в (2.13), а нелинейное время τ (2.12) введено с учетом равенства $|E| = |B|\omega/kc$. Далее, двойной интеграл по $du d\zeta$ разбивается на два интеграла по областям захваченных и пролетных частиц:

$$\begin{aligned} \int_{-\infty}^{\infty} du \int_{\zeta_a}^{\zeta_a+2\pi} d\zeta \cos \zeta \cdot (f - f_0) &= \int_{S_T} \int dud\zeta \cos \zeta \cdot (f - f_0) + \\ &+ \int_{S_{UT}} \int dud\zeta \cos \zeta \cdot (f - f_0). \end{aligned} \quad (2.47)$$

В области захваченных частиц функцию f можно заменить ее усредненным значением (2.31) или (2.32), а невозмущенную функцию распределения – $f_0(w_R, C)$. Отклонение первого двойного интеграла от нуля связано с асимметрией области интегрирования. Для вычисления первого интеграла делается подстановка:

$$\cos \zeta = \tau^2(\tau^{-2} \cos \zeta - \alpha) + \alpha \tau^2. \quad (2.48)$$

Так как область интегрирования по захваченным частицам ограничена сепаратрисой $p(\zeta; \alpha, \tau) = \alpha \cdot a$ (см. (2.24) и рис. 2.1), и поскольку $\tau^{-2} \cos \zeta - \alpha = -dp/d\zeta$, интеграл от $(\cos \zeta - \alpha \tau^2)$ обращается в ноль, а интеграл от последнего слагаемого в (2.48) пропорционален фазовому объему захваченных частиц. Тогда вклад в инкремент от области захваченных частиц равен:

$$-\frac{8\sqrt{2}\pi e^2 \omega}{km^2 c^2} \int_{w_{\parallel R}}^{\infty} \alpha \tau^3 v_{\perp R}^2 \Omega(\beta) \left[\overline{f_T(s, C)} - f_0(w_R, C) \right] dC. \quad (2.49)$$

Нужно подчеркнуть, что хотя интеграл (2.49) берется по области захваченных частиц, это не означает, что (2.49) представляет только вклад захваченных частиц, поскольку вычитание невозмущенной функции распределения смешивает вклады от захваченных и пролетных частиц.

Рассмотрим теперь второй двойной интеграл. Подставляя (2.38), (2.40) и переходя от $dud\zeta$ к переменным $d\epsilon d\zeta$, получаем:

$$\int_{S_{UT}} \int dud\zeta \cos \zeta \cdot (f - f_0) = -f'_0(w_R, C) \frac{m\omega}{k^2\tau^2} \int_{S_{UT}} \int \frac{\cos \zeta d\epsilon d\zeta}{\sqrt{\epsilon - \zeta + \beta \sin \zeta}} \times \\ \times \left[b_0 + \sum_{n=1}^{\infty} b_n \cos n\epsilon + c_n \sin n\epsilon \right]. \quad (2.50)$$

Согласно выводу, величина df учитывает вклады от частиц с обоими знаками u , поэтому интегрирование в выражении (2.50) осуществляется только по области $u > 0$. Следует отметить, что из трех параметров τ , α и $\beta = 1/\alpha\tau^2$ независимыми являются только два, однако для ясности используются все три. Как показано в приложении A, интегралы в (2.50) выражаются через коэффициенты Фурье разложения функции $\Phi(\epsilon)$:

$$\int_{S_{UT}} \int \frac{d\epsilon d\zeta \cos \zeta}{\sqrt{\epsilon - \zeta + \beta \sin \zeta}} = 2\pi b_0 ; \\ \int_{S_{UT}} \int \frac{d\epsilon d\zeta \cos \zeta \cos n\epsilon}{\sqrt{\epsilon - \zeta + \beta \sin \zeta}} = \pi b_n ; \quad (2.51) \\ \int_{S_{UT}} \int \frac{d\epsilon d\zeta \cos \zeta \sin n\epsilon}{\sqrt{\epsilon - \zeta + \beta \sin \zeta}} = \pi c_n.$$

С учетом (2.51) вклад в инкремент от пролетных частиц может быть записан в виде:

$$\frac{4\pi^2 e^2 \omega^2}{k^3 m c^2} \int_{w_{||R}}^{\infty} f'_0(w_R, C) v_{\perp R}^2(C) \left[2b_0^2 + \sum_{n=1}^{\infty} b_n^2 + c_n^2 \right] dC. \quad (2.52)$$

Объединяя (2.49) и (2.52), получаем выражение для нелинейного инкремента волны свистовой моды, распространяющейся вдоль силовой линии магнитного поля, для произвольного соотношения неоднородности и нелинейности, то есть

произвольного значения параметра β :

$$\begin{aligned} \gamma = & \frac{4\pi^2 e^2 \omega^2}{k^3 m c^2} \int_{w_{\parallel R}}^{\infty} f'_0(w_R, C) v_{\perp R}^2(C) \left[2b_0^2 + \sum_{n=1}^{\infty} b_n^2 + c_n^2 \right] dC - \\ & - \frac{8\sqrt{2}\pi e^2 \omega}{k m^2 c^2} \int_{w_{\parallel R}}^{\infty} \alpha \tau^3 v_{\perp R}^2 \Omega(\beta) \left[\overline{f_T(s, C)} - f_0(w_R, C) \right] dC. \end{aligned} \quad (2.53)$$

Это выражение (2.53) справедливо для любого значения параметра β и обоих знаков α . Следует обратить внимание, что в случае $|\beta| > 1$, когда существуют захваченные по фазе частицы, их вклад в инкремент имеет знак $-\alpha$ в соответствии с уравнением (2.29). В то же время вклад в инкремент, связанный с усредненным распределением пролетных частиц, имеет знак α , что означает, что в среднем изменение их кинетической энергии имеет знак $-\alpha$ [51]. В случае сильной неоднородности, то есть $|\beta| < 1$, когда захваченные по фазе частицы отсутствуют, величины $b_0 = \Omega(\beta) = 0$, так что второй член в (2.53) отсутствует, а первый член сводится к

$$\gamma = \frac{4\pi^2 e^2 \omega^2}{k^3 m c^2} \int_{w_{\parallel R}}^{\infty} f'_0(w_R, C) v_{\perp R}^2(C) \sum_{n=1}^{\infty} (b_n^2 + c_n^2) dC. \quad (2.54)$$

График функции $\pi^{-1} \sum_{n=1}^{\infty} (b_n^2 + c_n^2)$ приведен на рис. 2.3. Видно, что при $|\beta| \rightarrow 0$, то есть при сильной неоднородности или слабой нелинейности, сумма стремится к $\sum_{n=1}^{\infty} (b_n^2 + c_n^2) \rightarrow \pi$, и γ приближается к линейному инкременту γ_L (2.21).

2.3 Самосогласованный профиль амплитуды дактированного сигнала передатчика

После определения инкремента вернемся к уравнению (1.12) для плотности энергии волны. Для стационарного сигнала, распространяющегося в дакте, уравнение (1.12) принимает вид:

$$\frac{1}{\sigma} \frac{d}{ds} (v_g \sigma U) = 2\gamma U. \quad (2.55)$$

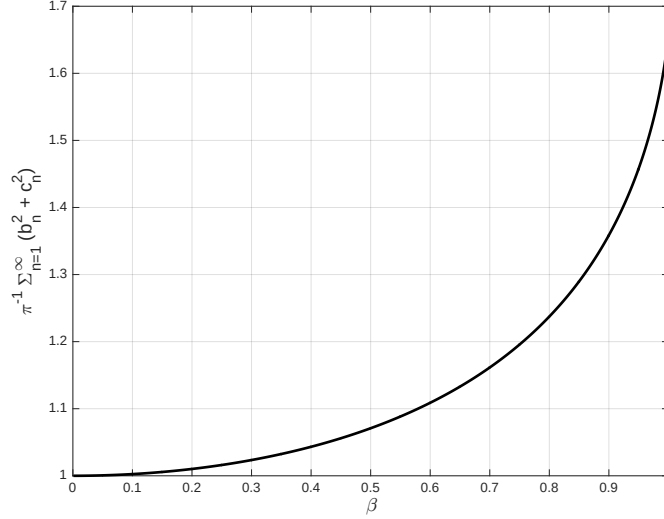


Рисунок 2.3 — Величина $\pi^{-1} \sum_{n=1}^{\infty} (b_n^2 + c_n^2)$ как функция β в случае сильной неоднородности $|\beta| < 1$.

Здесь v_g — продольная компонента групповой скорости, определяемая для дактированной свистовой волны выражением

$$v_g = 2c \frac{\omega^{1/2}(\omega_c - \omega)^{3/2}}{\omega_p \omega_c}, \quad (2.56)$$

а σ — величина, пропорциональная площади поперечного сечения лучевой трубки. В случае дактированного распространения $\sigma \propto 1/B_0(s) \propto 1/\omega_c(s)$, где B_0 — величина геомагнитного поля вдоль силовой линии, по которой центрирован канал. Верхним индексом « i » обозначаются величины в точке выхода сигнала в верхнюю ионосферу, начиная с которой уравнение (2.55) становится применимым. Вводится также безразмерная величина A согласно соотношению

$$A = \left(\frac{\omega_c - \omega}{\omega_c^i - \omega} \right)^{1/4} \left(\frac{\omega_p^i \omega_c^i}{\omega_p \omega_c} \right)^{1/2} \frac{|B|}{|B^i|}. \quad (2.57)$$

Используя (2.44), (2.56), (2.57) и (2.55), несложно проверить, что пространственная эволюция A подчиняется уравнению:

$$\frac{dA}{ds} = \kappa A, \quad \kappa = \gamma/v_g, \quad (2.58)$$

с граничным условием: $A(s^i) = 1$. Далее будем считать, что точка выхода волны в верхнюю ионосферу соответствует высоте 1000 км. После решения уравнения (2.58) для A амплитуда магнитного поля волны находится из (2.57). Следует подчеркнуть, что величина κ , как и инкремент γ , является нелинейной и нелокальной функцией амплитуды волны. Поэтому величина $|B^i|$, то

есть амплитуда магнитного поля сигнала в точке выхода в верхнюю ионосферу, оказывается ключевым параметром задачи, определяющим профиль амплитуды волны. Хотя существуют экспериментальные оценки амплитуды сигнала Новосибирского ОНЧ передатчика в экваториальной области по данным спутников Van Allen Probes (например, в работе [86] используют значение 12 пТл для магнитного поля волны), величину $|B^i|$, необходимую нам, из этих оценок получить нельзя. По сути, для этого требовалось бы решить обратную задачу относительно рассматриваемой нами. Усредненная грубая оценка волнового магнитного поля на высоте 660 км может быть сделана с использованием карт, подобных приведенным на верхней панели рис. 4 из работы [87], где показана полученная по данным DEMETER спектральная плотность ночного электрического поля в диапазоне 11880–11910 Гц, усредненная по длительным периодам времени. Спектральная плотность электрического поля в полосе 30 Гц составляет $\sim 178 \text{ (мкВ)}^2/\text{м}^2\text{Гц}$, что дает оценку амплитуды электрического поля $|E^i| \sim 73 \text{ мкВ/м}$. Предполагая дипольность геомагнитного поля и используя модель плотности холодной плазмы (см. ниже), получаем из (2.2) оценку $N \sim 30$ для показателя преломления волны на высоте 660 км, что соответствует высоте пролета спутника DEMETER. Это дает оценку $|B^i| \sim N|E^i|$ (в СГС) или $|B^i| \sim 7.3 \text{ пТл}$. Как отмечалось выше, эта оценка зависит от модели плотности холодной плазмы, которая также существенно влияет на дальнейшее рассмотрение. В наших расчетах используется следующая модель для плазменной частоты:

$$\omega_p^2 = \text{const} \cdot \omega_c^{3/2},$$

где константа выбирается так, чтобы отношение ω_p/ω_c на $L = 2.5$ на экваторе было равно 6.4.

При отсутствии взаимодействия волна-частица изменение амплитуды волны при ее распространении от передатчика к экватору определяется конкуренцией между увеличением площади поперечного сечения лучевой трубки σ и уменьшением групповой скорости v_g . В результате амплитуда определяется из уравнения $A = 1$, где A определено в (2.57). В рамках принятых моделей циклотронной частоты ω_c (дипольное поле) и плазменной частоты ω_p амплитуда магнитного поля волны уменьшается примерно в 5.4 раза за счет геометрических факторов при распространении сигнала от высоты 1000 км до экватора вдоль силовой линии $L = 2.5$. Таким образом, если принять для $|B^i|$

на высоте 1000 км значение ~ 7.3 пТл, оцененное по данным DEMETER для магнитного поля волны на 660 км, то амплитуда на экваторе без учета усиления составит около 1.35 пТл, что, по-видимому, слишком мало по сравнению с измеренными на экваторе значениями. Поэтому предполагается, что использование усредненных карт DEMETER приводит к занижению амплитуды волны. В численных расчетах было использовано значение $|B^i| = 38.7$ пТл, что соответствует $|B_{eq}| \sim 7.2$ пТл на экваторе без учета усиления и $|B_{eq}| \sim 16.7$ пТл с учетом усиления (см. рис. (2.7)).

Другие величины, от которых существенно зависят результаты, – параметры модельной функции распределения (2.20): n_{eq} , v_T (или T), и ν . Для их выбора использовались данные спутника Van Allen Probe A по дифференциальным потокам энергичных электронов, полученные прибором MagEIS 17 марта 2019 года в 10:09:07 [88]. В этот момент спутник находился на L -оболочке 2.5, широта $\lambda = 8.2^\circ$. Функция распределения f_0 в СГС связана с дифференциальным потоком J соотношением [89]:

$$f_0(w, \alpha) \simeq 1.62 \times 10^{-37} \frac{J}{W}, \quad (2.59)$$

где α – угол между скоростью частицы и магнитным полем, также называемый питч-углом, $J(w, \alpha)$ – дифференциальный поток в практических единицах [$\text{см}^{-2} \text{ с}^{-1} \text{ ср}^{-1} \text{ кэВ}^{-1}$], W – энергия в кэВ. Обратим внимание, что в данной работе символ α используется для обозначения двух различных величин: параметра неоднородности и питч-угла частиц. Обе величины применяются в своих контекстах, поэтому использование одного символа не должно привести к недопониманию. Зная функцию распределения в переменных (w, α) , ее можно выразить в любых однозначных переменных. Хорошее согласие измеренной функции с модельной (2.20) достигается при следующих параметрах:

$$v_T = 1.5 \times 10^{10} \text{ см/с}; \quad \nu = 0.7; \quad n_{eq} = 0.041 \text{ см}^{-3},$$

(см. рис. 2.4). Плотность холодной плазмы, измеренная спутником в этот момент, составляла $N_c = 1783 \text{ см}^{-3}$. Следует подчеркнуть, что параметр n_{eq} модельной функции не может быть определен из измерений, так как последние охватывают лишь ограниченный энергетический диапазон, не включающий низкие энергии, которые, вероятно, вносят основной вклад в плотность энергичных частиц. Поэтому величину n_{eq} следует рассматривать как параметр подгонки, обеспечивающий наилучшее соответствие модельной функции с измеренной в

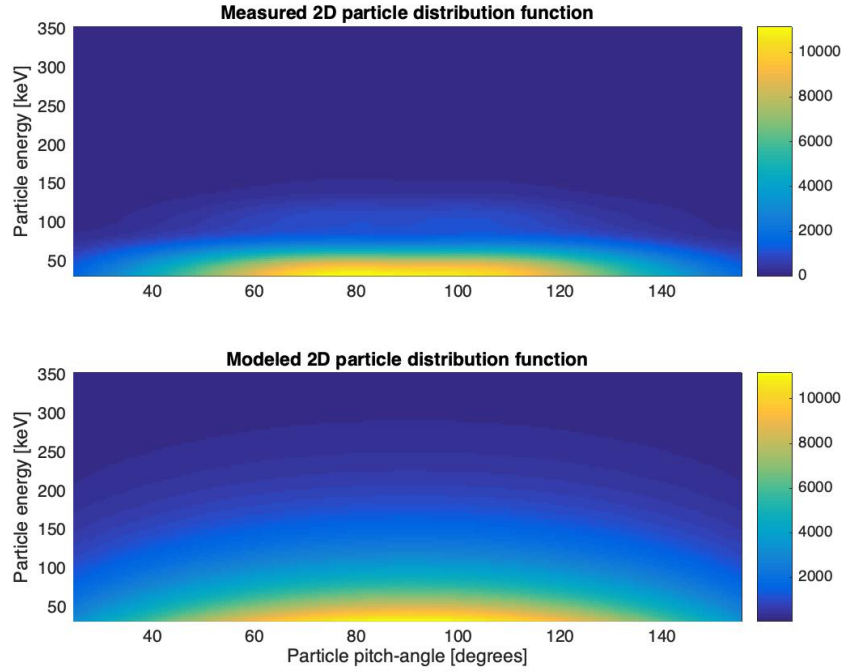


Рисунок 2.4 — Нормированная измеренная (верхняя панель) и модельная (нижняя панель) функция распределения. Функция распределения в единицах СГС отличается от представленной на рисунке на множитель 1.62×10^{-37} .

диапазоне резонансных энергий, определяющих инкремент. Как следствие, n_{eq} оказывается плохо определенным и допускает некоторую свободу выбора. Плотность энергичных электронов, полученная из подгонки, более чем на четыре порядка меньше плотности холодной плазмы. Как показывают расчеты, при такой малой плотности энергичных электронов нелинейные эффекты во взаимодействии сигнала передатчика с энергичными электронами не проявляются. Поэтому расчеты выполнены с параметрами функции распределения v_T и $\mathbf{v}$, приведенными выше, но с n_{eq} , увеличенным в 2.5 раза, то есть $n_{eq} = 0.1 \text{ см}^{-3}$.

Как показано выше, задача нахождения самосогласованного профиля амплитуды сигнала ОНЧ передатчика требует решения нелинейного интегро-дифференциального уравнения. Оно решается методом последовательных приближений. В нулевом приближении используется профиль, определяемый только геометрическими факторами – изменением в пространстве групповой скорости волны и площади поперечного сечения лучевой трубки, при этом $\mathbf{k} = 0$ в (2.58). Используя данный профиль амплитуды, рассчитывается нелинейный инкремент, после чего определяется уточненный профиль амплитуды в первом приближении и так далее. Итерации продолжаются до тех пор, пока получаемый профиль амплитуды не совпадает с предыдущим с такой точностью, что

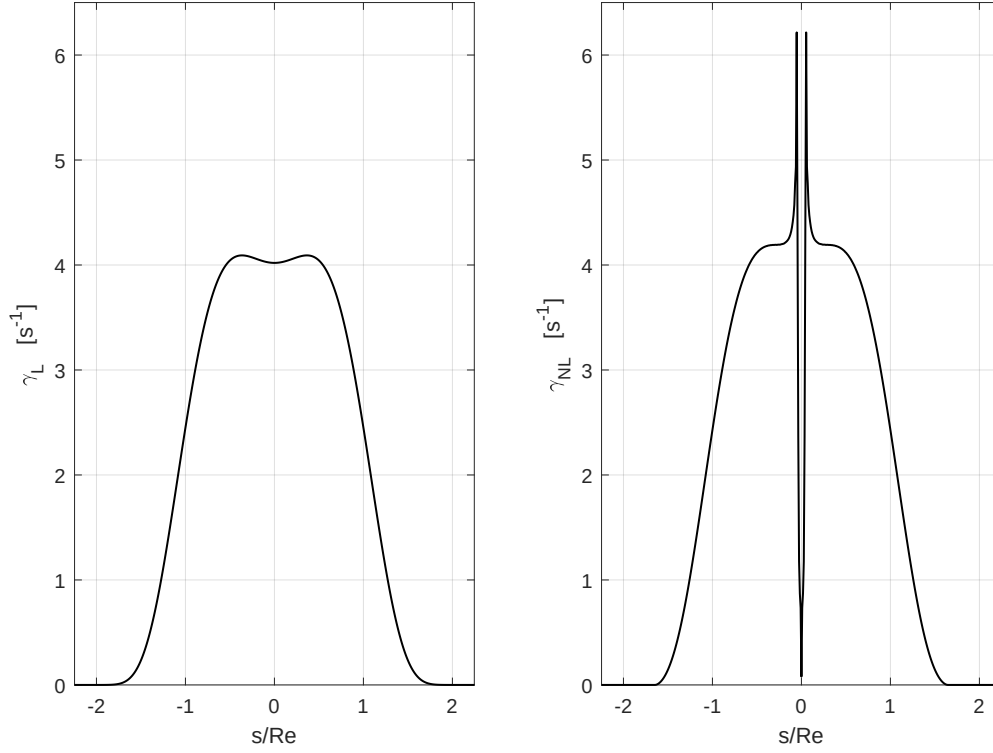


Рисунок 2.5 — Линейный (левая панель) и нелинейный (правая панель) инкремент в зависимости от координаты s вдоль силовой линии.

различия не видны на графике. Количественных критериев сходимости итерационного процесса не вводится.

Результаты численных расчетов приведены для указанных выше параметров задачи: дактированное распространение сигнала 11.9 кГц вдоль L -оболочки 2.5; амплитуда магнитного поля волны на высоте 1000 км – 38.7 пТл; параметры модельной функции распределения (2.20): $v_T = 1.5 \times 10^{10}$ см/с, $\nu = 0.7$, $n_{eq} = 0.1$ см $^{-3}$.

На рис. (2.5) показан инкремент γ как функция координаты s вдоль силовой линии. Левая панель – линейное значение γ_L , правая – нелинейное значение γ в первом приближении, рассчитанное по профилю амплитуды, полученному при $\gamma = 0$. Линейное значение γ_L в расчетах амплитуды волны не используется; оно приведено для демонстрации заметной разницы между линейным и нелинейным инкрементом в рассматриваемом случае, особенно в экваториальной области.

На рис. 2.6 показан коэффициент усиления, то есть $\int_{s_i}^s \kappa(s') ds'$ ($\kappa = \gamma/v_g$) на каждом шаге итерации. Коэффициент усиления, соответствующий нелиней-

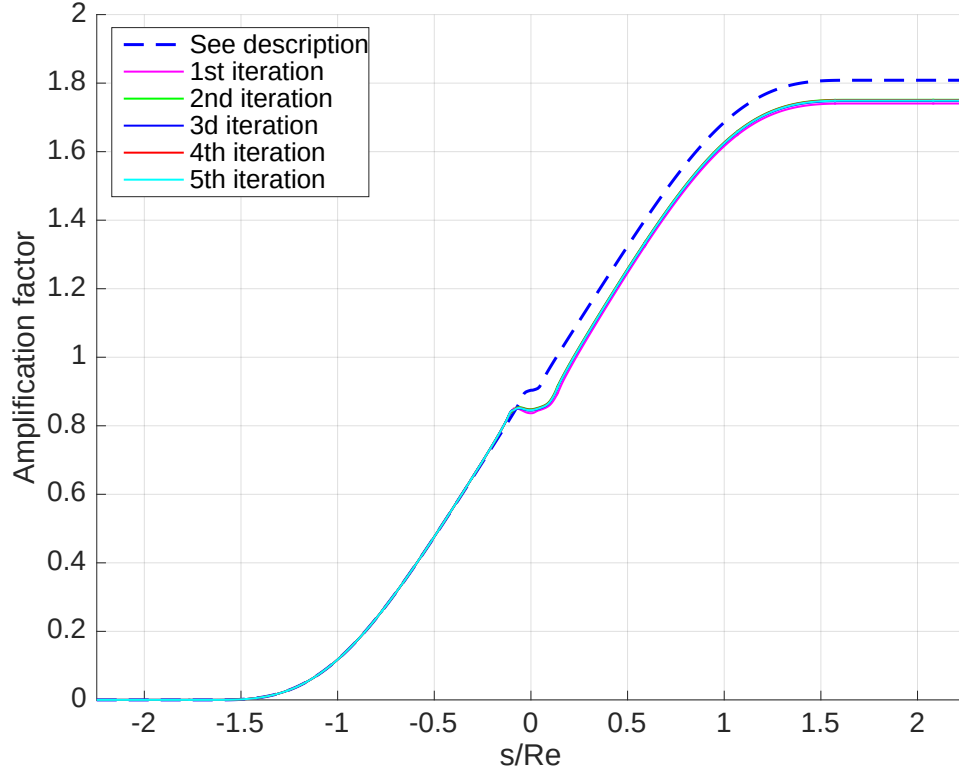


Рисунок 2.6 — Коэффициент усиления $\int_{s_i}^s \kappa(s') ds'$, определяющий величину A (2.57) согласно соотношению: $A = A^i \exp(\int_{s_i}^s \kappa(s') ds')$.

ному инкременту, рассчитанному по профилю поля, полученному при $\kappa = \gamma = 0$, показан синей пунктирной линией.

Согласно определению (2.12), эффективная амплитуда резонансного взаимодействия волна-частица $1/\tau^2$ пропорциональна амплитуде электрического поля волны $|E|$, которая, в свою очередь, связана с $|B|$ соотношением $|E| = |B|\omega/kc$ (в СГС). Амплитуда $|B|$ (в пТл) магнитного поля ОНЧ сигнала на каждом шаге итераций показана на рис. (2.7). В полушарии, противоположном расположению ОНЧ передатчика, как коэффициент усиления, так и геометрические факторы приводят к росту волны, и ее амплитуда существенно увеличивается, достигая сотен пТл. Стоит напомнить, что в численных расчетах использовано значение $|B^i| = 38.7$ пТл. Видно, что с учетом нелинейного резонансного взаимодействия волна-частица профиль амплитуды волны становится сильно асимметричным относительно экватора. Поэтому можно ожидать, что динамика высокоэнергичных субрелятивистских электронов в самосогласованном поле ОНЧ передатчика, определяемом нелинейным взаимодействием с низкоэнергичными резонансными частицами, будет существенно отличаться от таковой в априорно заданном волновом поле.

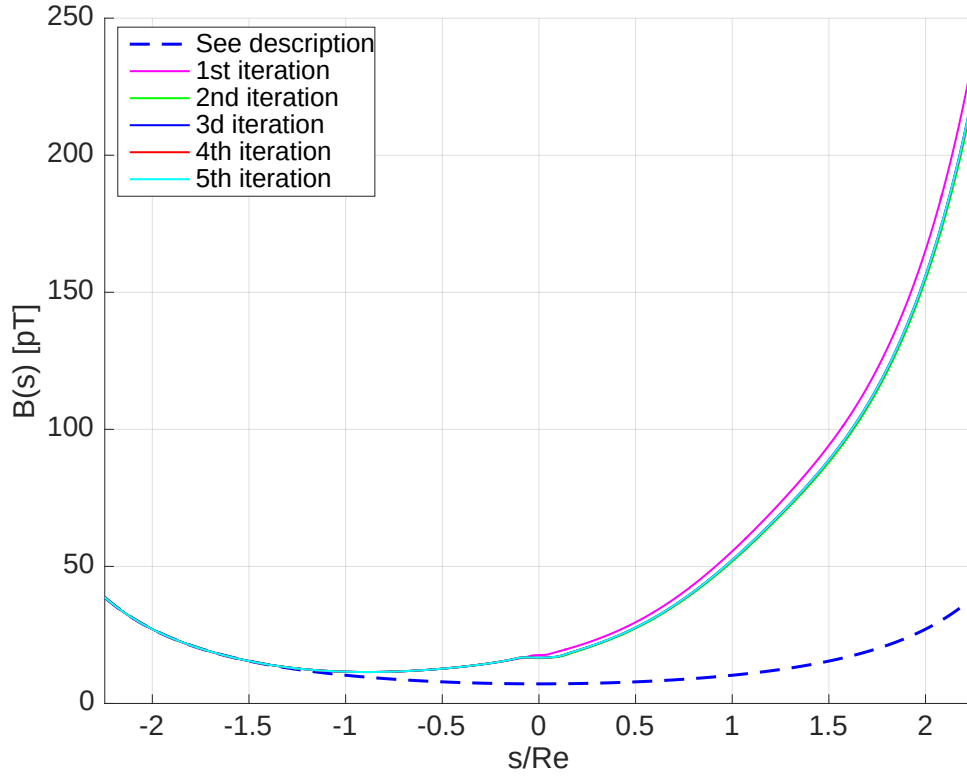


Рисунок 2.7 — Профиль амплитуды магнитного поля волны в зависимости от нормированной координаты вдоль силовой линии внешнего геомагнитного поля на каждом шаге итераций. Синяя пунктирная линия показывает профиль без учета усиления.

2.4 Выводы

Анализ распределения электронов в радиационных поясах Земли показывает, что с точки зрения взаимодействия волн и частиц это распределение условно делится на три группы: низкоэнергичная («холодная») компонента с высокой плотностью, определяющая дисперсионные свойства волны, но не влияющая на эволюцию ее амплитуды; энергичная компонента, участвующая в резонансном взаимодействии с волной и определяющая эволюцию ее амплитуды, но не влияющая на дисперсию волны из-за низкой плотности; и еще менее плотная высокоэнергичная компонента, практически не влияющая ни на дисперсию, ни на амплитуду волны. При анализе динамики высокоэнергичных субрелятивистских электронов в поле сигнала передатчика можно использовать

приближение заданного поля. Эта динамика в настоящей диссертационной работе не рассматривается.

Основные результаты данной главы – вычисление нелинейного инкремента квазимонохроматической волны свистовой моды в неоднородной плазме при произвольном профиле амплитуды волны и определение самосогласованного профиля амплитуды методом последовательных приближений. Полученный профиль амплитуды может служить основой для изучения динамики субрелятивистских электронов в поле сигнала передатчика и оценки роли наземных ОНЧ передатчиков в ускорении и высыпании субрелятивистских электронов радиационных поясов Земли.

Изложенные во второй главе результаты опубликованы в [90].

Глава 3. Передача энергии между различными популяциями электронов посредством резонансного взаимодействия с волной свистовой моды

В данной главе исследуется механизм резонансного циклотронного взаимодействия между квазимонохроматической волной и электронами радиационных поясов Земли, а также его роль в ускорении электронов. Основное внимание уделяется процессам передачи энергии между различными популяциями электронов в ходе возбуждения и распространения свистовой волны в неустойчивой магнитоактивной плазме.

Предлагаемый подход учитывает вклад нелинейных эффектов в инкремент свистовой волны в условиях сильно неоднородной плазмы. При этом в модели не рассматривается область слабой неоднородности, где возможен фазовый захват частиц волной. Как показано в Главе 2, с учетом захваченных частиц инкремент волны представляет собой нелинейный нелокальный функционал координаты и амплитуды поля, поскольку, в соответствии с теоремой Лиувилля, он определяется не только локальными параметрами, но и координатой захвата частиц, что значительно усложняет анализ. Однако при возбуждении волны из теплового шума, как показали численные оценки, область слабой неоднородности оказывается незначительной и составляет лишь малую часть траектории свистовой волны. Поэтому в рамках настоящей главы взаимодействие в этой узкой приэкваториальной области не рассматривается. В условиях сильной неоднородности плазмы, преобладающей вдоль траектории свистовой волны, нелинейный инкремент определяется только локальными параметрами, что существенно упрощает его расчет.

В предлагаемой модели волна возбуждается на экваторе неустойчивым распределением энергичных электронов с анизотропией температуры и конусом потерь. Изначально волновой вектор направлен вдоль магнитного поля Земли, однако по мере распространения волны к более высоким широтам, согласно уравнениям геометрической оптики, его направление становится все более наклонным. Вдоль траектории волна взаимодействует с электронами на различных L -оболочках и на разных циклотронных резонансах. Анализ основан на законе сохранения энергии (1.12) и аналитическом выражении для нели-

нейного инкремента. Это позволяет изучить динамику обмена энергией между волной и частицами вдоль рассчитанной траектории волнового пакета.

3.1 Функция распределения резонансных частиц и линейный инкремент

Как было показано в [79] для продольно распространяющейся волны свистовой моды, а затем в обзоре [50] для наклонного распространения, в случае сильной неоднородности, то есть при отсутствии частиц, захваченных по фазе, инкремент γ_L в линейном приближении довольно близок к значению нелинейного инкремента. Благодаря тому, что линейный инкремент γ_L можно рассматривать как хорошее приближение нелинейного инкремента, в этом разделе основное внимание уделяется именно линейному инкременту, хотя в расчетах применяется нелинейное значение.

Линейный инкремент γ_L для наклонной волны свистовой моды был получен, например, в работе [50]. Авторы рассматривали невозмущенную функцию распределения резонансных электронов f_0 как функцию кинетической энергии $w = mv^2/2$ и первого адиабатического инварианта, также называемого магнитным моментом $\mu = mv_\perp^2/2\omega_c$. При этом инкремент волны определялся через интегрирование по магнитному моменту μ . Как правило, экспериментальные данные по дифференциальным потокам электронов J , получаемые в спутниковых миссиях, таких как Van Allen Probes [88; 91], выражаются как функции кинетической энергии частицы w и локального питч-угла α . Эти измеренные данные также позволяют получить локальную функцию распределения электронов согласно приведенному ранее соотношению (2.59).

Хотя в данной главе не используются реальные спутниковые данные, невозмущенная функция распределения выражается через кинетическую энергию частицы и экваториальный питч-угол α_{eq} , который, подобно магнитному моменту μ , является интегралом движения частиц при отсутствии волнового поля и равен

$$\sin^2 \alpha_{eq} = \frac{\mu \omega_{ceq}}{w} ,$$

где экваториальная циклотронная частота ω_{ceq} является функцией L -оболочки. Заметим, что экваториальный питч-угол α_{eq} связан с локальным соотношением $\sin^2 \alpha_{eq} = (\omega_{ceq}/\omega_c) \sin^2 \alpha$.

В переменных (w, α_{eq}) линейный инкремент волны свистовой моды, распространяющейся под углом к внешнему магнитному полю, имеет вид

$$\gamma_L = \sum_{n=-\infty}^{\infty} \gamma_{Ln} = \frac{(\pi e |E| c)^2}{2mk_{\parallel} U} \sum_{n=-\infty}^{\infty} \int_{w_{\parallel Rn}}^{\infty} dw f'_{0n}(w) V_n^2(w). \quad (3.1)$$

Здесь, как и прежде, $|E|$ – амплитуда x -компоненты электрического поля волны, U – плотность энергии свистовой волны (1.24), m и $-e$ – масса и заряд электрона, а c – скорость света. В случае наклонного распространения резонансное взаимодействие происходит на нескольких циклотронных резонансах, то есть когда выполняется условие $v_{\parallel} = v_{Rn}$, где

$$v_{Rn} = \frac{\omega - n\omega_c}{k_{\parallel}},$$

$k_{\parallel} = k \cos \theta$ – продольная компонента волнового вектора, а $n = 0, \pm 1, \pm 2, \dots$ – номер циклотронного резонанса. Продольная энергия резонансных частиц определяется соотношением $w_{\parallel Rn} = mv_{Rn}^2/2$. Выражение для линейного инкремента (3.1) содержит сумму по всем циклотронным резонансам n . В нашем рассмотрении будут учитываться три наиболее эффективных из них, а именно резонансы с номерами $n = -1$, $n = 0$, так же называемый резонансом Ландау или Черенковским резонансом, и первый циклотронный резонанс $n = 1$. Для частиц вблизи n -го циклотронного резонанса смешанная производная невозмущенной функции распределения f'_{0n} как функция w записывается:

$$f'_{0n}(w) = \left[\frac{\partial f_0}{\partial w} + \frac{1}{w \sin(2\alpha_{eq})} \frac{\partial f_0}{\partial \alpha_{eq}} \left(-\sin^2 \alpha_{eq} + n \frac{\omega_{ceq}}{\omega} \right) \right]_{\sin^2 \alpha_{eq} = (1 - \frac{w_{\parallel Rn}}{w}) \frac{\omega_{ceq}}{\omega_c}}. \quad (3.2)$$

Функция $V_n(w)$, которую можно назвать «матричным элементом» и которая характеризует величину взаимодействия между волной и частицами на n -м циклотронном резонансе, определяется выражением

$$V_n(w) = \left(\frac{n\omega_c}{k_{\perp} c} a_x + \frac{v_{Rn}}{c} a_z \right) J_n(\rho) - \frac{i\rho\omega_c}{k_{\perp} c} a_y J'_n(\rho), \quad (3.3)$$

где коэффициенты поляризации a_i задаются соотношениями (1.17), а $J_n(\rho)$ – функция Бесселя первого рода n -го порядка, аргумент которой ρ – безразмерный ларморовский радиус:

$$\rho = \frac{k_{\perp}}{\omega_c} \sqrt{\frac{2(w - w_{\parallel \text{Rn}})}{m}}. \quad (3.4)$$

В исследовании рассматривается невозмущенная функция распределения резонансных электронов f_0 с конусом потерь и анизотропией температуры. Она определяется через интегралы движения частицы в отсутствие волнового поля, а именно, через экваториальный питч-угол α_{eq} , кинетическую энергию w и L -оболочку.

$$f_0 = C(L) (\sin^2 \alpha_{eq})^{\nu} \exp \left(-\frac{w \cos^2 \alpha_{eq}}{T_{\parallel}} - \frac{w \sin^2 \alpha_{eq}}{T_{\perp}} \right). \quad (3.5)$$

Нормировочная константа $C(L)$ определяется из нормировки (1.11) для резонансной функции распределения и равна

$$C(L) = n_h \left(\frac{m}{2\pi} \right)^{3/2} \left(\frac{\omega_c}{\omega_{ceq}} \right)^{\nu} \frac{1}{T_{\perp} T_{\parallel}^{1/2} G(\nu, \eta; \omega_c)}, \quad (3.6)$$

где n_h – плотность энергичных электронов, а

$$G(\nu, \eta; \omega_c) = \frac{\eta}{2} \mathcal{B}(1/2, \nu + 1) \mathcal{F} \left(\nu + 1, 3/2; \nu + 3/2; (1 - \eta) \frac{\omega_{ceq}}{\omega_c} \right). \quad (3.7)$$

Здесь для удобства введен параметр $\eta = T_{\parallel}/T_{\perp} < 1$, а $\mathcal{B}(x, y)$ и $\mathcal{F}(x, y; z; t)$ – бета-функция и гипергеометрическая функция соответственно. Функция распределения (3.5) зависит от четырех параметров: поперечной температуры энергичных электронов $T_{\perp}$, продольной температуры энергичных электронов $T_{\parallel} < T_{\perp}$, параметра конуса потерь $\nu > 0$ и плотности энергичных электронов n_h , которая изменяется вдоль силовой линии внешнего магнитного поля и связана с экваториальным значением n_{heq} следующим образом:

$$n_h = n_{heq} \left(\frac{\omega_{ceq}}{\omega_c} \right)^{\nu} \frac{\mathcal{F} \left(\nu + 1, 3/2; \nu + 3/2; (1 - \eta) \frac{\omega_{ceq}}{\omega_c} \right)}{\mathcal{F}(\nu + 1, 3/2; \nu + 3/2; (1 - \eta))}. \quad (3.8)$$

Нормировочная константа $C(L)$ может быть выражена через n_{heq} следующим образом:

$$C(L) = n_{heq} \left(\frac{m}{2\pi} \right)^{3/2} \frac{1}{T_{\perp} T_{\parallel}^{1/2} G(\nu, \eta; \omega_{ceq})} \equiv \frac{n_{heq}}{v_T^3}. \quad (3.9)$$

Отметим, что определение величины v_T в данной главе (см. последнее равенство в (3.9)) отличается от используемого в предыдущей. Для выбранной невозмущенной функции распределения величина $f'_{0n}(w)$ имеет вид:

$$f'_{0n}(w) = C(L) \left(\frac{\omega_{ceq}(w - w_{\parallel Rn})}{\omega_c w} \right)^{\nu} \exp \left[- \frac{w - (w - w_{\parallel Rn}) \frac{\omega_{ceq}}{\omega_c}}{T_{\parallel}} - \frac{\omega_{ceq} w - w_{\parallel Rn}}{\omega_c T_{\perp}} \right] \times \\ \times \left[-\frac{1}{T_{\parallel}} - \frac{\nu}{w} + n \frac{\omega_{ceq}}{\omega} \left(\frac{\nu \omega_c}{\omega_{ceq}(w - w_{\parallel Rn})} + \frac{T_{\perp} - T_{\parallel}}{T_{\perp} T_{\parallel}} \right) \right]. \quad (3.10)$$

Подставляя (3.10) в (3.1), получаем вклад от n -го циклотронного резонанса в нормированный линейный инкремент:

$$\frac{\gamma_{Ln}}{\omega_c} = \frac{\pi \omega_{pheq}^2 c^3}{8 \omega \omega_c v_T^3} \left(\frac{\omega_{ceq}}{\omega_c} \right)^{\nu} \frac{|E|^2}{N |\cos \theta| U} R_n, \quad (3.11)$$

где

$$R_n = \int_{w_{\parallel Rn}}^{w_{\max}} \left(\frac{w - w_{\parallel Rn}}{w} \right)^{\nu} \exp \left[- \frac{w - (w - w_{\parallel Rn}) \frac{\omega_{ceq}}{\omega_c}}{T_{\parallel}} - \frac{\omega_{ceq} w - w_{\parallel Rn}}{\omega_c T_{\perp}} \right] \times \\ \times \left[-\frac{1}{T_{\parallel}} - \frac{\nu}{w} + n \frac{\omega_{ceq}}{\omega} \left(\frac{\nu \omega_c}{\omega_{ceq}(w - w_{\parallel Rn})} + \frac{T_{\perp} - T_{\parallel}}{T_{\perp} T_{\parallel}} \right) \right] V_n^2 dw \quad (3.12)$$

Здесь $\omega_{pheq}^2 = 4\pi n_{heq} e^2 / m$. Интегрирование в (3.12) проводится по энергии w . Однако, если ввести разность $w - w_{\parallel Rn}$ между энергией и резонансной энергией как новую переменную интегрирования, тогда интегрирование будет производиться от нуля до бесконечности, а множитель $\exp(-w_{\parallel Rn}/T_{\parallel})$ вынесется за знак интеграла. Этот множитель даст основную (экспоненциальную) зависимость интеграла от $w_{\parallel Rn}$. Поскольку минимальные значения $w_{\parallel Rn}$ соответствуют циклотронным резонансам $n = 1, 0, -1$, они вносят основной вклад в инкремент и рассматриваются далее.

Ограничиваясь нерелятивистской теорией, верхний предел $w_{\max}$ в интеграле (3.12) выбирается как конечное значение, соответствующее энергии $W_{\max} = mc^2/2 \simeq 256$ кэВ. Локальный инкремент волны на n -м резонансе считается равным нулю, $\gamma_{Ln} = 0$, если локальная резонансная энергия $w_{\parallel Rn}$ превышает указанный предел.

Простой анализ линейного инкремента (3.11)-(3.12) на каждом циклотронном резонансе показывает, что в случае устойчивой плазмы ($\mathbf{v} = 0$, $T_{\perp} = T_{\parallel}$) линейный инкремент γ_{Ln} всегда отрицателен, что означает затухание волны и нагрев электронов. Следует отметить, что в выражении для линейного инкремента на n -м резонансе только величина в квадратных скобках в уравнении (3.12) не определена по знаку в случае неустойчивой плазмы. Для $n \leq 0$ интеграл R_n всегда отрицателен при $T_{\perp} > T_{\parallel}$, тогда как для $n = 1$ знак R_n зависит от параметров функции распределения, а также от локальных параметров волны и плазмы.

3.2 Магнитосферная траектория свистовой волны

Свистовые волны генерируются посредством резонансного циклотронного взаимодействия неустойчивого распределения электронов с типичными энергиями в несколько десятков кэВ. Согласно экспериментальным данным [92–94], область генерации этих волн в основном ограничена экватором, где неоднородность магнитного поля Земли и энергия резонансных электронов минимальны вдоль силовой линии геомагнитного поля.

Для нахождения траектории волнового пакета свистовой моды в магнитосфере Земли была рассчитана система уравнений геометрической оптики (1.19). Учитывалась электрон-протонная холодная плазма, дипольная модель фонового магнитного поля $\mathbf{B}_0$, и гиротропная модель для плазменной частоты электронов: $\omega_p^2 \propto \omega_c$ ($\omega_p/\omega_c = 6$ на $L = 3$ на экваторе). Подробное описание программы трассировки лучей, используемой в исследовании, можно найти в [56]. Для запуска программы трассировки лучей необходимо определить начальную точку в меридиональной плоскости и две (предполагается, что вектор $\mathbf{k}$ лежит в плоскости (x, z)) компоненты начального волнового вектора $\mathbf{k}$. В качестве точки генерации волны во внутренней магнитосфере выбирается L -оболочка, равная 3.5, и геомагнитная широта $\lambda = 0^\circ$. Значения частоты волны ω и начального угла волновой нормали θ полностью определяют компоненты начального волнового вектора $\mathbf{k}$ через дисперсионное соотношение. Пакет волн, соответствующий максимальному инкременту, обладает экспоненциально большей амплитудой (см. (1.12), (1.13) и (1.14)). Поэтому нахождение

лучевой траектории проводится для пакета волн с частотой и начальным углом волновой нормали, соответствующими абсолютному максимуму линейного инкремента в начальной точке.

Линейный инкремент γ_L определяется различными факторами, описанными в (3.11) и (3.12), включая угловую частоту волны $\omega = 2\pi f$, угол волновой нормали θ , параметры невозмущенной функции распределения и локальные параметры плазмы. Для вычисления линейного инкремента параметры модельной невозмущенной функции распределения f_0 энергичных электронов задаются следующим образом: $T_\perp = 12$ кэВ, $T_\parallel = 8$ кэВ, $v = 0.7$, $n_{heq}(L) = 4.5 \times 10^{-4} n_{ceq}(L)$. Здесь n_{ceq} – плотность холодной плазмы на экваторе со значением 292 см^{-3} на $L = 3.5$. Результаты расчета линейного инкремента для указанных значений представлены на плоскости $(\theta - f)$ (см. рисунок 3.1, левая панель) в виде цветового кода, отображающего полный нормированный линейный инкремент γ_L/ω_c . Проведенный численный расчет подтверждает хорошо известный факт [95], что линейный инкремент свистовой волны достигает максимума при нулевом угле волновой нормали. Частота волны, соответствующая максимальному инкременту при выбранных параметрах, составляет $f_{\max} \simeq 5.2$ кГц (см. рисунок 3.1, правая панель).

Результаты численного моделирования уравнений геометрической оптики представлены на рисунке 3.2, где, помимо траектории волнового пакета в магнитосфере Земли, показаны параметры волны вдоль траектории: L -оболочка, показатель преломления N , угол волновой нормали θ , нормированная частота волны ω/ω_c и безразмерная групповая скорость v_g/c . Уравнения рассчитываются до точки отражения на нижнем гибридном резонансе [96], поэтому на данной траектории геомагнитная широта λ является однозначной функцией времени, и параметры волны отображаются на графиках как функции λ . Начиная с экватора на L -оболочке, равной 3.5, волна распространяется к Земле, при этом L -оболочка волнового пакета медленно изменяется в диапазоне от 3.5 до чуть больше 3.8. Несмотря на очень сильное увеличение показателя преломления N , резонансная энергия, соответствующая резонансу Ландау $w_{\parallel R0} = m\omega^2/(2k_\parallel^2) = mc^2/(2N^2 \cos^2 \theta)$, также увеличивается (см. рисунок 3.3) из-за изменения угла волновой нормали θ , который увеличивается вплоть до $\sim 90^\circ$. По мере увеличения циклотронной частоты ω_c вдоль траектории пакета, нормированное значение частоты волны ω/ω_c уменьшается примерно с 0.25 до почти 0.015. На рисунке 3.3 показаны значения резонансных энергий вдоль тра-

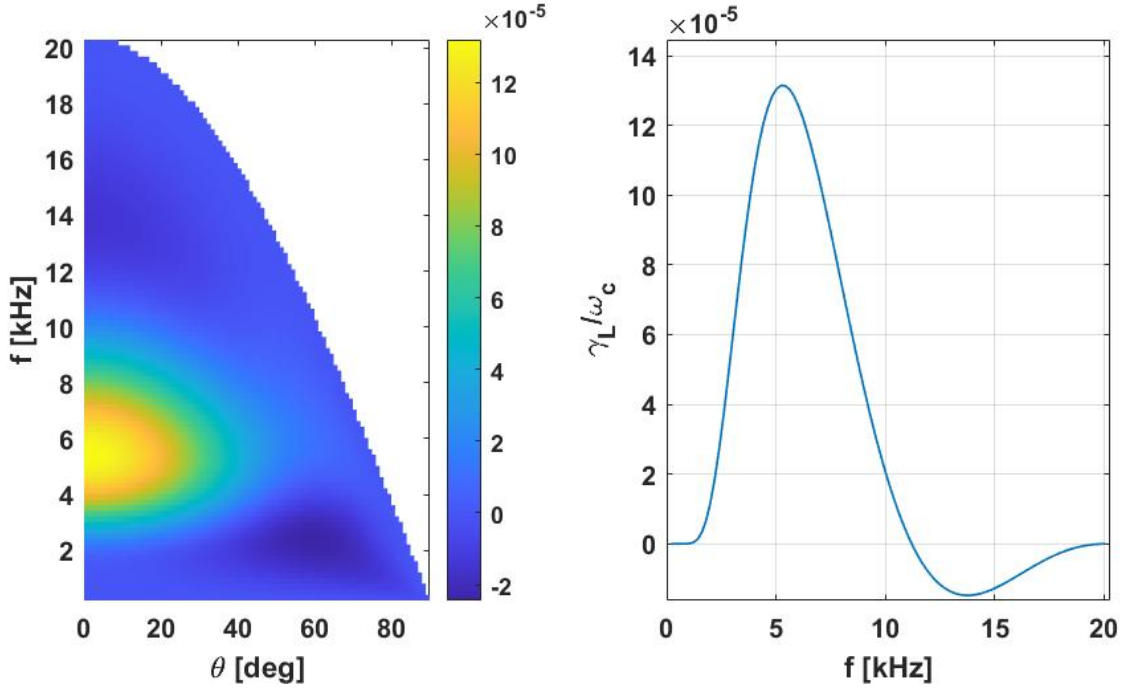


Рисунок 3.1 — (слева) Полный нормированный инкремент γ/ω_c волны на плоскости $(\theta - f)$. (справа) Полный нормированный инкремент в зависимости от частоты волны f при $\theta = 0^\circ$. Параметры среды были рассчитаны для $L = 3.5$ и геомагнитной широты $\lambda = 0^\circ$.

ектории луча для каждого резонанса как функции λ . Видно, что резонансная энергия на резонансе Ландау $w_{\parallel R0}$ достигает релятивистского предела 256 кэВ вблизи геомагнитной широты $\lambda \simeq 49^\circ$. В отличие от этого, для минус первого и первого циклотронных резонансов определяющим фактором изменения резонансной энергии является увеличение циклотронной частоты вдоль траектории распространения волнового пакета. Это приводит к тому, что релятивистский предел резонансной энергии для этих резонансов достигается значительно ближе к магнитному экватору – в области геомагнитных широт $\lambda \simeq 28 - 31^\circ$.

3.3 Применимость приближения заданного поля

Описанный в разделе 1.2 подход, основанный на приближении заданного поля, реализован в настоящем исследовании. Как уже отмечалось, общий вид условия применимости приближения заданного поля – $\gamma_{NL}\tau_{NL} \ll 1$, однако

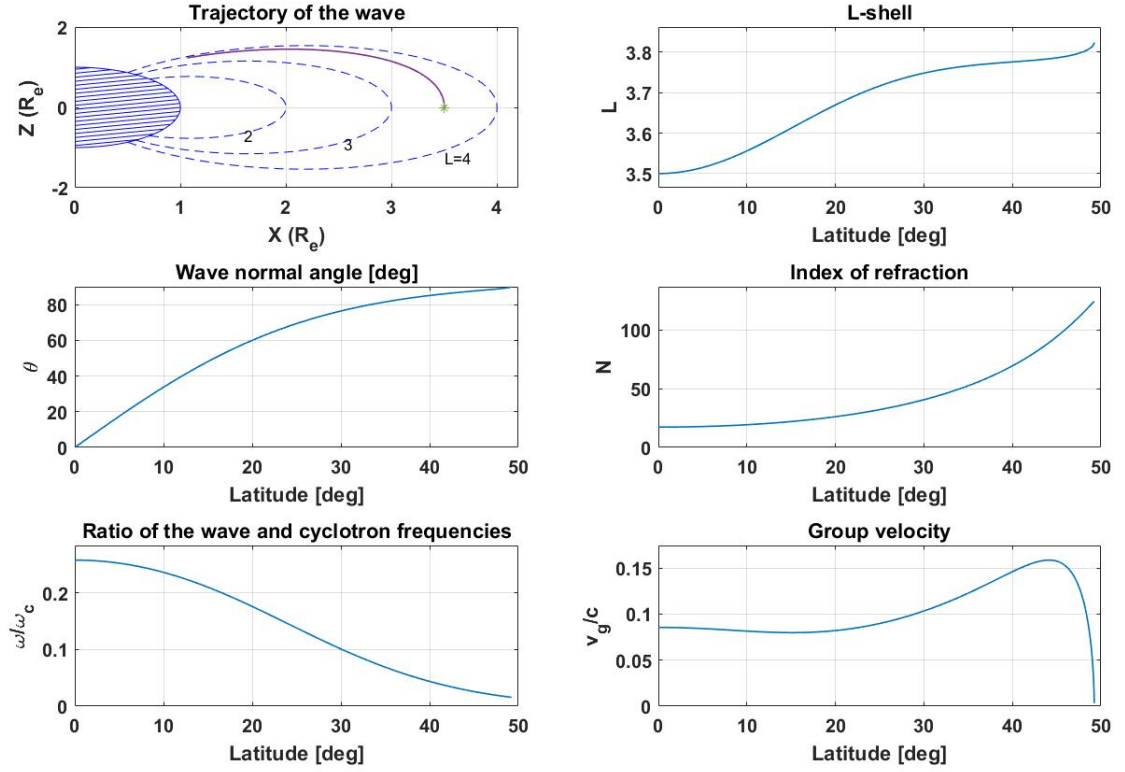


Рисунок 3.2 — Лучевая траектория волнового пакета в магнитосфере и параметры волны на траектории. (левая колонка, сверху вниз) Траектория луча в меридиональной плоскости, угол волновой нормали θ в зависимости от геомагнитной широты λ , нормированная частота волны ω/ω_c в зависимости от геомагнитной широты λ . (правая колонка, сверху вниз) L -оболочка, показатель преломления N , нормированная групповая скорость v_g/c на траектории луча в зависимости от геомагнитной широты λ .

конкретная форма этого условия зависит от рассматриваемой задачи. В случае неоднородной плазмы задача характеризуется двумя величинами.

Первая – это параметр неоднородности α_n :

$$\alpha_n = \frac{k_{\parallel}}{2} \left(\frac{v_{\perp}^2}{\omega_c} \frac{d\omega_c}{dl} + \frac{dv_{Rn}^2}{dl} \right). \quad (3.13)$$

В этом выражении l – длина вдоль силовой линии, отсчитанная от геомагнитного экватора. Вторая величина – τ_n , определяемая как

$$\frac{1}{\tau_n^2} = \frac{ek_{\parallel}^2 |E| c |V_n|}{m\omega}. \quad (3.14)$$

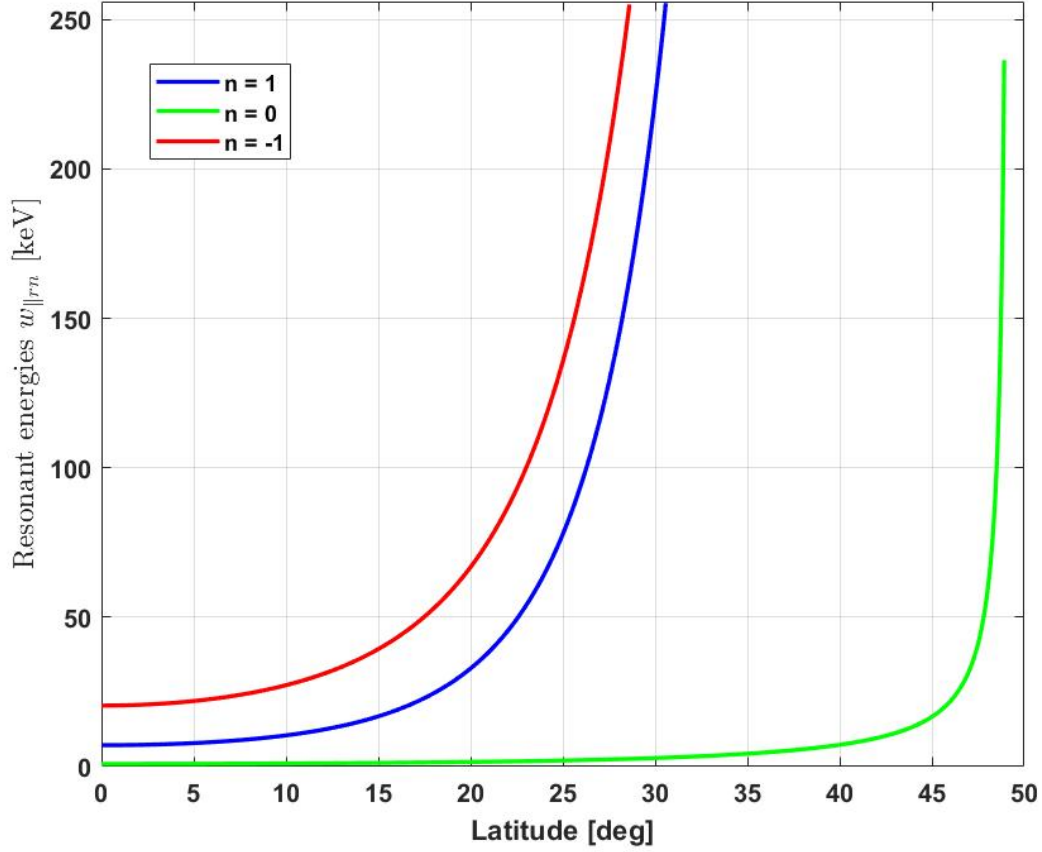


Рисунок 3.3 — Резонансные энергии на лучевой траектории, параметризованные по широте, для первого (синий), резонанса Ландау (зеленый) и минус первого (красный) резонансов.

Однако она не определяет нелинейное время в случае сильной неоднородности, когда

$$\beta_n = \frac{1}{|\alpha_n| \tau_n^2} < 1. \quad (3.15)$$

Безразмерная величина β_n (3.15) – основной параметр задачи, характеризующий конкуренцию между неоднородностью плазмы α_n и нелинейностью τ_n для n -го циклотронного резонанса. В случае $\beta_n > 1$, который реализуется вблизи магнитного экватора, нелинейность доминирует над неоднородностью плазмы, тогда как вне этой области реализуется случай сильной неоднородности.

Как впервые показали [79] для продольно распространяющихся волн свистовой моды в случае сильной неоднородности (3.15) нелинейное время задачи дается выражением

$$\tau_{NLn} = \frac{1}{\sqrt{|\alpha_n|}}, \quad (3.16)$$

а инкремент, хотя и является сложной нелинейной функцией параметра β_n , численно близок к линейному инкременту γ_{L_n} и отличается от него не более чем в 1.67 раза. Эти результаты были обобщены на наклонное распространение свистовых волн в обзоре [50]. Поскольку критерий $\gamma_{NL}\tau_{NL} \ll 1$ содержит строгий знак неравенства, γ_{NL} может быть заменен на $1.67\gamma_L$.

Помимо параметров волны и плазмы все введенные выше величины α_n , τ_n и β_n зависят от поперечной скорости частицы $v_\perp$. В последующих оценках $v_\perp$ принимается равной некоторому характерному значению, типичному для резонансных частиц.

Как уже упоминалось, случай сильной неоднородности (3.15) реализуется вне окрестности экватора, то есть для $l > l_1$, где l_1 определяется из условия

$$\beta_n \equiv \frac{1}{|\alpha_n|\tau_n^2} = \frac{ek_{eq}^2 v_\perp |E|}{m\omega |\alpha_n|} \sim 1. \quad (3.17)$$

Оценим значение l_1 . В рамках выбранной модели для плазменной частоты, $\omega_p^2 \propto \omega_c$, параметр неоднородности (3.13) α_n можно переписать в виде

$$\alpha_n = \frac{k_\parallel}{2\omega_c} \frac{d\omega_c}{dl} \left(v_\perp^2 + v_{Rn}^2 \frac{2n\omega_c^2 |\cos \theta| - \omega(n\omega_c + \omega)}{(n\omega_c - \omega)(\omega_c |\cos \theta| - \omega)} \right). \quad (3.18)$$

При этом он является линейной функцией от $d\omega_c/dl$.

Предполагается, что пакет волн возбуждается на экваторе из теплового шума, и амплитуда волнового поля довольно мала в начальной точке траектории. В Главе 2 было исследовано нелинейное резонансное взаимодействие дактированного сигнала ОНЧ передатчика с резонансными частицами. Проведенные расчеты показали малость области доминирования нелинейности, то есть области слабой неоднородности. Учитывая малую амплитуду волнового поля, можно ожидать доминирование нелинейности только очень близко к экватору. Вблизи экватора циклотронная частота может быть аппроксимирована квадратичным выражением по l :

$$\omega_c \simeq \omega_{ceq} \left(1 + \frac{9}{2} \left(\frac{l}{LR_E} \right)^2 \right), \quad (3.19)$$

где R_E – радиус Земли. Поскольку волновой пакет стартует с $\theta = 0^\circ$ и распространяется почти вдоль начальной L -оболочки, в последующих оценках предполагается, что траектория волны совпадает с геомагнитной силовой линией. Кроме того, в окрестности экватора действует только первый циклотронный

резонанс, поэтому параметры α_n и τ_n оцениваются только для первого циклотронного резонанса $n = 1$. Тогда вблизи экватора величина α_1 оказывается пропорциональной l :

$$\alpha_1 \simeq l \frac{9k_{eq}}{2(LR_E)^2} \left(v_{\perp}^2 + v_{R1}^2 \frac{2\omega_{ceq}^2 - \omega(\omega_{ceq} + \omega)}{(\omega_{ceq} - \omega)^2} \right) \equiv \alpha' l. \quad (3.20)$$

Здесь предполагается, что $\theta = 0^\circ$, $n = 1$, а значения всех переменных, кроме l , берутся на экваторе, а определение α' ясно из формулы (3.20).

Используя следующие значения параметров (см. рисунки 3.2, 3.3):

$$\omega/\omega_{ceq} \sim 0.25, \quad k_{eq} \sim 1.9 \times 10^{-5} \text{ см}^{-1}, \quad L \sim 3.5, \quad v_{\perp} \sim |v_{R1}| \sim 0.167c, \quad (3.21)$$

легко получить $\alpha' \sim 1.7 \times 10^{-3} \text{ см}^{-1} \text{ с}^{-2}$. Продольная и поперечная скорости соответствуют электронам с кинетической энергией $m(v_{\perp}^2 + v_{R1}^2)/2 = mv^2/2 \sim 14.3 \text{ кэВ}$.

Для оценки значения l_1 из (3.17), помимо величины α_n , необходимо знать амплитуду электрического поля волны $|E_1|$ в точке $l = l_1$. Эта величина не может быть получена из теоретического анализа и должна быть взята из наблюдений. Основываясь на типичных значениях, найденных в литературе [97], примем $|E_1| = 0.1 \text{ мВ/м}$. Подставляя это значение вместе с другими величинами в (3.17), получаем

$$l_1 \sim 0.0885 R_E,$$

что при $L = 3.5$ соответствует широте $\lambda_1 \sim 1.45^\circ$. Прямой расчет размера области слабой неоднородности, выполненный с учетом изменений параметров вдоль траектории волнового пакета и различных кинетических энергий резонансных частиц, хорошо согласуется с данной оценкой и дает $\lambda_1 = 1.66^\circ$. Вне этой узкой области вокруг экватора (то есть при $l > l_1$ или $\lambda > \lambda_1$) неоднородность плазмы, увеличивающаяся быстрее линейного закона, начинает доминировать над нелинейными эффектами. При этом экспоненциальный рост амплитуды волны приводит к быстрому уменьшению характерного нелинейного времени взаимодействия.

Следует отметить, что в литературе можно найти много случаев экспериментальной регистрации свистовых волн с большими амплитудами ($> 10 \text{ мВ/м}$) [98–100]. Такие волны особенно важны для ускорения электронов посредством механизма нелинейного фазового захвата [98]. Наблюдаемые волны большой

амплитуды, по-видимому, являются сильно наклонными квазиэлектростатическими волнами, распространяющимися вблизи резонансного конуса. Генерация квазимонохроматического пакета волн из теплового шума, рассматриваемая в данном случае, подразумевает малые начальные амплитуды и начальное продольное распространение, соответствующее максимальному инкременту. Помимо вышеупомянутой работы [97], при выборе начальной амплитуды волны на границе области фазового захвата используются статистические исследования [100], показывающие, что амплитуды порядка 0.1–1 мВ/м типичны для излучений свистовой моды в экваториальной области вблизи L -оболочек от 3.5 до 5.5.

Также стоит отметить, что дальнейшее увеличение амплитуды при распространении волны от экватора (см. далее уравнение (3.23) и определение D) определяется не только инкрементом, но и изменением всех множителей, включая групповую скорость и площадь поперечного сечения лучевой трубки вдоль траектории луча. Это можно наблюдать на Рисунке 3.4 (левая панель), где увеличение амплитуды от 1 до 5 мВ/м, начиная со средних широт, происходит при малых (и даже отрицательных) значениях инкремента волны. В то же время увеличение амплитуды вблизи экватора связано, прежде всего, с величиной инкремента.

Как было показано в работе [50], в области сильной неоднородности ($l > l_1$) нелинейный инкремент определяется формулой 4.12 из вышеупомянутой работы, который, будучи переписанным в переменных (w, α_{eq}) , принимает вид:

$$\gamma = \sum_{n=-\infty}^{\infty} \gamma_n = \frac{(\pi e |E| c)^2}{2mk_{\parallel} U} \sum_{n=-\infty}^{\infty} \int_{w_{\parallel Rn}}^{\infty} dw f'_{0n}(w) V_n^2(w) \left[\sum_{k=1}^{\infty} \frac{4}{k \beta_n^2} J_k^2(k \beta_n) \right], \quad (3.22)$$

где все величины, входящие в (3.22), были объяснены выше. При $\beta_n \rightarrow 0$ выражение в квадратных скобках стремится к единице, так что (3.22) стремится к линейному инкременту (3.1) (ср. (3.22) и (3.1)). Выражение (3.22) для нелинейного инкремента отличается от выражения (3.1) для линейного только положительно определенным множителем в квадратных скобках. Поэтому большинство замечаний, сделанных после формул (3.11) и (3.12), остаются справедливыми и для нелинейного инкремента.

Возвращаясь к применимости приближения заданного поля, приведем значения $\delta_n = 1.67 \gamma_L \tau_{NLn}$ ($1.67 \gamma_L$ – максимальное значение нелинейного инкремента, как было отмечено выше) для характерного значения кинетической

энергии 14.3 кэВ: $\delta_0 \simeq 0.12$, $\delta_1 \simeq 0.08$, что демонстрирует выполнение условия $\gamma_{\text{NL}} \tau_{\text{NL}n} \ll 1$. Как будет показано ниже (рис. 3.4, правая панель), условия сильной неоднородности выполняются вдоль всей траектории волнового пакета, начиная с широты λ_1 , поэтому нелинейное время $\tau_{\text{NL}n}$ всегда определяется как (3.16) через параметр неоднородности α_n , который увеличивается по мере движения волнового пакета к Земле. Кроме того, инкремент уменьшается с увеличением широты (см. рис. 3.4, левая панель), поэтому значения $\delta_n(\lambda)$ на разных широтах соотносятся как $\delta_n(\lambda) < \delta_n(\lambda_1)$ для $\lambda > \lambda_1$, и условие применимости приближения заданного поля, то есть $\gamma_{\text{NL}} \tau_{\text{NL}n} \ll 1$, всегда выполняется.

Для интегрирования уравнения (1.12) используется нелинейный инкремент γ . В случае стационарного волнового пакета, то есть при $\partial U / \partial t = 0$, уравнение принимает вид:

$$\frac{dD}{ds} = 2 \frac{\gamma}{v_g} D, \quad (3.23)$$

где введены длина вдоль траектории волнового пакета s и величина $D = \sigma v_g U \propto |E|^2$. Следуя работе [56], поперечное сечение лучевой трубки σ рассчитывается вдоль траектории. Нелинейный инкремент γ используется в адиабатическом приближении, при этом предполагается, что он зависит от амплитуды волны $|E|$ как от параметра, то есть $\gamma = \gamma(s, |E|)$. Система уравнений (3.22)-(3.23) решается начиная с координаты s_1 , соответствующей широте λ_1 . Для поиска приближенного решения этой системы координата s вдоль траектории разбивается на малые интервалы (s_i, s_{i+1}) и значение D в точке s_{i+1} вычисляется по следующей формуле:

$$D(s_{i+1}) = D(s_i) \exp \left(2 \frac{\gamma_i}{v_g(s_i)} \Delta s_i \right), \quad \Delta s_i = s_{i+1} - s_i, \quad (3.24)$$

где нелинейный инкремент $\gamma_i = \gamma(s_i, |E_i|)$ определяется в точке s_i , в которой также известна амплитуда электрического поля волны $|E_i| = |E(s_i)|$ (для $s_i = s_1$ полагается $|E_1| = 0.1$ мВ/м). Используя определение D , (1.24) и (3.22), получаем амплитуду электрического поля $|E_{i+1}|$ и инкремент γ_{i+1} . Такое самосогласованное решение уравнений (3.22)-(3.23) представлено на левой панели рис. 3.4, где показаны нормированный нелинейный инкремент γ/ω_c (оранжевая сплошная линия), нормированный линейный инкремент γ_L/ω_c (оранжевая пунктирная линия) и амплитуда волны $|E|$ (синяя линия) вдоль траектории луча как функции широты. Результаты показывают, что нелинейный инкремент,

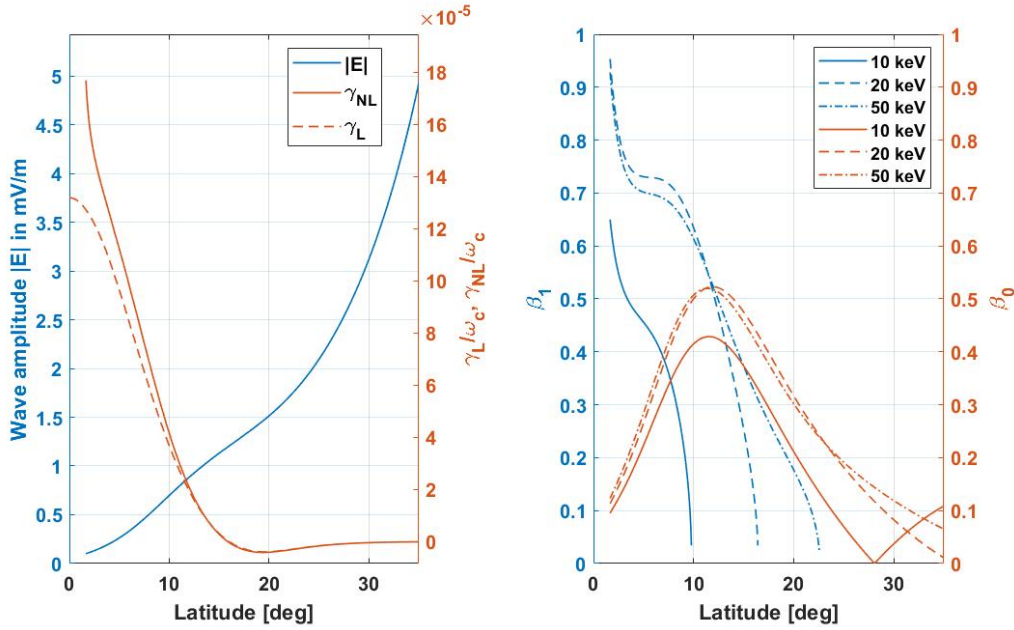


Рисунок 3.4 — (слева) Полный нормированный нелинейный инкремент γ/ω_c (оранжевая сплошная линия), линейный инкремент γ_L/ω_c (оранжевая пунктирная линия) и амплитуда электрического поля $|E|$ (синяя линия) вдоль лучевой траектории. (справа) Безразмерные параметры β_n вдоль лучевой траектории для частиц на первом (синие линии) и Ландау (оранжевые линии) резонансах с полной кинетической энергией $W = 10$ кэВ (сплошные линии), 20 кэВ (пунктирные линии), 50 кэВ (штрихпунктирные линии).

как и ожидалось, мало отличается от линейного в области сильной неоднородности, то есть для $\lambda > \lambda_1$. Хотя на широтах $\lambda > 16^\circ$ полный инкремент становится отрицательным, амплитуда электрического поля волны $|E|$ монотонно увеличивается вдоль всей траектории. Рост амплитуды на таких широтах обеспечивается изменением геометрических факторов, а именно уменьшением произведения поперечного сечения лучевой трубки и групповой скорости волны вдоль траектории луча. Безразмерные параметры β_n , рассчитанные с учетом вычисленной амплитуды $|E|$ для основных резонансов (см. ниже) $n = 0$ (оранжевые линии) и $n = 1$ (синие линии), показаны как функции широты на правой панели рис. 3.4 для трех значений полной кинетической энергии $W = 10$ кэВ (сплошные линии), 20 кэВ (пунктирные линии) и 50 кэВ (штрихпунктирные линии). Хорошо видно, что для всех широт реализуется случай сильной неоднородности ($\beta_n < 1$), и значительное увеличение амплитуды (от 0.1 до 5 мВ/м) не приводит к доминированию нелинейности над неоднородностью на всей траек-

тории. Параметр β_{-1} , который не показан на рисунках, не превышает значения 0.25 для всех рассмотренных энергий и широт.

3.4 Передача энергии

Инкремент является важным параметром для количественной оценки обмена энергией между волной и частицами. Отрицательный инкремент указывает на затухание волны и увеличение плотности кинетической энергии резонансных электронов, в то время как положительный инкремент означает увеличение плотности энергии волны и, следовательно, уменьшение энергии электронов. В данном исследовании инкремент анализируется более подробно, а также определяется диапазон энергий электронов, вносящих основной вклад в инкремент, и знак этого вклада. С этой целью выражение для нормированного нелинейного инкремента на n -м циклотронном резонансе переписывается в следующем виде:

$$\frac{\gamma_n}{\omega_c} = \int_{W_{\parallel Rn}}^{W_{\max}} G_n dW, \quad (3.25)$$

где подынтегральная функция G_n определяется из сравнения соотношений (3.1), (3.11), (3.12), (3.22) и (3.25); $W_{\parallel Rn}$ – резонансная продольная энергия на n -м циклотронном резонансе в кэВ. Подынтегральная функция $G_n(W)$ зависит от кинетической энергии электрона и служит основным инструментом для изучения вклада электронов с различными энергиями в инкремент волны. Согласно определению инкремента (3.22), энергия, соответствующая максимальному абсолютному значению подынтегральной функции G_n , определяется конкуренцией трех факторов: смешанной производной функции распределения $f'_{0n}(W)$, величины взаимодействия отдельной частицы с волной $V_n(W)$ и выражения в квадратных скобках (3.22), причем последний не играет определяющей роли.

Предполагается, что волна свистовой моды возбуждается на экваторе с $\theta = 0^\circ$. В этом случае V_n обращается в нуль для всех резонансов, кроме первого циклотронного резонанса, для которого $V_1 = v_\perp/c$, поэтому вблизи экватора значим только первый резонанс. С учетом упомянутых ранее особенностей

описания нелинейных взаимодействий вблизи экватора анализ начинается с $\lambda = \lambda_1 = 1.66^\circ$. На этой широте угол волновой нормали все еще достаточно мал ($\theta \simeq 5.8^\circ$), поэтому на рисунке 3.5 видно значительное преобладание первого циклотронного резонанса над двумя другими. На рисунке представлены значения G_n и V_n^2 для каждого резонанса как функции энергии W . Напомним, что основной вклад в инкремент вносят три резонанса: $n = 1$, $n = 0$ и $n = -1$. Разные знаки подынтегральных функций G_n для разных резонансов показывают, что электроны на первом циклотронном резонансе в среднем теряют свою энергию за счет резонансного взаимодействия с волной, в то время как электроны, взаимодействующие с волной на резонансе Ландау ($n = 0$) и на минус первом резонансе, наоборот, в среднем ускоряются. Как видно из рисунка 3.5, V_1^2 растет почти линейно с ростом полной кинетической энергии резонансной частицы, а подынтегральная функция G_1 достигает максимума при энергии $W \sim 14.3$ кэВ, что довольно близко к продольной резонансной энергии на первом циклотронном резонансе ($W_{\parallel R1} \sim 7.2$ кэВ), а затем экспоненциально уменьшается. Таким образом, можно сказать, что смешанная производная является основным фактором, влияющим на положение максимума G_1 на оси энергии. Важная роль смешанной производной в подынтегральной функции также демонстрируется рисунками 3.6 и 3.7, на которых показаны значения G_n и V_n^2 как функций W для других магнитных широт вдоль траектории волнового пакета. Основной вклад в инкремент на широте $\lambda = \lambda_1$ вносят электроны первого циклотронного резонанса с продольной энергией $W_{\parallel} \sim 7.2$ кэВ, поперечной энергией $W_{\perp} \sim 7.1$ кэВ, полной энергией $W \sim 14.3$ кэВ и экваториальным питч-углом $\alpha_{eq} \sim 44.8^\circ$. Учет вклада электронов всех энергий на всех резонансах дает полный нормированный инкремент волны $\gamma/\omega_c = 1.77 \times 10^{-4}$ ($f_c = \omega_c/2\pi \simeq 20.3$ кГц), что в сравнении с инкрементом на первом резонансе $\gamma_1/\omega_c = 1.78 \times 10^{-4}$ показывает незначительность вклада других резонансов на широте λ_1 .

По мере распространения волнового пакета к более высоким широтам волновой вектор $\mathbf{k}$ становится более наклонным, что приводит к взаимодействиям на всех резонансах, но наиболее эффективно – на двух других (резонанс Ландау и минус первый резонанс). Таким образом, на средних широтах все три резонанса вносят вклад в полный инкремент. Расчеты показывают, что полный нормированный инкремент наклонной волны свистовой моды на широте $\lambda = 15^\circ$, где локальная циклотронная частота $f_c = \omega_c/2\pi \simeq 24.9$ кГц, а угол

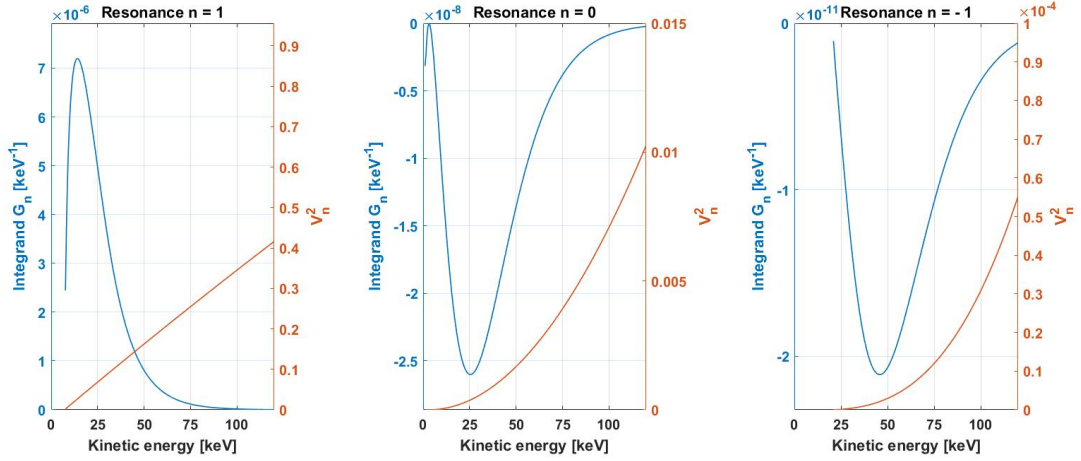


Рисунок 3.5 — Подынтегральная функция G_n (синяя линия) и V_n^2 (оранжевая линия) в зависимости от кинетической энергии W для первого (слева), Ландау (в центре) и минус первого (справа) резонансов; $L = 3.5$, $\lambda = 1.66^\circ$, $\theta = 5.8^\circ$.

волновой нормали $\theta \sim 48.2^\circ$, составляет $\gamma/\omega_c \simeq 2.6 \times 10^{-6}$, что на 2 порядка величины меньше рассчитанного инкремента на λ_1 : $\gamma/\omega_c \simeq 1.77 \times 10^{-4}$. Это связано не только с уменьшением инкремента на первом циклотронном резонансе ($\gamma_1/\omega_c \simeq 1.5 \times 10^{-5}$), который лишь примерно в 10 раз меньше своего значения на λ_1 . Другой причиной падения полного нормированного инкремента является конкуренция между первым циклотронным резонансом и резонансом Ландау. На данной широте оба резонанса вносят соразмерный вклад в инкремент, но эти вклады имеют противоположные знаки. На рисунке 3.6 показаны G_n и V_n^2 для трех резонансов на геомагнитной широте $\lambda = 15^\circ$ для рассчитанной траектории волнового пакета. Вклад в инкремент от электронов первого циклотронного резонанса с продольной энергией $W_{\parallel R1} \sim 16.8$ кэВ остается положительным для всех энергий, и максимум подынтегральной функции G_1 достигается при энергиях около ~ 21.5 кэВ (поперечная энергия составляет около ~ 4.7 кэВ). Эти данные позволяют оценить экваториальный питч-угол $\alpha_{eq} \sim 23.6^\circ$ и нормированную функцию распределения $f_0/C \simeq 2.2 \times 10^{-2}$ этих частиц.

Частицы, участвующие во взаимодействии на резонансе Ландау, напротив, вносят отрицательный вклад в инкремент волны, и, следовательно, их полная энергия увеличивается. Электроны с кинетической энергией около 22.5 кэВ, взаимодействующие с волной на резонансе Ландау ($W_{\parallel R0} \sim 1.2$ кэВ), вносят основной вклад в соответствующий член инкремента γ_0 , нормированное значение которого составляет $\gamma_0/\omega_c \simeq -1.2 \times 10^{-5}$. Это частицы с экваториальным питч-углом $\alpha_{eq} \sim 56.9^\circ$, и нормированная функция распределения для

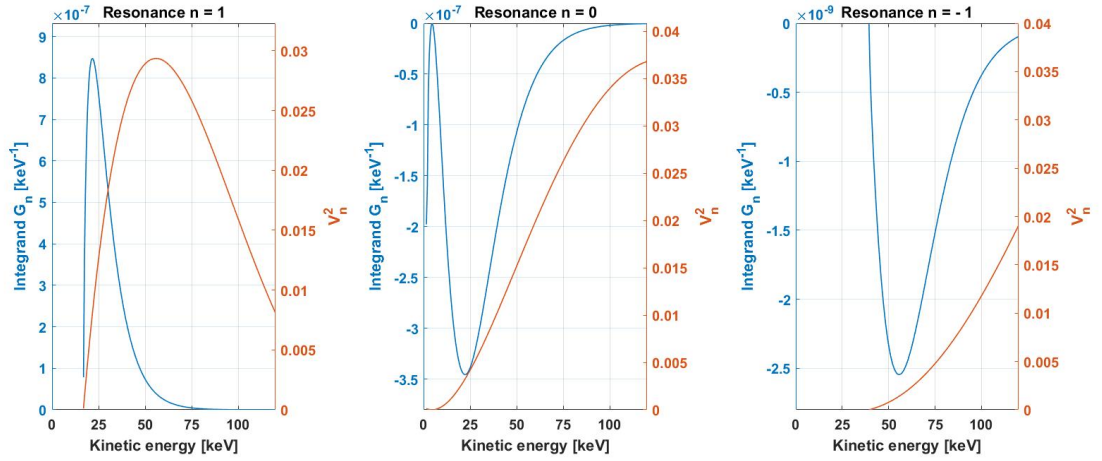


Рисунок 3.6 — Подынтегральная функция G_n (синяя линия) и V_n^2 (оранжевая линия) в зависимости от кинетической энергии W для первого (слева), Ландау (в центре) и минус первого (справа) резонансов; $L = 3.61$, $\lambda = 15^\circ$, $\theta = 48.2^\circ$.

таких энергий и питч-углом составляет $f_0/C \simeq 9 \times 10^{-2}$. Стоит отметить, что, несмотря на случайное совпадение пиковых энергий для первого резонанса и резонанса Ландау (около 22 кэВ), это разные популяции частиц с разными продольными и поперечными энергиями. Более того, электроны Ландау резонанса движутся вместе с волной, в то время как электроны первого циклотронного резонанса движутся навстречу волне. Представленные графики указывают на то, что минус первый циклотронный резонанс, для которого продольная резонансная энергия $W_{\parallel R-1} \sim 39.4$ кэВ, оказывает более слабое воздействие на инкремент по сравнению с Ландау и первым циклотронным резонансами. Максимальное абсолютное значение подынтегральной функции $|G_{-1}|$ на два порядка меньше, чем у двух других резонансов, и наблюдается около энергии электронов примерно 55.8 кэВ. Это объясняется малым числом частиц минус первого резонанса из-за большой резонансной кинетической энергии и относительно малого экваториального питч-угла $\alpha_{eq} \sim 27.8^\circ$. Нормированная функция распределения резонансных электронов в этом случае составляет $f_0/C \simeq 5.3 \times 10^{-4}$, что в 40 раз меньше соответствующего значения для первого резонанса и в 170 раз меньше, чем для резонанса Ландау.

При дальнейшем распространении волнового пакета к Земле отрицательный вклад в полный инкремент от резонанса Ландау начинает преобладать над положительным вкладом от первого циклотронного резонанса. Таким образом, волна затухает в этой области, в то время как средняя энергия резонансных электронов увеличивается. Волновой пакет становится все более наклонным

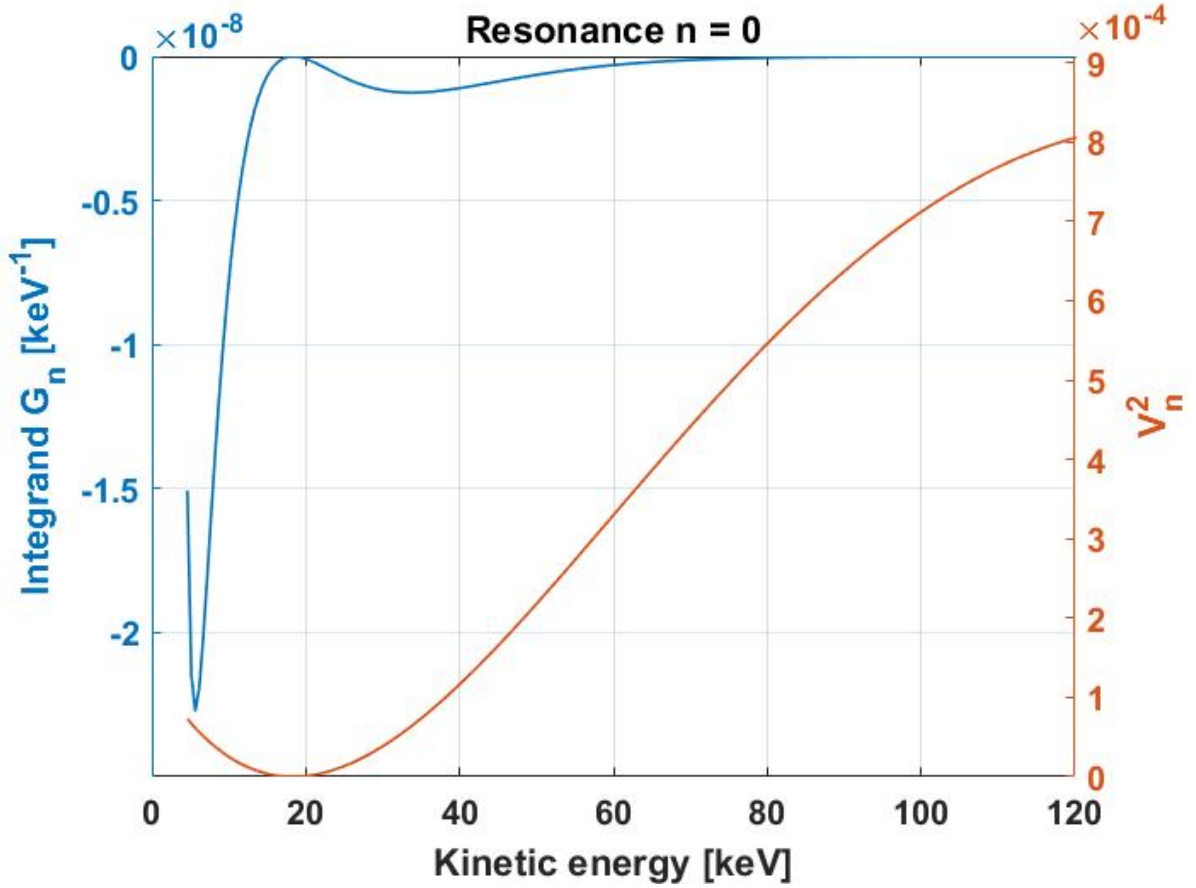


Рисунок 3.7 — Подынтегральная функция G_0 (синяя линия) и V_0^2 (оранжевая линия) в зависимости от кинетической энергии W ; $L = 3.77$, $\lambda = 35^\circ$, $\theta = 81.5^\circ$.

и угол волновой нормали достигает $\theta \simeq 81.5^\circ$ на широте 35° . В этой точке, как показано на рисунке 3.3, резонансная энергия первого и минус первого циклотронных резонансов превышает 256 кэВ, что является верхним пределом интеграла в уравнении (3.12). Как упоминалось ранее, предполагается, что инкремент волны для этих резонансов равен нулю в этой области магнитосферы Земли. Однако взаимодействие электронов на резонансе Ландау все еще рассматривается, поскольку резонансная энергия в этом случае составляет всего $W_{\parallel R0} \sim 4.3$ кэВ.

На рисунке 3.7 два локальных максимума абсолютного значения подынтегральной функции $|G_0|$ видны более четко по сравнению со случаем $\lambda = 15^\circ$, в то время как между этими максимумами G_0 обращается в нуль при энергии около 20 кэВ. Причиной этого является обращение в нуль величины V_0 :

$$V_0 = \frac{\omega}{k_{\parallel} c} a_z J_0(\rho) - i \frac{\rho \omega_c}{k_{\perp} c} a_y J'_0(\rho), \quad (3.26)$$

которая состоит из положительного (для малых значений ρ) первого члена и отрицательного второго члена, поскольку $-i a_y > 0$ и в рассматриваемом диа-

пазоне энергий от 4.3 до 120 кэВ значение ρ увеличивается от 0 до 2.5, так что $J'_0(\rho) < 0$. Значение подынтегральной функции для резонанса Ландау $|G_0|$ и сам инкремент заметно уменьшаются по сравнению со случаем $\lambda = 15^\circ$. Это уменьшение связано с тем, что V_0 не зависит от a_x для $n = 0$, а другие коэффициенты поляризации a_y, a_z , входящие в V_0 , стремятся к нулю, когда волна приближается к точке отражения. Нормированный полный инкремент составляет $\gamma/\omega_c = \gamma_0/\omega_c \simeq -1.5 \times 10^{-7}$, где $f_c = \omega_c/2\pi \simeq 76$ кГц. Как упоминалось выше, другие резонансы не вносят вклад в инкремент при $\lambda = 35^\circ$ из-за чрезмерно высокой резонансной энергии.

Приведенный выше анализ подынтегральных функций G_n в различных точках вдоль траектории волнового пакета дает общее представление о передаче энергии между компонентами рассматриваемой системы. Вблизи экватора на широте λ_1 энергия свистовой волны увеличивается за счет уменьшения средней энергии электронов первого циклотронного резонанса с энергиями около 14.3 кэВ. Далее, по мере удаления волны от экватора, электроны начинают взаимодействовать с волной на других резонансах. На широте $\lambda = 15^\circ$ полный инкремент волны все еще положителен, но значительно снижается по сравнению со значением вблизи экватора, в том числе из-за компенсации эффектов от первого резонанса и резонанса Ландау, которые вносят вклады разных знаков в инкремент. Основное влияние на инкременты на данной широте оказывают частицы первого циклотронного резонанса и резонанса Ландау с примерно одинаковой энергией ~ 22 кэВ. Однако это совершенно разные популяции частиц на одной и той же L -оболочке: электроны первого циклотронного резонанса теряют свою энергию, двигаясь навстречу волне, в то время как электроны Ландау резонанса, движущиеся в направлении продольной фазовой скорости волны, нагреваются в результате резонансного взаимодействия. Частицы на минус первом резонансе также участвуют во взаимодействии, и это электроны с довольно высокими энергиями ~ 55.8 кэВ, но из-за их малого количества их вклад в полный инкремент незначителен. Тем не менее, эти электроны существуют и увеличивают свою энергию. По мере распространения волны отрицательный вклад в полный инкремент становится сравнимым с положительным (это происходит вблизи $\lambda = 16^\circ$, см. рисунок 3.4, левая панель), и наблюдается ситуация локального баланса, при которой энергия волны не изменяется в результате резонансного взаимодействия, но в среднем частицы на первом резонансе теряют энергию, в то время как частицы на резонансах Лан-

дау и $n = -1$ получают энергию. В этом случае можно ясно наблюдать передачу энергии между различными популяциями резонансных частиц, опосредованную волной. В области высоких широт из-за больших значений циклотронной частоты эффективным остается только резонанс Ландау, основной вклад в который вносят низкоэнергичные электроны.

В области наибольшего усиления волны вблизи экватора, где доминирующим является первый циклотронный резонанс, продольная резонансная энергия, пропорциональная $(\omega_c - \omega)^2/k_{\parallel}^2$, и вместе с ней и полная энергия резонансных частиц может быть меньше энергии частиц, взаимодействующих с волной вдали от экватора на резонансе Ландау и минус первом резонансе. Как было показано выше, эти резонансы дают отрицательный вклад в инкремент волн, то есть соответствующие частицы увеличивают свою энергию за счет энергии волны. Таким образом, энергия переносится через волну от частиц с меньшей энергией к частицам с большей энергией. Это ни в коей мере не противоречит закону термодинамики, справедливому для замкнутых систем, поскольку рассматриваемая нами система является открытой и неравновесной. Источником этой неравновесности и, в конечном итоге, источником энергии волн, возбуждаемых во внутренней магнитосфере, являются потоки плазмы, поступающие в область генерации волн из солнечного ветра и хвоста магнитосферы.

В дополнение к вышеизложенным соображениям важно получить количественную оценку изменения энергии частиц на каждом резонансе. Предыдущие результаты продемонстрировали передачу энергии между различными популяциями электронов, опосредованную волной свистовой моды. Для количественной оценки этой величины проводится следующий анализ, основанный на скорости изменения энергии отдельной частицы:

$$\frac{dw}{dt} = e|E|c \sum_{n=-\infty}^{+\infty} |V_n| \cos \zeta_n, \quad (3.27)$$

где ζ_n — фаза, определяемая, например, в [50]. Для частицы, находящейся в n -м циклотронном резонансе с волной, n -й член суммы в выражении (3.27) доминирует над остальными слагаемыми. Следовательно, скорость изменения энергии такой частицы определяется соотношением:

$$\frac{dw_n}{dt} = e|E|c|V_n| \cos \zeta_n. \quad (3.28)$$

Ключевую роль в изменении энергии частицы играет величина $d\zeta_n/dt$ – скорость изменения фазы ζ_n вдоль траектории частицы. Скорость изменения энергии частицы пропорциональна косинусу ζ_n , поэтому именно эта производная определяет динамику процесса. В резонансных условиях, когда $v_{\parallel} \simeq v_{\text{Rn}}$, производная $d\zeta_n/dt$ становится близкой к нулю. При этом правая часть уравнения (3.28) изменяется медленно, что позволяет частице существенно изменить свою энергию за время резонансного взаимодействия. Резонансные частицы действительно испытывают значительные изменения энергии, однако знак этих изменений различен: одни частицы набирают энергию, другие – теряют. В результате при усреднении происходит взаимная компенсация, которая приводит к малому значению среднего изменения энергии и соответственно малому инкременту γ_n .

Несмотря на то, что изменение энергии отдельной частицы, усредненное по фазе ζ_n , равно нулю, инкремент волны все же отличен от нуля. Это связано с тем, что инкремент определяется скоростью изменения плотности энергии резонансных частиц, $d\mathcal{W}_n/dt$ (см. [101]):

$$\frac{d\mathcal{W}_n}{dt} \equiv \langle \mathbf{j}_{\text{Rn}} \cdot \boldsymbol{\mathcal{E}} \rangle = -2\gamma_n U. \quad (3.29)$$

Эта скорость зависит от функции распределения резонансных частиц f , в которой присутствует возмущающий член, пропорциональный $\cos \zeta_n$. Тем не менее, поскольку увеличение и уменьшение энергии частиц происходят одновременно и взаимно компенсируют друг друга, среднее изменение энергии по всему фазовому объему, $\langle \Delta w_n \rangle$, оказывается значительно меньше максимального изменения энергии, которое может испытывать отдельная частица при $|\cos \zeta_n| \sim 1$.

Особое внимание уделяется случаю средней широты $\lambda = 15^\circ$, поскольку в этой области инкременты на основных резонансах все еще остаются достаточно большими. В условиях сильной неоднородности время резонансного взаимодействия Δt_{Rn} и ширина резонансной области по продольной скорости $\Delta v_{\parallel n}$ могут быть оценены с помощью параметра неоднородности $|\alpha_n|$:

$$\Delta t_{\text{Rn}} \sim \sqrt{\frac{2\pi}{|\alpha_n|}}; \quad \Delta v_{\parallel n} \sim \frac{\sqrt{2\pi|\alpha_n|}}{k_{\parallel}}. \quad (3.30)$$

Для оценки максимального изменения энергии отдельной частицы $\Delta w_{n\text{max}}$ уравнение (3.28) интегрируется по времени резонансного взаимодействия, считая

$\cos \zeta_n \sim 1$:

$$\Delta w_{n\max} \sim e|E|c|V_n|\Delta t_{\text{Rn}} \sim e|E|c|V_n|\sqrt{\frac{2\pi}{|\alpha_n|}}. \quad (3.31)$$

На основе работы [101] оценивается усредненное изменение энергии частиц на каждом резонансе. Скорость изменения энергии резонансных частиц $\langle dw_n \rangle / dt$, усредненная по фазовому объему, связана со скоростью изменения плотности энергии резонансных частиц $d\mathcal{W}_n / dt$ следующим образом:

$$\frac{\langle dw_n \rangle}{dt} = \frac{1}{n_{hn}} \frac{d\mathcal{W}_n}{dt}, \quad (3.32)$$

где $n_{hn} = n_h \Delta v_{\parallel n} / v_{T\parallel}$ выражено через плотность энергичных частиц n_h , ширину n -й резонансной области по продольной скорости $\Delta v_{\parallel n}$ и «тепловую» продольную скорость распределения энергичных частиц $v_{T\parallel} = \sqrt{2T_{\parallel}/m} \simeq 0.18c$ (предполагается, как и прежде, $T_{\parallel} = 8$ кэВ). Проинтегрировав уравнение (3.32) по времени резонансного взаимодействия и подставив величины из (3.30), мы получаем оценку усредненного по фазовому объему изменения энергии частицы на каждом резонансе:

$$\langle \Delta w_n \rangle \sim -\frac{2\gamma_n U v_{T\parallel} \Delta t_{\text{Rn}}}{n_h \Delta v_{\parallel n}} \sim -\frac{2\gamma_n u |E|^2 v_{T\parallel} k_{\parallel}}{n_h |\alpha_n|}, \quad (3.33)$$

где $U = u|E|^2$ (см. (1.24)). Значения величин на широте $\lambda = 15^\circ$, входящие в определение (3.31) и (3.33), выбираются из расчетов лучевой траектории и инкремента волны следующим образом:

$$\begin{aligned} k_{\parallel} &\sim 1.6 \times 10^{-5} \text{ см}^{-1}, \quad u \sim 8, \quad \gamma_1 \sim 2.3 \text{ с}^{-1}, \\ \gamma_0 &\sim -1.9 \text{ с}^{-1}, \quad \gamma_{-1} \sim -0.015 \text{ с}^{-1}, \quad n_h \sim 0.084 \text{ см}^{-3}, \end{aligned} \quad (3.34)$$

а амплитуда электрического поля волны принимается равной $|E| \sim 1.13$ мВ/м в соответствии с результатами, представленными на рисунке 3.4 (левая панель). При рассмотрении параметра неоднородности $|\alpha_n|$ и матричного элемента $|V_n|$ как функций W для каждого резонанса были получены оценки величин $\Delta w_{n\max}(W)$ и $\langle \Delta w_n \rangle(W)$, которые представлены на рисунке 3.8 синей и оранжевой линиями соответственно. Из рисунка видно, что типичные значения $\Delta w_{n\max}$ для каждого резонанса достигают нескольких десятков эВ, тогда как средние изменения энергии $\langle \Delta w_n \rangle$ не превышают долей эВ. Для рассмотренных значений полной энергии частиц, соответствующих максимальным значениям $|G_n|$

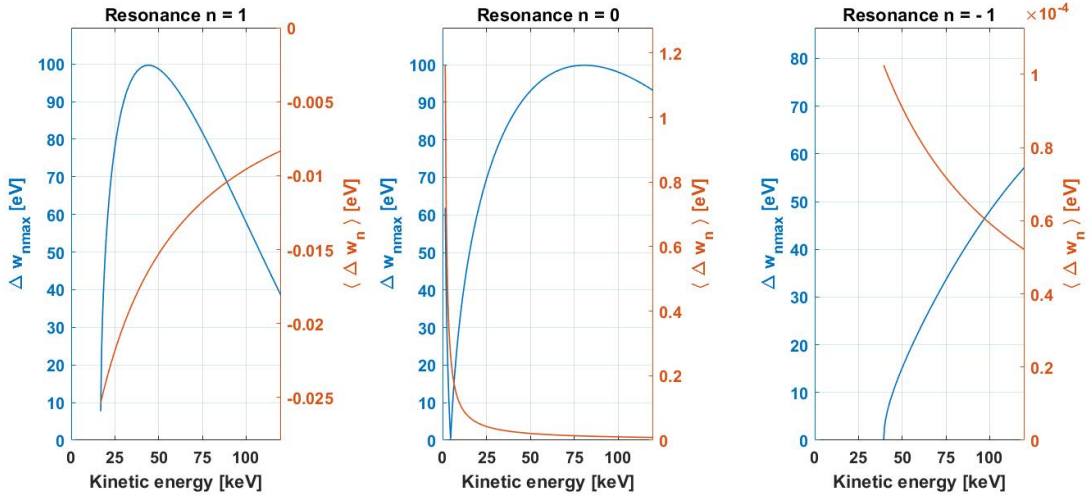


Рисунок 3.8 — Оценки максимального изменения энергии отдельной частицы $\Delta w_{n\max}$ (синяя линия) и изменения энергии, усредненного по фазовому объему резонансных частиц $\langle \Delta w_n \rangle$ (оранжевая линия), в зависимости от кинетической энергии W для первого (левая панель), Ландау (средняя панель) и минус первого (правая панель) резонансов; $\lambda = 15^\circ$.

для каждого резонанса n , параметр неоднородности $|\alpha_n|$ равен:

$$|\alpha_1| \sim 1.4 \times 10^6 \text{ с}^{-2}, \quad |\alpha_0| \sim 5.7 \times 10^5 \text{ с}^{-2}, \quad |\alpha_{-1}| \sim 2.6 \times 10^6 \text{ с}^{-2}, \quad (3.35)$$

а $w_{n\max}$ и $\langle \Delta w_n \rangle$:

$$\Delta w_{1\max} \sim 63 \text{ эВ}, \quad \Delta w_{0\max} \sim 65 \text{ эВ}, \quad \Delta w_{-1\max} \sim 20 \text{ эВ} \quad (3.36)$$

$$\langle \Delta w_1 \rangle \sim -2.3 \times 10^{-2} \text{ эВ}, \quad \langle \Delta w_0 \rangle \sim 4.8 \times 10^{-2} \text{ эВ}, \quad \langle \Delta w_{-1} \rangle \sim 8.6 \times 10^{-5} \text{ эВ}.$$

Среднее значение $\langle \Delta w_n \rangle$ на рисунке 3.8 следует рассматривать лишь как грубую оценку, так как оно выводится из инкремента γ_n , получаемого интегрированием по всему выбранному диапазону энергий. Изменение $\langle \Delta w_n \rangle$ в зависимости от энергии, наблюдаемое на графиках, объясняется зависимостью параметра неоднородности от энергии, который определяет время резонансного взаимодействия и ширину резонанса. Тем не менее, эти оценки показывают, что среднеквадратичное изменение энергии частицы, которое имеет порядок $\Delta w_{n\max}$, намного больше, чем усредненное изменение частицы $\langle \Delta w_n \rangle$.

3.5 Выводы

Хорошо известно, что взаимодействие волна–частица играет важную роль в динамике электронов радиационных поясов Земли ([11; 102] и ссылки там). Такие взаимодействия могут приводить к увеличению или уменьшению энергии энергичных электронов, а также к их питч-угловому рассеянию в конус потерь с последующим высыпанием в атмосферу. Эти процессы часто сопровождаются передачей энергии между различными группами частиц посредством волн [101; 103] и, по сути, такая передача энергии является неотъемлемой частью таких взаимодействий.

В бесстолкновительной неустойчивой плазме, когда волны возбуждаются за счет плазменных неустойчивостей, передача энергии между различными популяциями частиц фактически является способом ускорения частиц, поскольку волны, нагревающие частицы, сами возбуждаются, поглощая энергию других частиц. Этот общий процесс может реализовываться различными способами. Передача энергии может происходить в одном и том же месте и в одно и то же время между захваченными по фазе и пролетными частицами, взаимодействующими с волной на одном циклотронном резонансе, или между частицами, взаимодействующими с волной на разных циклотронных резонансах. Передача энергии также может реализовываться другим образом, как рассмотрено в этой главе, когда волновой пакет усиливается на одной части лучевой траектории и поглощается на другой. Оба процесса связаны с обменом энергией между волной и частицами, но в конечном итоге они приводят к передаче энергии между различными популяциями частиц.

В настоящей главе этот нелинейный процесс рассматривается в приближении заданного поля с использованием того факта, что нелинейный инкремент остается локальным (то есть зависит от локальной амплитуды и параметров волнового поля) при отсутствии захваченных по фазе частиц, что наблюдается на большей части траектории волны. Это делает резонансное взаимодействие квазимонохроматического пакета волн с энергичными электронами в сильно неоднородной плазме редким случаем, когда система уравнений Больцмана–Власова–Максвелла может быть решена самосогласованно, поскольку инкремент, хотя и нелинейный, выражается через локальную амплитуду волны. Можно говорить о решении этой системы уравнений, поскольку используемое

уравнение для волнового поля происходит из уравнений Максвелла, а инкремент находится из решения кинетического уравнения Больцмана–Власова с самосогласованным электромагнитным полем.

В результате обмена энергией между двумя группами частиц, изменения энергии которых имеют разные знаки, инкремент волны остается достаточно малым, что сохраняет применимость приближения заданного поля, в то время как изменение энергии каждой группы частиц существенно. Само собой разумеется, что приведенные выше примеры передачи энергии между различными группами частиц посредством электромагнитных волн в неустойчивой плазме не исчерпывают все варианты этого процесса. Другие примеры, включающие различные моды волн и типы частиц, могут представлять интерес и значение для космической плазмы.

Изложенные в третьей главе результаты опубликованы в [104].

Глава 4. Самосогласованное описание ленгмюровских волн в неоднородной плазме

В отличие от двух предыдущих глав, посвященных резонансному взаимодействию квазимонохроматических свистовых волн с энергичными электронами в магнитосфере Земли, в этой главе рассматриваются электростатические ленгмюровские волны ($\mathbf{B} = 0$) в плазме без внешнего магнитного поля ($\mathbf{B}_0 = 0$). Такая постановка задачи позволяет исследовать систему в одномерном приближении как по координате, так и по скорости. Динамика ленгмюровских волн описывается самосогласованным методом, основанным на совместном решении кинетического уравнения Больцмана-Власова (1.9) для функции распределения резонансных электронов и закона Ампера-Максвелла (1.5) для электрического поля $\mathcal{E}$.

В работе исследуется пространственно неоднородная плазма, создаваемая внешней потенциальной силой. Вдоль пространственной координаты вводятся периодические граничные условия.

Важной особенностью используемого подхода является разделение плазмы на две компоненты, соответствующие функциям распределения холодных и энергичных частиц. Плотная «холодная» компонента плазмы определяет дисперсионные свойства среды и не участвует в резонансном взаимодействии с волной. Линейный ток, соответствующий этой компоненте, объединяется с электрическим полем в электрическую индукцию с использованием локальной диэлектрической проницаемости. Такой подход позволяет избежать компьютерного моделирования подавляющего большинства холодных электронов. Вторая, «энергичная» компонента, которая значительно менее плотная, участвует в резонансных взаимодействиях с волной и, таким образом, отвечает за рост или затухание волны.

Ленгмюровские волны представляют интерес и в контексте изучения свистовых волн. Система уравнений движения резонансных электронов (2.11) в поле свистовой волны, распространяющейся вдоль внешнего магнитного поля, по структуре аналогична системе уравнений для частиц в поле ленгмюровской волны [50; 79]. Отличие заключается в определении параметров, которые для

ленгмюровских волн могут быть записаны в следующем виде:

$$\alpha_{\text{LANG}} = -\frac{\omega^2}{k^2} \frac{dk}{dx}; \quad \frac{1}{\tau_{\text{LANG}}^2} = \frac{e|E|k}{m}. \quad (4.1)$$

Здесь, как и прежде, ω – частота волны, k – волновое число, $|E|$ – амплитуда волны, а α_{LANG} и τ_{LANG} – параметр неоднородности и нелинейное время для случая ленгмюровской волны.

4.1 Уравнение для волнового поля

Электрическое поле одномерного ленгмюровского спектра описывается уравнением (1.5)

$$\frac{\partial \mathcal{E}(x, t)}{\partial t} = -4\pi j(x, t), \quad (4.2)$$

где $j(x, t)$ – плотность электронного тока, и предполагается, что ионы покоятся. Пусть невозмущенная плотность тока j_0 равна нулю, несмотря на то, что невозмущенная функция распределения электронов может иметь на хвосте кинетический пучок низкой плотности. В этом случае предполагается соответствующая деформация основной части распределения электронов, компенсирующая невозмущенный ток пучка. В правой части уравнения (4.2) заменим $j(x, t)$ на $[j(x, t) - j_0]$ и разделим $[j(x, t) - j_0]$ на две части: нерезонансную и резонансную. Тогда нерезонансная часть тока, хорошо описываемая в линейном приближении, может быть объединена с электрическим полем в электрическую индукцию $\mathcal{D}(x, t)$, что дает

$$\frac{\partial \mathcal{D}(x, t)}{\partial t} = -4\pi \delta j_{\text{res}}(x, t), \quad (4.3)$$

где

$$\delta j_{\text{res}} = -e \int_{\Delta v_{\text{res}}} (f - f_0) v dv. \quad (4.4)$$

Интегрирование в (4.4) проводится по диапазону скоростей резонансных частиц, которые, как предполагается, определяют рост или затухание волны, но не влияют на дисперсию волны, то есть не вносят вклад в действительную часть диэлектрической проницаемости ϵ .

В слабо неоднородной плазме электрическая индукция $\mathcal{D}(x, t)$ задается следующим образом (см. [105])

$$\mathcal{D}(x, t) = \int \int \left[\varepsilon(k, \omega; x) - \frac{i}{2} \frac{\partial^2 \varepsilon(k, \omega; x)}{\partial k \partial x} \right] \mathcal{E}(k, \omega) e^{ikx - i\omega t} \frac{dk d\omega}{(2\pi)^2}, \quad (4.5)$$

где $\mathcal{E}(k, \omega)$ – фурье-компонента электрического поля, а $\varepsilon(k, \omega; x)$ – диэлектрическая проницаемость в (k, ω) -представлении, которая также зависит от координаты из-за неоднородности плазмы. Она определяется как диэлектрическая проницаемость однородной плазмы с локальными параметрами. Для ленгмюровских волн она равна [81; 106]

$$\varepsilon(k, \omega; x) = 1 - \frac{\omega_{pc}^2}{\omega^2} (1 + 3k^2 \lambda_D^2) \equiv 1 - \frac{\omega_{pc}^2}{\omega^2} \left(1 + \frac{3}{2} \frac{k^2 v_{Tc}^2}{\omega_{pc}^2} \right), \quad (4.6)$$

где плазменная частота «холодных» электронов ω_{pc} , дебаевский радиус λ_D и тепловая скорость v_{Tc} «холодной» плазмы определяются как

$$\omega_{pc}^2 = \frac{4\pi n_c e^2}{m}; \quad \lambda_D^2 = \frac{T_c}{4\pi n_c e^2}; \quad v_{Tc}^2 = \frac{2T_c}{m}.$$

Здесь n_c – плотность холодных электронов, $-e$ и m – заряд и масса электрона соответственно, а T_c – температура холодных электронов в энергетических единицах.

Волновое электрическое поле $\mathcal{E}(x, t)$ выражается через векторный потенциал $\mathcal{A}(x, t)$ согласно известному соотношению

$$\mathcal{E}(x, t) = -\frac{1}{c} \frac{\partial \mathcal{A}(x, t)}{\partial t}$$

что подразумевает следующее соотношение между фурье-компонентами соответствующих величин

$$\mathcal{E}(k, \omega) = \frac{i\omega}{c} \mathcal{A}(k, \omega). \quad (4.7)$$

Легко видеть, что если T_c и, следовательно, v_{Tc}^2 не зависят от x (что и предполагается), то второй член в квадратных скобках в (4.5) исчезает. Подставляя (4.7) в (4.5), а затем (4.5) в (4.3), после интегрирования по $dk d\omega$ получаем

$$\frac{\partial^2 \mathcal{A}(x, t)}{\partial t^2} - \frac{3v_{Tc}^2}{2} \frac{\partial^2 \mathcal{A}(x, t)}{\partial x^2} + \omega_{pc}^2(x) \mathcal{A}(x, t) = 4\pi c \delta j_{\text{res}}(x, t), \quad (4.8)$$

где δj_{res} определен в (4.4). Уравнение (4.8) является одним из основных уравнений в дальнейшем рассмотрении.

4.2 Сила неоднородности и самосогласованная система уравнений

Предполагается, что неоднородность плазмы поддерживается потенциальной силой $\mathcal{F}$, происходящей из потенциала $h(x)$:

$$\mathcal{F} = -\frac{dh(x)}{dx}. \quad (4.9)$$

Для определенности принимается, что $h(0) = 0$. Эта сила не зависит от скорости частицы, поэтому она одинаково действует как на холодные, так и на энергичные частицы. Ввиду того, что невозмущенная функция распределения должна зависеть от полной энергии, распределение холодных частиц задается следующим образом

$$f_c \propto \exp \left[-\frac{mv^2/2 + h(x)}{T_c} \right],$$

так что плотность холодной плазмы равна

$$n_c(x) = n_{c0} \exp \left[-\frac{h(x)}{T_c} \right]. \quad (4.10)$$

Дифференцируя (4.10) по x и учитывая (4.9), получим связь между потенциальной силой и градиентом плотности холодной плазмы:

$$\mathcal{F} = \frac{T_c}{n_c} \frac{dn_c}{dx} \equiv \frac{T_c}{\omega_{pc}^2} \frac{d\omega_{pc}^2}{dx},$$

откуда, с учетом соотношения $h(0) = 0$, следует, что

$$h(x) = -T_c \ln \frac{\omega_{pc}^2(x)}{\omega_{pc}^2(0)}. \quad (4.11)$$

Функция распределения холодных электронов обозначается индексом «с», а функция распределения энергичных (резонансных) электронов, как и прежде, f . Невозмущенное распределение энергичных частиц f_0 выбирается в зависимости от рассматриваемой задачи: при обсуждении затухания Ландау используется распределение Больцмана, а при рассмотрении возбуждения и самосогласованной эволюции ленгмюровского спектра – пучковое распределение. В обоих случаях функция распределения будет зависеть от интеграла движения частицы

$$\frac{mv^2}{2} + h(x) + \text{const.}$$

Явный вид функций распределения будет приведен ниже. Следует подчеркнуть, что даже говоря о распределении Больцмана, подразумевается распределение энергичных резонансных частиц. Невозмущенная функция распределения f_0 является одним из начальных условий системы уравнений, описывающих ленгмюровские волны в неоднородной плазме:

$$\frac{\partial^2 \mathcal{A}(x, t)}{\partial t^2} - \frac{3v_{\text{Tc}}^2}{2} \frac{\partial^2 \mathcal{A}(x, t)}{\partial x^2} + \omega_{pc}^2(x) \mathcal{A}(x, t) = -4\pi e c \int_{\Delta v_{\text{res}}} v(f - f_0) dv . \quad (4.12)$$

$$\frac{\partial f}{\partial t} + v \frac{\partial f}{\partial x} + \left(\frac{e}{mc} \frac{\partial \mathcal{A}}{\partial t} + \frac{\mathcal{F}}{m} \right) \frac{\partial f}{\partial v} = 0 .$$

Для этой системы дифференциальных уравнений сохраняется полная энергия w . Эта энергия состоит из двух частей: энергии волны w_{E} и энергии резонансных частиц w_{res} , которая включает их кинетическую и потенциальную энергию:

$$w_{\text{res}} = \int dx \int_{\Delta v_{\text{res}}} \left(\frac{mv^2}{2} + h(x) \right) f dv, \quad (4.13)$$

где интегрирование по пространственной координате x проводится по всей длине системы, а интеграл по скорости v ограничен только резонансным интервалом Δv_{res} . Далее под этой величиной будет пониматься энергия резонансных частиц. Нетрудно видеть, что величина w_{res} отличается от

$$\delta w_{\text{res}} = \int dx \int_{\Delta v_{\text{res}}} \left(\frac{mv^2}{2} + h(x) \right) (f - f_0) dv \quad (4.14)$$

на константу, поскольку f_0 не зависит от времени. Энергия волны или спектра волн, обозначенная выше как w_{E} , задается следующим выражением:

$$w_{\text{E}} = \frac{1}{8\pi c^2} \left[\overline{\left(\frac{\partial \mathcal{A}}{\partial t} \right)^2} + \frac{3v_{\text{Tc}}^2}{2} \overline{\left(\frac{\partial \mathcal{A}}{\partial x} \right)^2} + \overline{\omega_{pc}^2(x) \mathcal{A}^2} \right], \quad (4.15)$$

где черта сверху означает интегрирование по всей длине системы. Подробный вывод закона сохранения для рассматриваемой системы уравнений, который, таким образом, принимает вид

$$w = w_{\text{E}} + \delta w_{\text{res}} = \text{const} \quad (4.16)$$

приведен в Приложении **Б**.

4.3 Безразмерная система уравнений и граничные условия

В численных расчетах используются безразмерные зависимые и независимые переменные. Для их определения вводятся характерная длина l_0 и характерное время τ_0 . Для удобства применяется также характерная скорость

$$v_0 = l_0/\tau_0 ,$$

которая, однако, не является независимой величиной. В определении безразмерных переменных используется также величина $\overline{v_R}$, обозначающая постоянную центральную скорость резонансной области и зависящая от рассматриваемой задачи. Например, при рассмотрении одной волны в неоднородной плазме, в зависимости от задачи, полагается, что $\overline{v_R}$ – это либо средняя фазовая скорость этой волны, либо фазовая скорость при $x = 0$.

Тогда безразмерные независимые переменные определяются следующим образом:

$$X = \frac{x}{l_0}; \quad T = \frac{t}{\tau_0}; \quad U = \frac{v - \overline{v_R}}{v_0} , \quad (4.17)$$

а безразмерные векторный потенциал, сила неоднородности и функция распределения энергичных электронов задаются как

$$A = \frac{e\mathcal{A}}{mcv_0}; \quad g = \frac{\mathcal{F}\tau_0}{mv_0}; \quad F = \frac{4\pi\tau_0^2 e^2 v_0}{m} f . \quad (4.18)$$

В соответствии с определением безразмерных времени и координаты (4.17), безразмерные частота и волновое число определяются как

$$\Omega = \omega\tau_0; \quad K = kl_0 .$$

В новых переменных система уравнений (4.12) принимает вид:

$$\frac{\partial^2 A}{\partial T^2} - \frac{3v_{Te}^2}{2v_0^2} \frac{\partial^2 A}{\partial X^2} + (\omega_{pe}\tau_0)^2 A = - \int_{U_{res}} (\overline{V_R} + U)(F - F_0)dU , \quad (4.19)$$

$$\frac{\partial F}{\partial T} + (\overline{V_R} + U) \frac{\partial F}{\partial X} + \left(\frac{\partial A}{\partial T} + g \right) \frac{\partial F}{\partial U} = 0 ,$$

где $\overline{V_R} = \overline{v_R}/v_0$. Система уравнений (4.19) содержит два независимых безразмерных параметра, которые обозначаются как a и $p(X)$:

$$a = \frac{3v_{Te}^2}{2v_0^2}; \quad p(X) = (\omega_{pe}\tau_0)^2 ,$$

a – константа, а $p(X)$ зависит от координаты из-за неоднородности плазмы. Наконец, (4.19) может быть переписана в виде системы трех дифференциальных уравнений первого порядка по времени T , удобной для численного решения:

$$\begin{aligned}\frac{\partial A}{\partial T} &= E ; \\ \frac{\partial E}{\partial T} &= a \frac{\partial^2 A}{\partial X^2} - p(X)A - \int_{U_{\text{res}}} (\bar{V}_R + U)(F - F_0) dU ; \\ \frac{\partial F}{\partial T} &= -(\bar{V}_R + U) \frac{\partial F}{\partial X} - \left(\frac{\partial A}{\partial T} + g \right) \frac{\partial F}{\partial U} .\end{aligned}\quad (4.20)$$

Первое уравнение в (4.20) является определением функции $E(X, T)$, которая фактически представляет собой безразмерное электрическое поле с противоположным знаком. В работе для моделирования самосогласованной динамики ленгмюровских волн, описываемой уравнениями (4.20), ставится задача Коши [107].

Согласно предположению, что резонансные частицы мало влияют на дисперсионное соотношение волны, последнее имеет вид

$$\Omega^2 = aK^2(X) + p(X) , \quad (4.21)$$

где Ω и K – безразмерные частота и волновое число, определенные выше.

Система уравнений (4.20) решается на пространственном интервале $X = [0, 2\pi L]$, где $L = 1$ в случае однородной плазмы и $L = 10$ в неоднородном случае. Предполагается, что волновые числа в спектре удовлетворяют неравенству $K \gg 1$. Величина $p(X)$, описывающая неоднородность плазмы, выбирается в виде

$$p(X) = p(0)[1 + \delta \sin(X/L)] , \quad (4.22)$$

где параметр δ определяет величину модуляции плотности плазмы. В зависимости от знака δ форма плотности плазмы вдоль координаты X различна. Равенство плотности плазмы на концах интервала $X = [0, 2\pi L]$ позволяет использовать периодические граничные условия в рассматриваемой задаче. Поскольку масштаб неоднородности, связанный с (4.22), равен $2\pi L$ и поскольку $K \gg 1$, квазиклассическое (ВКБ) приближение применимо ко всем волнам в рассматриваемом ленгмюровском спектре.

В ВКБ приближении и при отсутствии резонансного взаимодействия электрическое поле $E = \partial A / \partial T$ и векторный потенциал A могут быть представлены

в следующем виде:

$$E(X, T) = \sum_j \frac{E_{0j}}{\sqrt{K_j(X)/K_j(0)}} \cos \left(\Psi_j(X) - \Omega_j T + \phi_j \right),$$

$$A(X, T) = - \sum_j \frac{E_{0j}}{\Omega_j \sqrt{K_j(X)/K_j(0)}} \sin \left(\Psi_j(X) - \Omega_j T + \phi_j \right),$$
(4.23)

где суммирование проводится по ленгмюровским гармоникам j , E_{0j} – амплитуда волны, ϕ_j – случайная фаза волны, а $\Psi_j(X) \equiv \int_0^X K_j(X') dX'$. Вследствие наложенных периодических граничных условий частота волны Ω_j выбирается так, чтобы выполнялось равенство $\Psi_j(2\pi L) = 2\pi L j$, при этом $K_j(X)$ связан с Ω_j уравнением (4.21). На основе этого представления задаются начальные значения векторного потенциала $A(X, 0)$ и электрического поля $E(X, 0)$ волны, при этом выбирается одна или несколько гармоник j и соответствующие значения E_{0j} и ϕ_j . Следует подчеркнуть, что представления (4.23) используются только для задания начальных значений функций A и E , тогда как при $T > 0$ эти функции определяются из решения системы уравнений (4.20) с периодическими граничными условиями.

В дополнение к периодическим граничным условиям по координате X , необходимо задать граничные условия для функции распределения на границах области интегрирования по скорости U . В соответствии с вышеописанным подходом к задаче, предполагается, что на этих границах функция распределения равна невозмущенной. Это вытекает из следующих предположений, которые считаются выполненными:

- В нерезонансной области справедливо линейное приближение для функции распределения.
- Дисперсионные характеристики волны определяются нерезонансными частицами, которые не влияют на рост или затухание волны, поскольку фазовый сдвиг между током нерезонансных частиц и электрическим полем волны приводит к тому, что среднее значение их скалярного произведения равно нулю.
- Рост или затухание волны связан только с резонансными частицами, которые создают ток в фазе (или в противофазе) с электрическим полем. Резонансный ток, ортогональный электрическому полю, незначителен по сравнению с током нерезонансных частиц, и, следовательно, резонансные частицы не влияют на дисперсионные характеристики волны.

Уравнение для функции распределения (третье уравнение в системе (4.20)) при фиксированных значениях X и U рассматривается как обыкновенное дифференциальное уравнение по времени и численно интегрируется методом Рунге–Кутты четвертого порядка. Для решения первых двух уравнений системы (4.20), описывающих эволюцию функций A и E , используется численная схема второго порядка точности: значение функции в момент времени $T + dT$ определяется с помощью производной, вычисленной на промежуточном слое $T + dT/2$. При этом плотность тока берется на этом промежуточном слое и рассчитывается через функцию распределения. Вторая производная по координате X от функции A в правой части уравнения для E аппроксимируется пятиточечным выражением, учитывающим периодичность функции A по X .

В пространстве (X, U) используется равномерная сетка, где N_X – общее число узлов сетки по направлению X , а N_U – число узлов по направлению U . Диапазон скоростей симметричен относительно нуля и охватывает значения от $U_{\min}$ до $U_{\max}$, при этом $U_{\min} = -U_{\max}$. Шаг по времени вычисляется как $dT = T_{\max}/N_T$, где $T_{\max}$ – безразмерное максимальное время расчета, а N_T – число дискретных временных шагов.

4.4 Невозмущенная функция распределения энергичных электронов

Линейное затухание Ландау в однородной плазме, открытое в 1946 году [18], является одним из фундаментальных результатов физики плазмы. Как показал Ландау, линейная скорость затухания устанавливается на достаточно больших временах, которые явно не определены. Позднее О’Нил [22] рассмотрел новый режим затухания ленгмюровских волн, который, в некотором смысле, противоположен рассмотренному Ландау. В рассмотрении О’Нила появляется новый фундаментальный параметр – нелинейное время $\tau_{\text{NL}} = (m/e|E|k)^{1/2}$, где $|E|$ – амплитуда волны. Общепринято, что затухание Ландау реализуется при $\gamma_L \tau_{\text{NL}} \gg 1$, тогда как теория О’Нила применима при $\gamma_L \tau_{\text{NL}} \ll 1$, где γ_L – линейный инкремент. При моделировании затухания Ландау будет использоваться невозмущенная функция распределения энергичных электронов в виде

распределения Больцмана:

$$f_0 = \frac{n_h}{\sqrt{\pi}v_T} \exp \left(-\frac{2h(x)}{mv_T^2} - \frac{v^2}{v_T^2} \right), \quad (4.24)$$

где v_T – тепловая скорость энергичных частиц, а n_h – характерная плотность энергичных электронов, точнее, плотность энергичных электронов в точке $x = 0$, где $h(x) = 0$. Переходя к безразмерным переменным (4.17), (4.18), можно переписать (4.24) в виде

$$F_0 = \frac{\omega_{ph}^2 \tau_0^2}{\sqrt{\pi}V_T} \exp \left[-\frac{2H(x)}{V_T^2} - \frac{(\bar{V}_R + U)^2}{V_T^2} \right], \quad (4.25)$$

где введены следующие параметры (последние два – безразмерные):

$$\omega_{ph}^2 = \frac{4\pi n_h e^2}{m}; \quad V_T = \frac{v_T}{v_0}; \quad H(x) = \frac{h(x)}{mv_0^2}, \quad (4.26)$$

$\bar{V}_R = \bar{v}_R/v_0$, как и ранее, и все величины без индекса «с» относятся к энергичным резонансным частицам. Случаю однородной плазмы соответствует $H(x) \equiv 0$.

В присутствии пучка, центрированного на скорости v_b (безразмерная скорость пучка $V_b = v_b/v_0$), безразмерная функция распределения имеет вид

$$F_{0b} = \frac{\omega_{ph}^2 \tau_0^2}{\sqrt{\pi}V_T} \exp \left[-\frac{(H/\bar{V}_R + U + \bar{V}_R - V_b)^2}{V_T^2} \right]. \quad (4.27)$$

В отсутствие пучка (4.27) переходит в (4.25), если выполняются предполагаемые неравенства $U \ll \bar{V}_R$, $H/\bar{V}_R \ll \bar{V}_R$. В однородной плазме (4.27) соответствует обычному гауссовскому пучку, центрированному на V_b с тепловым разбросом V_T (в безразмерных скоростях).

4.5 Результаты моделирования

Значения размерных характерных величин $l_0 = 125$ м, $\tau_0 = 5 \times 10^{-5}$ с устанавливаются одинаковыми для всех расчетов. Параметры, связанные с компонентой холодных электронов, сохраняются постоянными для первых 9 расчетов: $a = 0.96$ и $p(0) = 400$. В 10-м расчете значение a уменьшается примерно до 0.11, при этом $p(0) = 400$ остается неизменным. Начальные амплитуды

Таблица 1 — Безразмерные параметры моделирования для Расчетов №1–10

Расчет №	E_{0j}	j	δ	$\overline{V_R}$	V_B	V_T	n_h/n_{c0}	T_{MAX}	N_T	L	N_X	U_{MAX}	N_U
1	0.014	8	0	2.685	0	4	0.04	15	10001	1	997	1.1	2001
2	0.273	8	0	2.685	0	4	0.04	25	25001	1	1000	1.5	2001
3	0.273	8	0.05	2.670	0	4	0.04	25	10001	10	9997	1.5	2001
4	2.9×10^{-3}	8	0	2.685	3	0.8	0.0025	35	30001	1	1000	1.5	1501
5	2.9×10^{-3}	8	0.025	2.681	3	0.8	0.001	25	24001	10	9997	1.5	1001
6	В тексте	6:10	0	2.767	0	4	0.04	30	30001	1	1000	1.5	2001
7	В тексте	6:10	0.025	2.761	0	4	0.04	30	20001	10	9997	1.5	2001
8	В тексте	6:10	0	2.767	3	0.8	0.0012	40	40001	1	1000	1.5	2001
9	В тексте	6:10	0.02	2.777	3	0.8	0.0025	20	30001	10	10000	1.5	1001
10	В тексте	16:20	0	1.165	1.5	0.53	0.01	2.67	80001	1	1000	1.0	2001

волн E_{0j} , ленгмюровские гармоники j , величина неоднородности δ , параметры невозмущенной функции распределения резонансных частиц, а также параметры временной сетки и сетки по координате-скорости приведены в Таблице 1. Результаты численного моделирования для 10 расчетов представлены на рисунках ниже.

Результаты численного моделирования эволюции одной волны малой амплитуды в устойчивой однородной плазме (Расчет №1) показаны на рис. 4.1. На рис. 4.1(а) представлена невозмущенная функция распределения резонансных электронов в зависимости от безразмерной скорости V . Резонансная область в пространстве скоростей, в которой проводится вычисление эволюции функции распределения, ограничена красными пунктирными вертикальными линиями. Следует отметить, что используемый в работе подход позволяет вычислять функцию распределения исключительно в резонансной области, при этом на границах данной области функция распределения F принимается равной исходной невозмущенной функции распределения F_0 . На рис. 4.1(б) представлены данные о безразмерном волновом поле $E(X, T)$ как функции пространственной координаты X . Для наглядности на одной панели показаны значения для начального (синий цвет) и конечного (оранжевый цвет) моментов времени с использованием двух различных шкал по оси y . Анализ полученных результатов показывает, что, несмотря на существенное затухание амплитуды волны, ее пространственная структура сохраняет строго синусоидальный характер на всем времени моделирования.

Разность между конечной и начальной функциями распределения, $\delta F = F(T_{MAX}, X, U) - F_0(X, U)$, на плоскости (X, U) представлена на рис. 4.1(с). Дан-

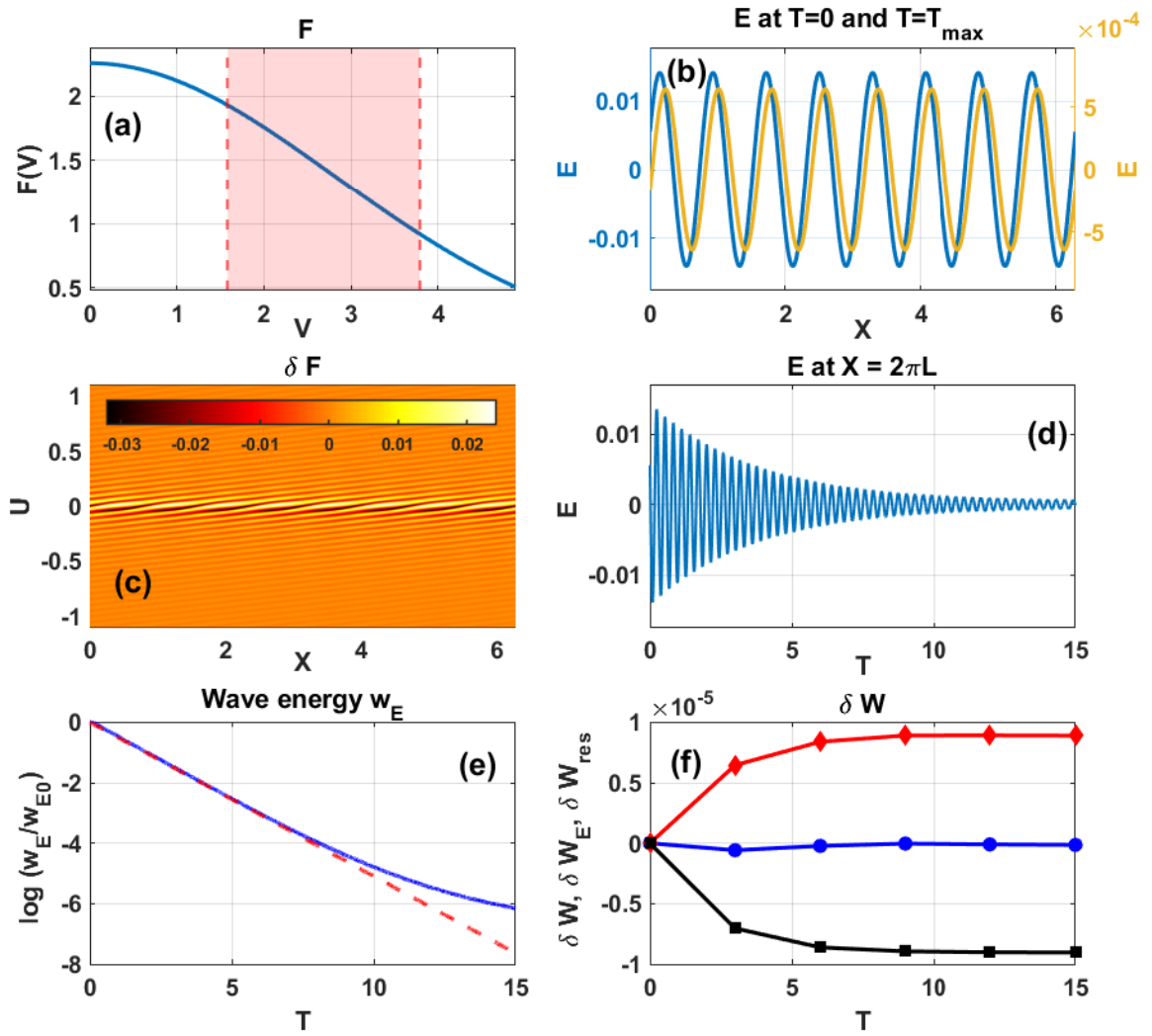


Рисунок 4.1 — Расчет №1. Результаты моделирования для случая одной волны с малой начальной амплитудой в однородной устойчивой плазме. (а) Начальная функция распределения F в зависимости от скорости V . Интервал скоростей, в котором проводятся численные вычисления, выделен красным. (б) Безразмерное электрическое поле E в зависимости от координаты X в начальный (синий) и конечный (оранжевый) моменты времени. (с) Конечное изменение функции распределения F на плоскости (X, U) . (д) Временная эволюция безразмерного поля E в точке $X = 2\pi L$. (е) Натуральный логарифм энергии волны w_E в зависимости от безразмерного времени T . (ф) Относительные изменения полной энергии δW (синие круги), энергии резонансных частиц δW_{res} (красные ромбы) и энергии волны δW_E (черные квадраты) в несколько моментов времени.

ная структура эволюционирует во времени и при малых значениях T хорошо воспроизводится выражением, полученным в рамках линейного приближения:

$$\delta F = \beta \frac{\partial F_0}{\partial U} \left[\frac{\sin(KX - \Omega T)(1 - \cos(KUT))}{KU} + \frac{\cos(KX - \Omega T) \sin(KUT)}{KU} \right], \quad (4.28)$$

где предполагается, что при малых T волновое поле задается соотношением $E(X, T) = -\beta \cos(KX - \Omega T)$. Поскольку величина δF может быть как положительной, так и отрицательной, постоянный множитель $\beta \partial F_0 / \partial U$ не влияет на качественный вид структуры. На рис. 4.1(d) представлена временная эволюция волнового поля E при $X = 2\pi L$. В данной точке волновое поле осциллирует с частотой Ω , что сопровождается экспоненциальным затуханием амплитуды. Натуральный логарифм энергии волны w_E (см. формулу (4.15)) приведен на рис. 4.1(e) в зависимости от времени T . Красная пунктирная линия иллюстрирует эволюцию энергии волны согласно линейной теории Ландау. Несовпадение между результатами численного моделирования и теоретическим предсказанием объясняется накоплением вычислительных ошибок, связанных с малой амплитудой волны.

В настоящем исследовании относительное изменение полной энергии во времени T определяется следующим образом:

$$\delta W(T) = \frac{w(T) - w(0)}{w(0)}, \quad (4.29)$$

где $w(T)$ – полная энергия системы в момент времени T , а $w(0)$ – ее начальное значение. Аналогично, относительное изменение энергии волны вычисляется по формуле:

$$\delta W_E(T) = \frac{w_E(T) - w_E(0)}{w(0)}, \quad (4.30)$$

а относительное изменение энергии резонансных частиц определяется как:

$$\delta W_{\text{res}}(T) = \frac{w_{\text{res}}(T) - w_{\text{res}}(0)}{w(0)} = \frac{\delta w_{\text{res}}(T)}{w(0)}. \quad (4.31)$$

Следует отметить, что все три вариации энергии нормированы на начальное значение полной энергии $w(0)$. По определению между этими величинами выполняется соотношение $\delta W = \delta W_E + \delta W_{\text{res}}$. При этом для вычисления энергии резонансных частиц w_{res} требуется знание функции распределения F в фазовом пространстве (X, U) . С целью оптимизации использования памяти в ходе

вычислений сохраняются только отдельные срезы $F(X, U)$, соответствующие определенным моментам времени. Значения δW (синие круги), δW_{res} (красные ромбы) и δW_E (черные квадраты) представлены на рис. 4.1(f) для указанных моментов времени, что позволяет проследить динамику изменения энергии в системе. Сохранение полной энергии w рассматривается в качестве основного критерия точности численного расчета. Вариация полной энергии δW оказывается значительно меньшей по сравнению с изменениями энергии волны δW_E и энергии резонансных частиц δW_{res} , вследствие чего она практически неразличима на графиках. В связи с этим для всех расчетов дополнительно указывается максимальное отклонение $|\delta W|$ в тексте. Сравнение этого значения с величинами δW_E и δW_{res} позволяет оценить точность вычислений в каждом конкретном случае. Характерной особенностью рассматриваемой системы является то, что основная часть полной энергии сосредоточена в энергии резонансных частиц. В результате энергия волны может испытывать значительные колебания, изменяясь на несколько порядков, тогда как энергия частиц остается практически постоянной. Полученные результаты для Расчета №1 показывают, что затухание волны сопровождалось увеличением энергии резонансных частиц, при этом полная энергия системы сохранялась с точностью $|\delta W| < 6 \times 10^{-7}$.

Величины, представленные на соответствующих панелях рис. 4.2 (Расчет №2), аналогичны тем, что показаны на рис. 4.1, однако относятся к случаю волны большой начальной амплитуды в устойчивой однородной плазме. В этом случае нелинейное затухание ленгмюровской волны преимущественно описывается теорией О'Нила [22]. При этом в резонансной области наблюдается иная структура функции распределения. Колебания резонансных частиц и фазовое перемешивание приводят к затухающим во времени колебаниям амплитуды волны. Этот эффект был впервые отмечен в работах [108; 109] и получил окончательное теоретическое объяснение в статье О'Нила [22]. Структуры, формирующиеся в фазовом пространстве и наблюдаемые на рис. 4.2(с) в конечный момент времени $T = T_{\text{MAX}}$, в дальнейшем будут называться вихрями.

Вариация энергии волны, представленная на рис. 4.2(е), демонстрирует хорошее согласие между теоретическими предсказаниями и результатами численного моделирования. В однородной плазме инкремент монохроматической ленгмюровской волны остается практически линейным при $t/\tau_{\text{NL}} \ll 1$. Красная пунктирная линия, отображающая изменение энергии волны с линейным инкрементом, совпадает с результатами моделирования в течение первых

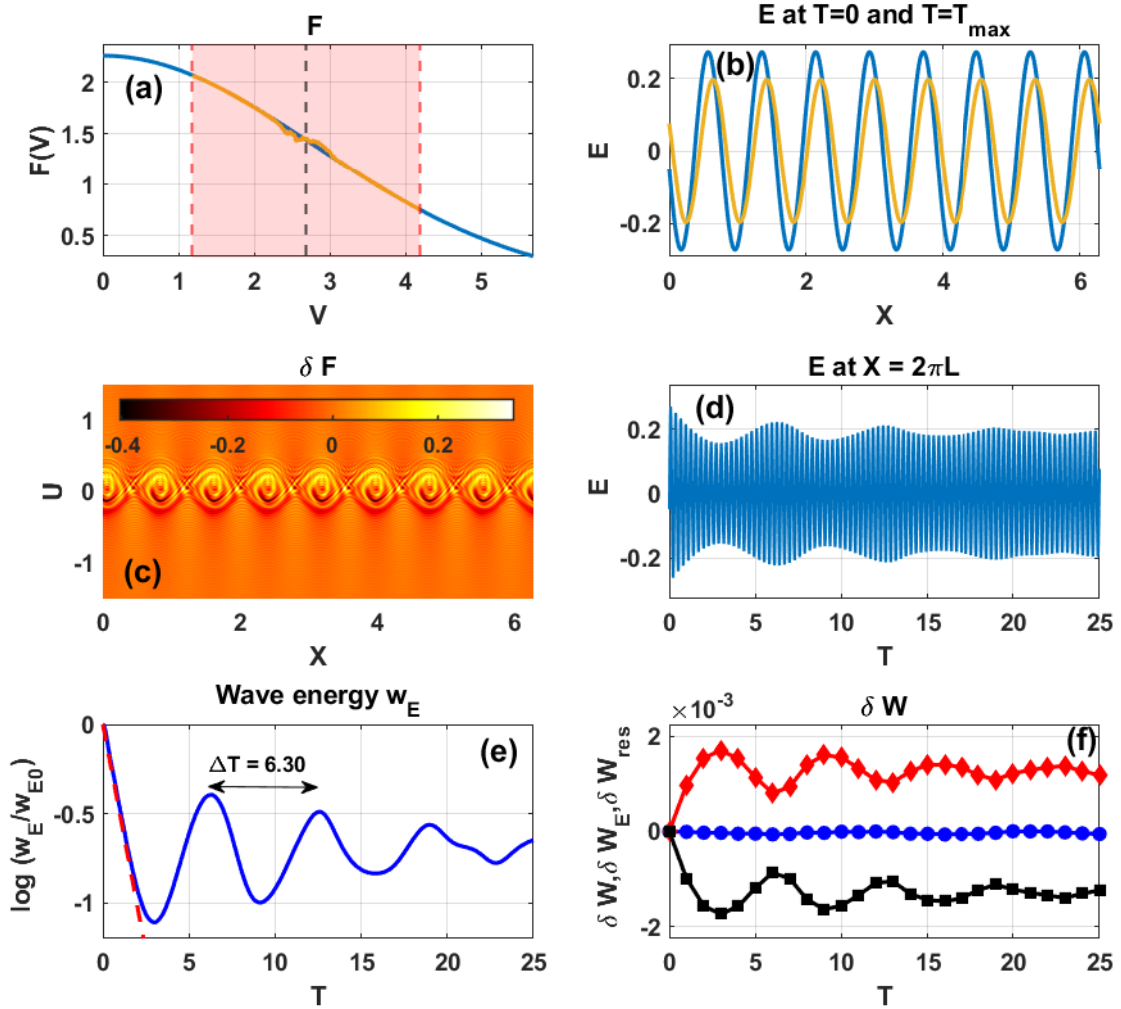


Рисунок 4.2 — Расчет №2. Результаты моделирования, проведенного для случая одной волны с большой начальной амплитудой в однородной устойчивой плазме. (а) Начальная (синий) и пространственно усредненная конечная (оранжевый) функция распределения F в зависимости от скорости V . Вертикальная черная пунктирная линия указывает на резонансную скорость. На других панелях показаны те же физические величины, что и на соответствующих панелях рисунка 4.1, но для параметров Расчета №2 из Таблицы 1.

трех единиц безразмерного времени. Однако при дальнейшем увеличении t/τ_{NL} инкремент волны приобретает осциллирующий характер. Период осцилляций энергии волны, обозначенный двойной стрелкой на панели (е), составляет примерно $\Delta T \simeq 6.30$. Этот период близок к периоду колебаний захваченной частицы, находящейся на дне потенциальной ямы, который пропорционален нелинейному времени и оценивается как $2\pi T_{\text{NL}} \sim 5.1$ ($T_{\text{NL}} = \tau_{\text{NL}}/\tau_0$ – безразмерное нелинейное время).

Пространственно усредненная конечная функция распределения F , показанная оранжевым цветом, была добавлена на рис. 4.2(а). Ясно видно, что вблизи резонансной скорости V_R (отмеченной вертикальной черной пунктирной линией) формируется структура, напоминающая плато. Ширина этого плато количественно оценивается выражением $\Delta U \sim 4/K_j T_{\text{NL}}$. Данные по волновому полю, приведенные на рис. 4.2(b) и 4.2(d), показывают, что амплитудные вариации невелики, и волна сохраняет синусоидальную форму на протяжении всей симуляции. Из рис. 4.2(f) следует, что увеличение (уменьшение) энергии волны δW_E сопровождается соответственно уменьшением (увеличением) энергии резонансных частиц δW_{res} , благодаря чему полная энергия системы остается практически постоянной. Относительное изменение полной энергии системы весьма мало и не превышает $|\delta W| < 7 \times 10^{-5}$, в то время как $|\delta W_E|$ достигает почти $\sim 2 \times 10^{-3}$. Данные результаты свидетельствуют об эффективности механизма обмена энергией между волной и частицами, при этом полная энергия системы сохраняется с высокой точностью.

Величины, представленные на различных панелях рис. 4.3 (Расчет №3), аналогичны тем, что показаны на соответствующих панелях рис. 4.2, однако в данном случае они соответствуют случаю с устойчивой функцией распределения, большой начальной амплитудой волны и пространственно неоднородной плазмой с $\delta = 0.05$. В этих условиях нелинейный инкремент ленгмюровской волны, который во втором расчете в основном определялся теоретическим предсказанием [22], проявляет иное поведение. Как видно из рис. 4.3(е), энергия волны в целом убывает, и переход к колебательному режиму, характерному для однородной плазмы, не наблюдается. Тем не менее, вблизи момента времени $T = 10$ наблюдается небольшое увеличение w_E .

Разность между конечной и начальной функциями распределения, представленная на рис. 4.3(с), также существенно отличается от случая однородной плазмы. Анализ показывает, что формирование вихревых структур в фазо-

вом пространстве непосредственно связано с нелинейной динамикой и фазовым захватом частиц. Фазовый захват частицы реализуется, когда ее скорость становится равной фазовой скорости волны, зависящей от пространственной координаты. Согласно определению (4.17), это соответствует безразмерной скорости $U_R = V_R(X) - \bar{V}_R$. Данный процесс возможен только при достаточно большой амплитуде волны и отсутствии существенного градиента фазовой скорости, препятствующего захвату. После выхода из резонансной области частицы движутся вдоль линии $U \simeq \text{const}$ в фазовом пространстве, что приводит к длительному сохранению вихревых структур в представлении $\delta F(X, U)$. Благодаря периодическим граничным условиям эти вихри, спустя определенное время, достигают конца пространственного интервала и вновь появляются в точке $X = 0$, сохраняя свою скорость U .

Сложная структура финального распределения $\delta F(X, U)$ также обусловлена тем, что амплитуда волны, играющая ключевую роль в нелинейной динамике, изменяется неравномерно из-за пространственной зависимости инкремента волны. Это хорошо иллюстрируется на рис. 4.3(b), где финальный профиль волнового поля $E(X, T_{\text{MAX}})$ (оранжевый цвет) существенно отличается от начального квазисинусоидального профиля (синий цвет). Например, вблизи $X \sim 3$ амплитуда поля значительно превышает значения в области $30 < X < 55$. Кроме того, на рис. 4.3(d) сравнивается временная эволюция волнового поля в точках $X = \pi L$ (оранжевый) и $X = 2\pi L$ (синий), что позволяет выявить различия в изменении волнового поля в различных областях пространства при наличии неоднородности плазмы. Изменение полной энергии системы не превышало $|\delta W| < 7 \times 10^{-5}$, что примерно на порядок меньше максимального изменения энергии волны $|\delta W_E| \sim 2.5 \times 10^{-3}$ (см. рис. 4.3(f)).

Результаты численного моделирования для случая невозмущенной функции распределения пучкового типа в однородной плазме представлены на рис. 4.4 (Расчет №4). На верхней левой панели показана усредненная по пространству функция распределения в зависимости от скорости $U = V - \bar{V}_R$: начальная функция изображена синим цветом, а конечная – оранжевым. На основании данных, представленных на рис. 4.4(a), следует, что основные изменения функции распределения наблюдаются в области $U = 0$. Это указывает на то, что эволюция функции распределения преимущественно обусловлена динамикой резонансных частиц, скорость которых близка к резонансному значению $V \simeq \bar{V}_R$. Остальные панели отображают величины, аналогичные рассмот-

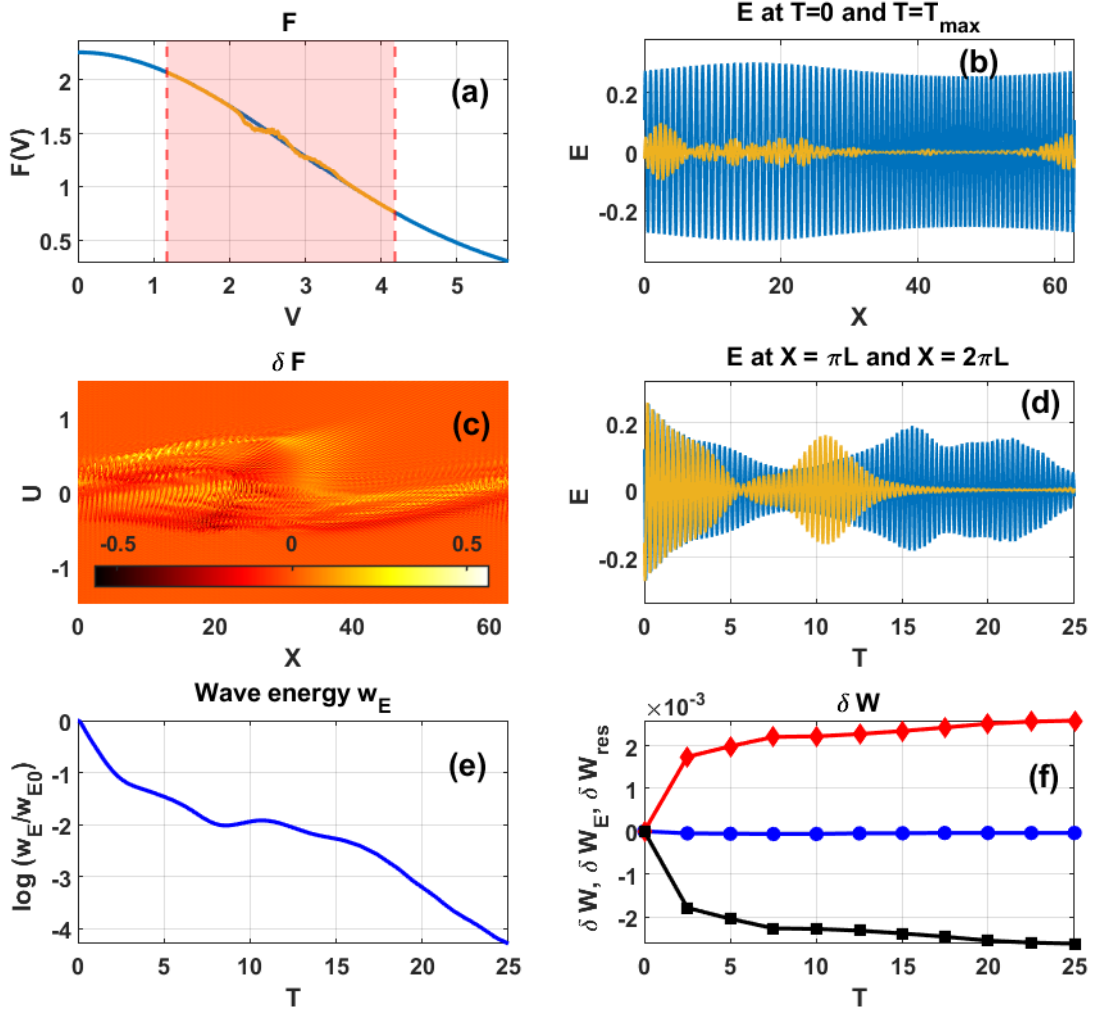


Рисунок 4.3 — Расчет №3. Результаты моделирования, проведенного для случая с одной волной большой начальной амплитуды в неоднородной устойчивой плазме. (а) Пространственно усредненная начальная (синий) и конечная (оранжевый) функция распределения F в зависимости от скорости V . (д) Временная эволюция безразмерного поля E в точках $X = \pi L$ (оранжевый) и $X = 2\pi L$ (синий). На других панелях показаны те же физические величины, что и на соответствующих панелях рисунка 4.1, но для параметров Расчета №3 из Таблицы 1. Обратите внимание на в 10 раз больший пространственный масштаб расчетов в неоднородном случае по сравнению с однородным.

ренным в предыдущих случаях. Для выбранной волновой гармонике $j = 8$ резонансная скорость $V_R < V_b$ находится в области положительной производной функции распределения по скорости ($\partial F_0 / \partial V > 0$). Это приводит к положительному инкременту волны и, соответственно, к ее усилению, по крайней мере на начальном этапе моделирования. На рис. 4.4(е) видно, что в течение первых 15 единиц безразмерного времени энергия волны возрастает с практически постоянным инкрементом. Именно к этому времени в фазовом пространстве окончательно формируются вихревые структуры. По завершении этого этапа происходит фазовое перемешивание функции распределения частиц в резонансной области, что приводит к переходу энергии волны в режим О'Нила с характерными колебаниями вокруг постоянного значения. На рис. 4.4(с) представлены вихри, наблюдаемые в конечный момент времени $T = T_{\text{МАХ}}$. В течение всего расчета электрическое поле волны сохраняет синусоидальную форму с волновым числом $K = 8$ (см. рис. 4.4(б)). Максимальное отклонение полной энергии в ходе моделирования не превышает $|\delta W| < 3 \times 10^{-5}$.

Панели на рис. 4.5 (Расчет №5) представляют результаты моделирования для случая неустойчивой функции распределения в пространственно неоднородной плазме. В отличие от однородного случая энергия волны демонстрирует устойчивый положительный рост на протяжении всего расчетного интервала (25 безразмерных единиц времени) и не переходит в колебательный режим. Данное поведение может быть обусловлено двумя основными причинами. Во-первых, в рассматриваемом моделировании используется меньшая плотность энергичных частиц $n_h / n_{c0} = 0.001$ (по сравнению с 0.0025 в Расчете №4), что приводит к снижению инкремента волны и замедлению роста ее энергии. Во-вторых, пространственная неоднородность плазмы приводит к увеличению эффективной ширины резонанса в фазовом пространстве. Для выбранной гармонике $j = 8$ в неустойчивой функции распределения электронов содержится большой запас свободной энергии для накачки волны, который не реализуется полностью в течение рассматриваемого временного интервала. Что касается пространственной структуры электрического поля, данные на рис. 4.5(б) демонстрируют существенные отличия по сравнению с однородным случаем. В частности, пониженное значение амплитуды волнового поля в области $X = 20\text{--}30$ непосредственно связано с пространственной неоднородностью плазмы. Дополнительные расчеты (не приведенные в данной работе) показывают, что это уменьшение становится более выраженным при увеличении параметра δ .

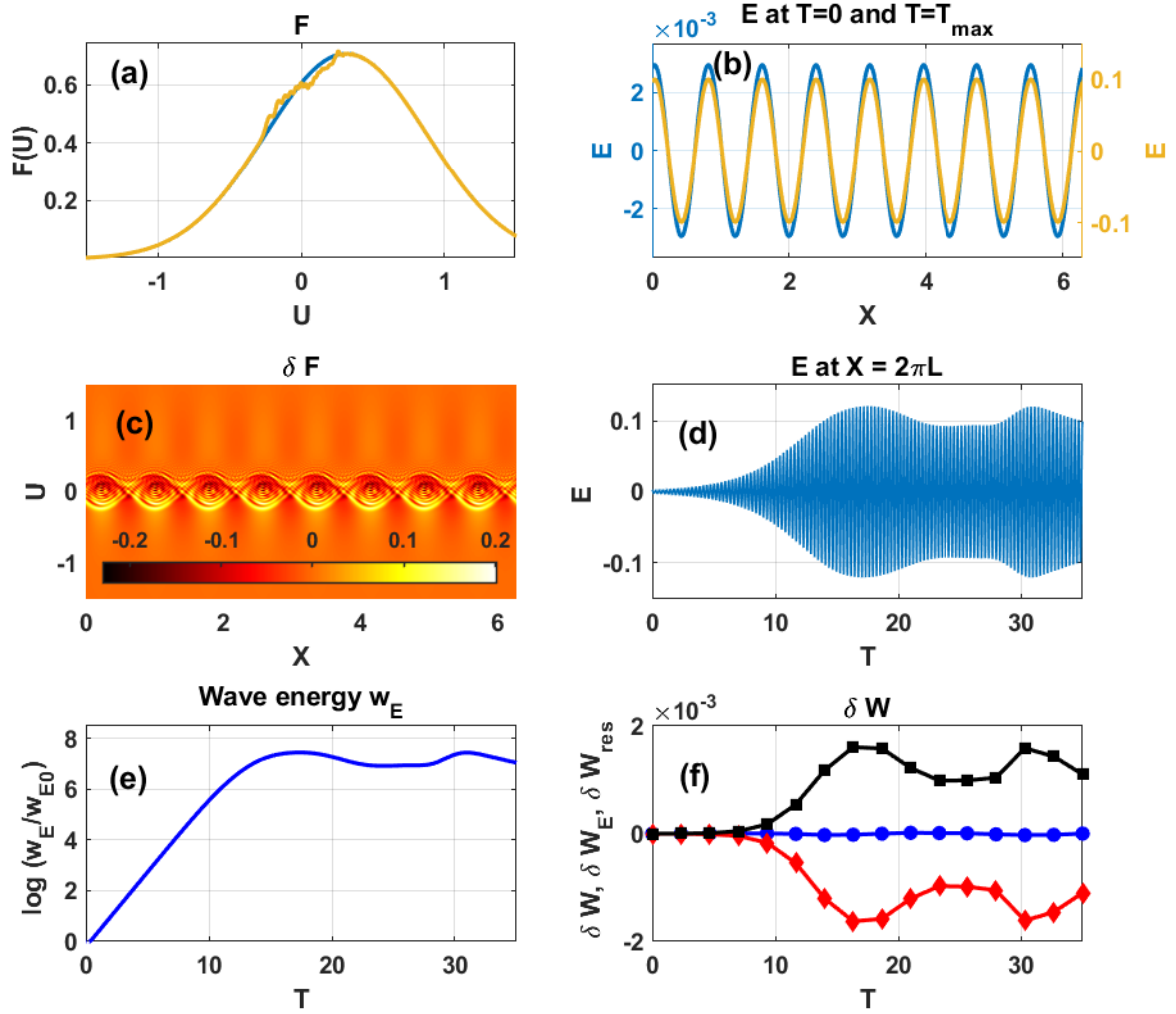


Рисунок 4.4 — Расчет №4. Результаты моделирования, проведенного для случая с одной волной в однородной неустойчивой плазме. (а) Начальная (синий) и усредненная по пространству конечная (оранжевый) функция распределения F в зависимости от скорости U . На других панелях показаны те же физические величины, что и на соответствующих панелях рисунка 4.1, но для параметров Расчета №4 из Таблицы 1.

Это может объясняться следующим образом. В неоднородной плазме резонансная скорость зависит от координаты X . Для случая $j = 8$ и $\delta = 0.025$ эта зависимость представлена на рис. 4.6. Резонансная скорость достигает максимального значения, примерно 2.9, в области $X = 10$ –20. В этой области производная функции распределения по скорости, $\partial F_0/\partial V$, мала вследствие близости резонансной скорости к центральной скорости пучка $V_b = 3$. Это приводит к малому значению локального инкремента волны, так как он пропорционален $\partial F_0/\partial V$. Смещение области пониженной амплитуды из $X = 10$ –20 в $X = 20$ –30 объясняется переносом амплитуды волны с групповой скоростью V_g , которая может быть оценена как

$$V_g = \frac{\partial \Omega}{\partial K} = \frac{aK}{\Omega} \sim \frac{0.96 \times 8.01}{21.5} \sim 0.358, \quad (4.32)$$

что за все расчетное время T_{MAX} соответствует переносу на расстояние

$$\Delta L = V_g T_{\text{MAX}} \sim 8.95. \quad (4.33)$$

Описанный механизм показывает, что характерный размер модуляции поля должен коррелировать с масштабом неоднородности плазмы. Вследствие пространственной неоднородности плазмы вихревые структуры на графике, отображающем конечное изменение функции распределения на плоскости (X, U) , располагаются при различных U (см. рис. 4.5(с)). При этом вихри еще не достигли полностью развитого состояния. Относительное отклонение полной энергии от начального значения не превысило $|\delta W| < 2 \times 10^{-6}$.

В следующих пяти расчетах в качестве начальных условий для электрического поля использовался широкий спектр ленгмюровских волн. В каждом случае рассматривались пять волн, характеризующихся Ω_j и K_j (с гармониками $j = 6$ –10 для Расчетов №6–9 и $j = 16$ –20 для Расчета №10). Начальные амплитуды E_{0j} , соответствующие этим гармоникам, определялись следующим образом. В Расчеты №6, 7 и 10 амплитуда для каждой гармоники была одинаковой и составляла $E_{0j} = 0.05$, тогда как в Расчеты №8 и 9 амплитуды выбирались случайным образом и имели малые значения $E_{0j} \sim 10^{-4}$. Физические величины, представленные на панелях следующих рисунков, аналогичны тем, что приводились для случая одной волны, за исключением верхней левой панели, на которой резонансные скорости для каждой гармоники отмечены вертикальными черными пунктирными линиями. Для неоднородной плазмы приводятся значения резонансных скоростей, усредненных по пространственной области.

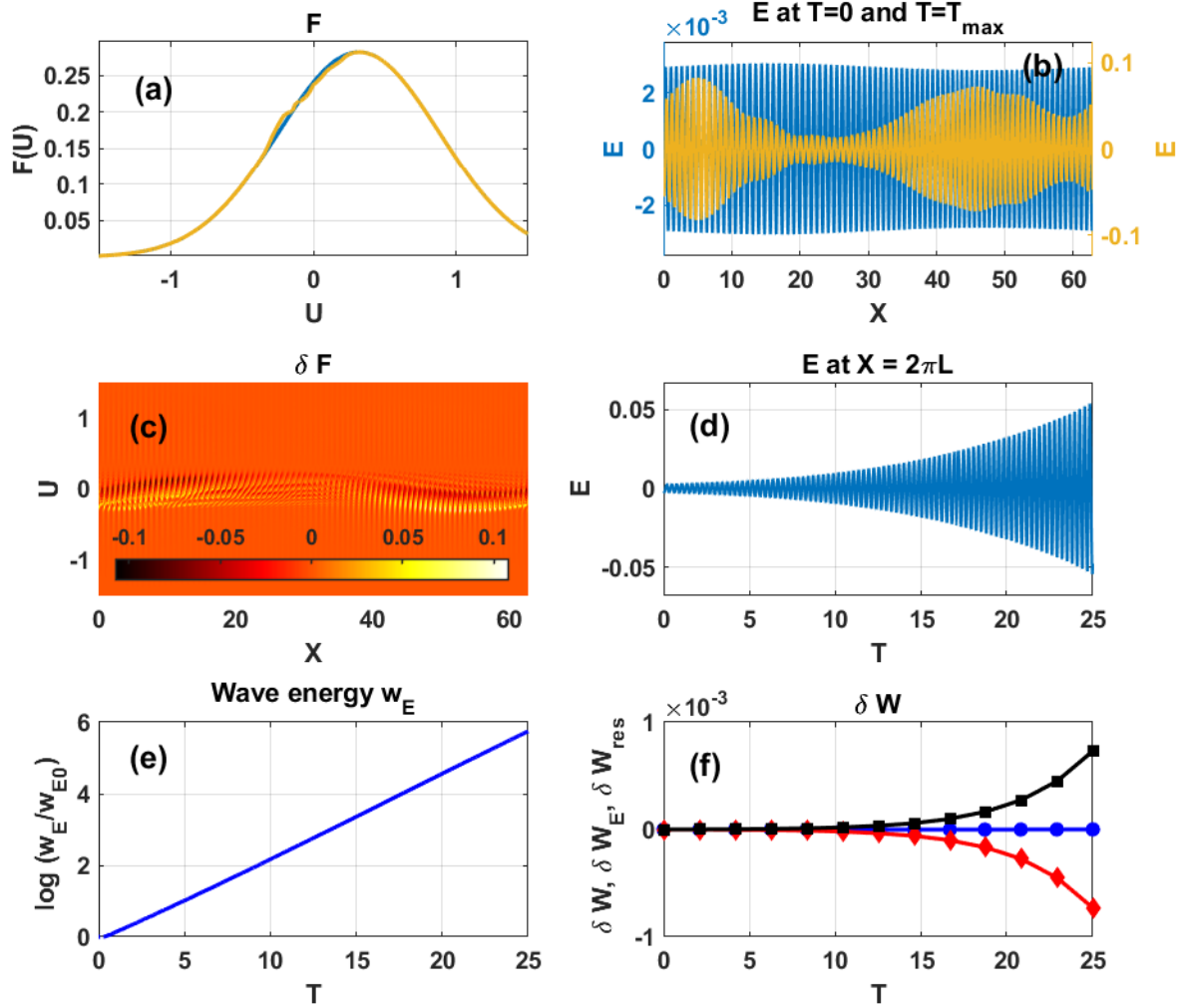


Рисунок 4.5 — Расчет №5. Результаты моделирования, проведенного для случая с одной волной в неоднородной неустойчивой плазме. (а) Пространственно усредненная начальная (синий) и конечная (оранжевый) функция распределения F в зависимости от скорости U . На других панелях показаны те же физические величины, что и на соответствующих панелях рисунка 4.1, но для параметров Расчета №5 из Таблицы 1.

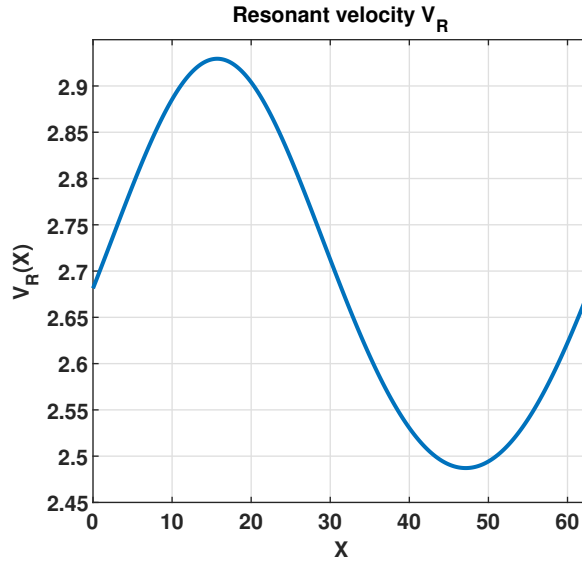


Рисунок 4.6 — Резонансная скорость $V_R(X)$ для Расчета №5 с параметрами $j = 8$ и $\delta = 0.025$.

В Расчете №6 (рис. 4.7) исследовался случай однородной плазмы с устойчивой функцией распределения и большими начальными амплитудами волн. В ходе моделирования вблизи резонансных скоростей, соответствующих выбранным гармоникам j , формировались вихревые структуры. Следует подчеркнуть, что несмотря на наличие нескольких волн, в данном случае не реализуется сценарий, описываемый квазилинейным приближением, поскольку эволюция системы включает захват частиц в потенциальные ямы отдельных гармоник волнового спектра. Исключение составляют гармоники $j = 9$ и $j = 10$, для которых наблюдается начало смешивания вихревых структур, что видно на рис. 4.7(с), где представлено конечное распределение $\delta F(X, U)$. Как показано на рис. 4.7(е), после начальной фазы линейного затухания, продолжавшейся первые 5 единиц безразмерного времени, энергия ленгмюровского спектра w_E начинает осциллировать, аналогично случаю одной волны (Расчет №2).

В случаях с одной волной и однородной плазмой (Расчеты №1, 2 и 4) наблюдается, что временная эволюция амплитуды колебаний электрического поля в фиксированной точке X повторяет временное изменение энергии волны $w_E(T)$ (см. рис. 4.1, 4.2, 4.4(d) и рис. 4.1, 4.2, 4.4(e)). Это связано с сохранением синусоидального характера поля волны на протяжении всего расчета. Напротив, в случае широкого спектра волн подобная корреляция не проявляется даже в однородной плазме. В данном расчете наблюдаются различные временные изменения электрического поля в различных точках пространства, что показано на рис. 4.7(d), где сравнивается эволюция $E(X, T)$ в точках $X = \pi L$ (оранже-

вый цвет) и $X = 2\pi L$ (синий цвет). Полная энергия системы сохраняется с точностью $|\delta W| < 2 \times 10^{-5}$.

Результаты моделирования для случая неоднородной устойчивой плазмы с большими начальными амплитудами волн представлены на рис. 4.8 (Расчет №7). Как видно из рис. 4.8(е), энергия спектра волн w_E на начальном этапе демонстрирует затухание с практически постоянным декрементом. Последующая динамика существенно отличается от случая однородной плазмы, где энергия волн переходит в колебательный режим. В неоднородной плазме энергия спектра волн стабилизируется на постоянном уровне в интервале от 10 до 20 единиц безразмерного времени, после чего вновь наблюдается ее затухание. Разность между начальной и конечной функциями распределения показана на рис. 4.8(с). Вихревые структуры, связанные с захваченными по фазе частицами, наблюдаются при различных значениях скорости U . Это обусловлено как наличием широкого спектра с пятью различными резонансными скоростями V_{Rj} , так и пространственной неоднородностью плазмы. Следует отметить, что, несмотря на сохранение полной энергии системы с точностью $|\delta W| < 2 \times 10^{-4}$, данное отклонение составляет почти 50% от изменения энергии частиц $|\delta W_{\text{res}}|$ или энергии спектра волн $|\delta W_E|$.

Исследование, проведенное в Расчете №8, относится к однородной плазме с неустойчивой функцией распределения (результаты представлены на рис. 4.9). Резонансные скорости, соответствующие выбранным гармоникам, расположены по обе стороны от максимума пучковой функции распределения. В частности, для гармоник $j = 8-10$ резонансные скорости находятся в области положительной производной функции распределения ($\partial F_0 / \partial V > 0$), что приводит к положительному инкременту для этих волн. Численные результаты показывают, что энергия спектра волн существенно увеличилась, а амплитуда поля возросла примерно на два порядка величины. На начальном этапе возмущения функции распределения в фазовом пространстве были малы и наблюдались как в области положительных, так и отрицательных скоростей U . Однако вследствие положительного инкремента для гармоник $j = 8-10$ они начали доминировать над гармониками $j = 6-7$, что привело к значительным изменениям функции распределения преимущественно при отрицательных значениях U . Усредненная по пространству конечная функция распределения (оранжевая линия на рис. 4.9(а)) демонстрирует формирование горизонтальных плато для гармоник $j = 8$ и 9 , в то время как вблизи резонансной скорости, соответ-

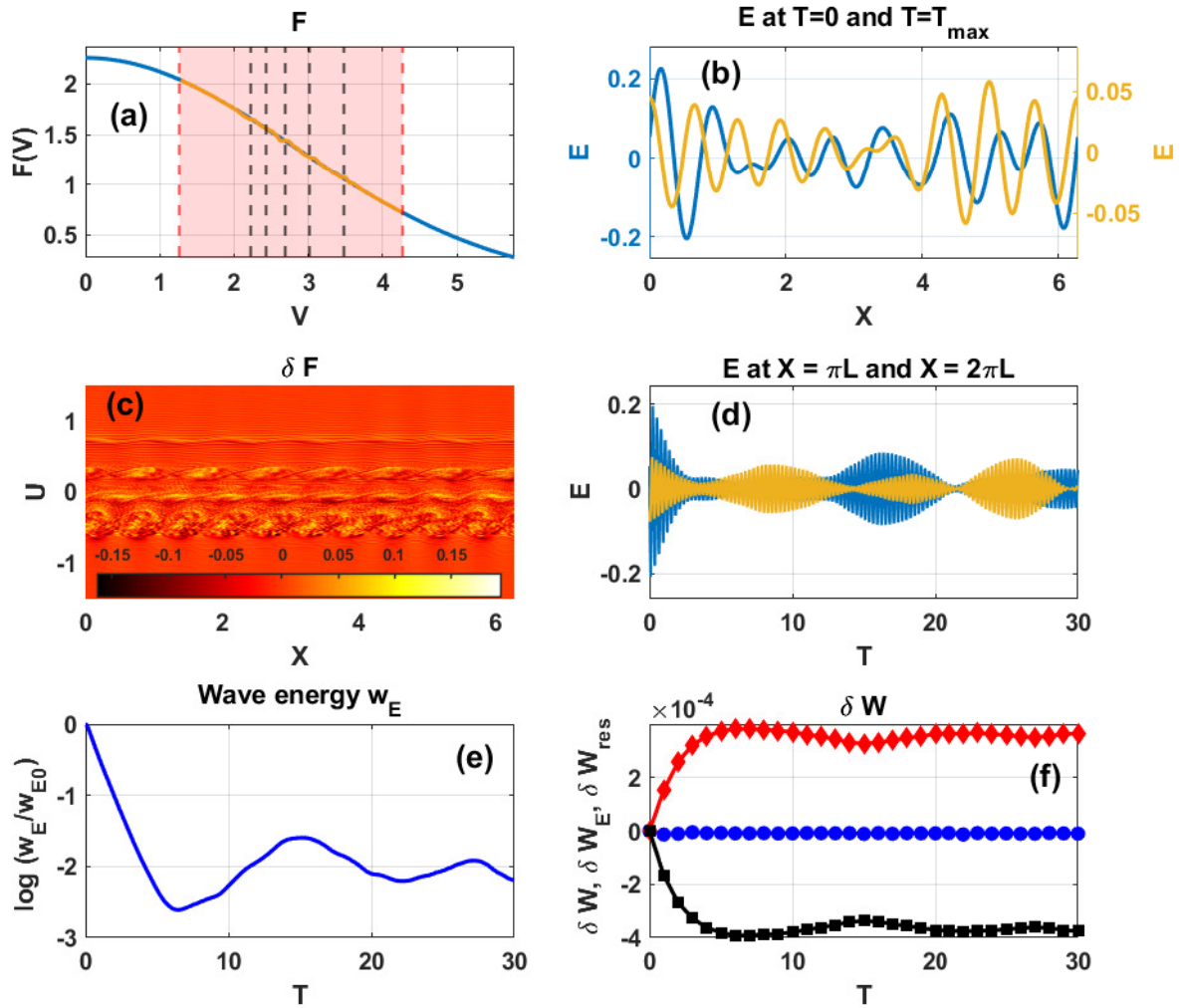


Рисунок 4.7 — Расчет №6. Результаты моделирования, проведенного для случая с широким спектром волн большой амплитуды в однородной устойчивой плазме. Начальное волновое поле состоит из 5 пространственных гармоник. (а) Начальная (синий) и усредненная по пространству конечная (оранжевый) функция распределения F в зависимости от скорости V . Вертикальные черные пунктирные линии указывают резонансные скорости для каждой гармоники. Интервал скоростей, в котором проводились численные вычисления, выделен красным. (д) Временная эволюция безразмерного поля E в координате $X = \pi L$ (оранжевый) и $X = 2\pi L$ (синий). На других панелях показаны те же физические величины, что и на соответствующих панелях рисунка 4.1, но для параметров Расчета №6 из Таблицы 1.

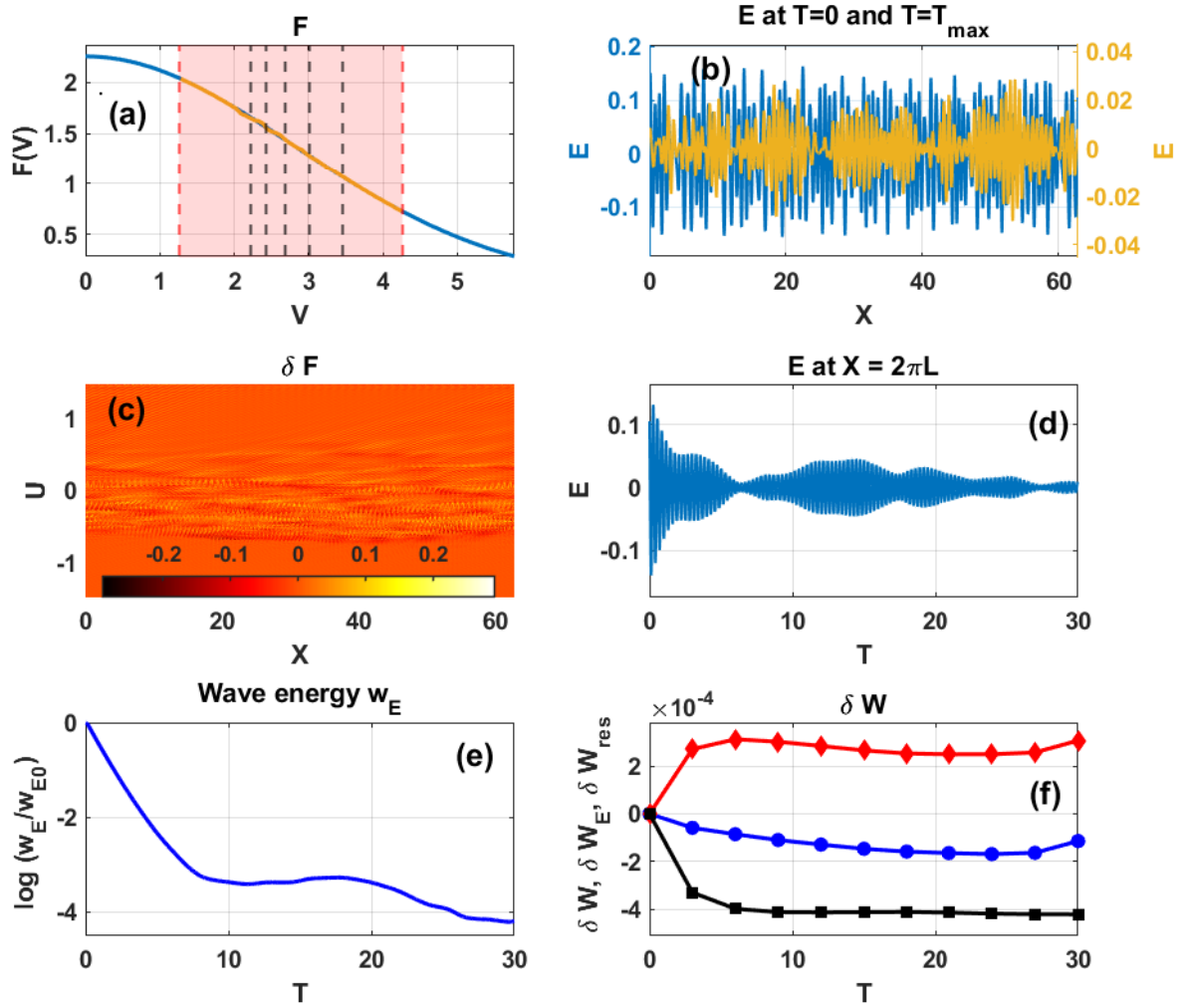


Рисунок 4.8 — Расчет №7. Результаты моделирования, выполненного для случая с широким спектром волн большой амплитуды в неоднородной устойчивой плазме. (а) Пространственно усредненная начальная (синий) и конечная (оранжевый) функция распределения F в зависимости от скорости V . Вертикальные черные пунктирные линии указывают резонансные скорости для каждой волновой гармоники при $X = 0$. На других панелях показаны те же физические величины, что и на соответствующих панелях рисунка 4.1, но для параметров Расчета №7 из Таблицы 1.

ствующей 10-й гармонике, сохраняется выраженный положительный градиент функции распределения. Анализ эволюции $\delta F(X, U)$ во времени показал, что до достижения амплитуды электрического поля достаточно большого значения вихревые структуры вблизи отдельных резонансов оставались неперекрывающимися, демонстрируя независимую нелинейную динамику электронов для каждой гармонике. Это разделение сохранялось примерно до $T = 33\text{--}35$, после чего началось смешение вихревых структур. На последнем сохраненном срезе δF , представленном на рис. 4.9(с), отчетливо видно перекрытие резонансных областей. Таким образом, в течение большей части моделирования наблюдался случай изолированных резонансов, то есть критерий Чирикова не выполнялся [110], а частичное перекрытие резонансных областей, связанных с разными гармониками, происходило только на финальной стадии расчета. Это указывает на доминирование нелинейных эффектов, в частности фазового захвата частиц в потенциальные ямы отдельных гармоник, вследствие чего динамика системы принципиально отличается от предсказаний стандартной квазилинейной теории. Полная энергия системы сохранялась с точностью $|\delta W| < 1 \times 10^{-5}$.

Исследование эволюции ленгмюровского спектра в неоднородной неустойчивой плазме было выполнено в рамках Расчета №9. Результаты данного расчета представлены на панелях рис. 4.10. Аналогично результатам Расчета №8, основные возмущения функции распределения обусловлены воздействием волн, соответствующих гармоникам $j = 8\text{--}10$, резонансные скорости которых расположены на возрастающем участке функции распределения ($\partial F_0 / \partial V > 0$). Сравнительный анализ начальной (синяя линия) и конечной (оранжевая линия) усредненных по пространству функций распределений, представленный на рис. 4.10(а), показывает, что изменения преимущественно локализованы в области указанных резонансных скоростей. Однако пространственная неоднородность плазмы приводит к тому, что эти изменения распространяются за пределы окрестностей отдельных резонансов. Отсутствие выраженной пространственной модуляции электрического поля, связанной с неоднородностью плазмы (в отличие от наблюдаемой на рис. 4.5(б)), объясняется выбором гармоник ($j = 6\text{--}10$) с практически постоянным шагом по волновому числу ($\Delta K \simeq 1$). Суммарное поле, формируемое этими гармониками, обладает квазипериодической пространственной структурой, что видно на рис. 4.10(б). Характерная длина пространственной периодичности составляет $2\pi / \Delta K \simeq 2\pi$. Такая периодичность приводит к тому, что влияние неоднородности плаз-

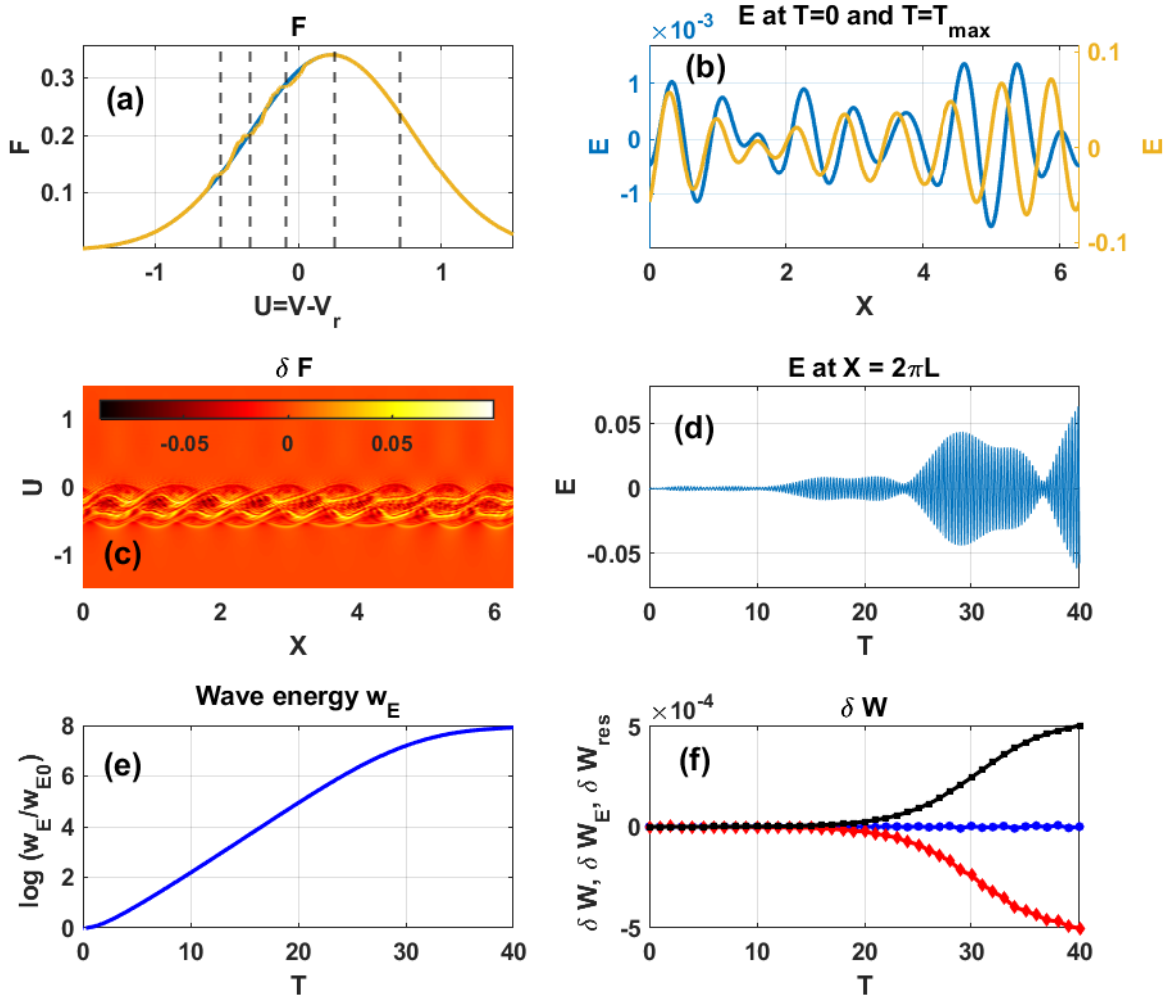


Рисунок 4.9 — Расчет №8. Результаты моделирования, проведенного для случая с волновым спектром в однородной неустойчивой плазме. (а) Начальная (синий) и усредненная по пространству конечная (оранжевый) функция распределения F в зависимости от скорости U . Вертикальные черные пунктирные линии указывают резонансные скорости для каждой волновой гармоники. На других панелях показаны те же физические величины, что и на соответствующих панелях рисунка 4.1, но для параметров Расчета №8 из Таблицы 1.

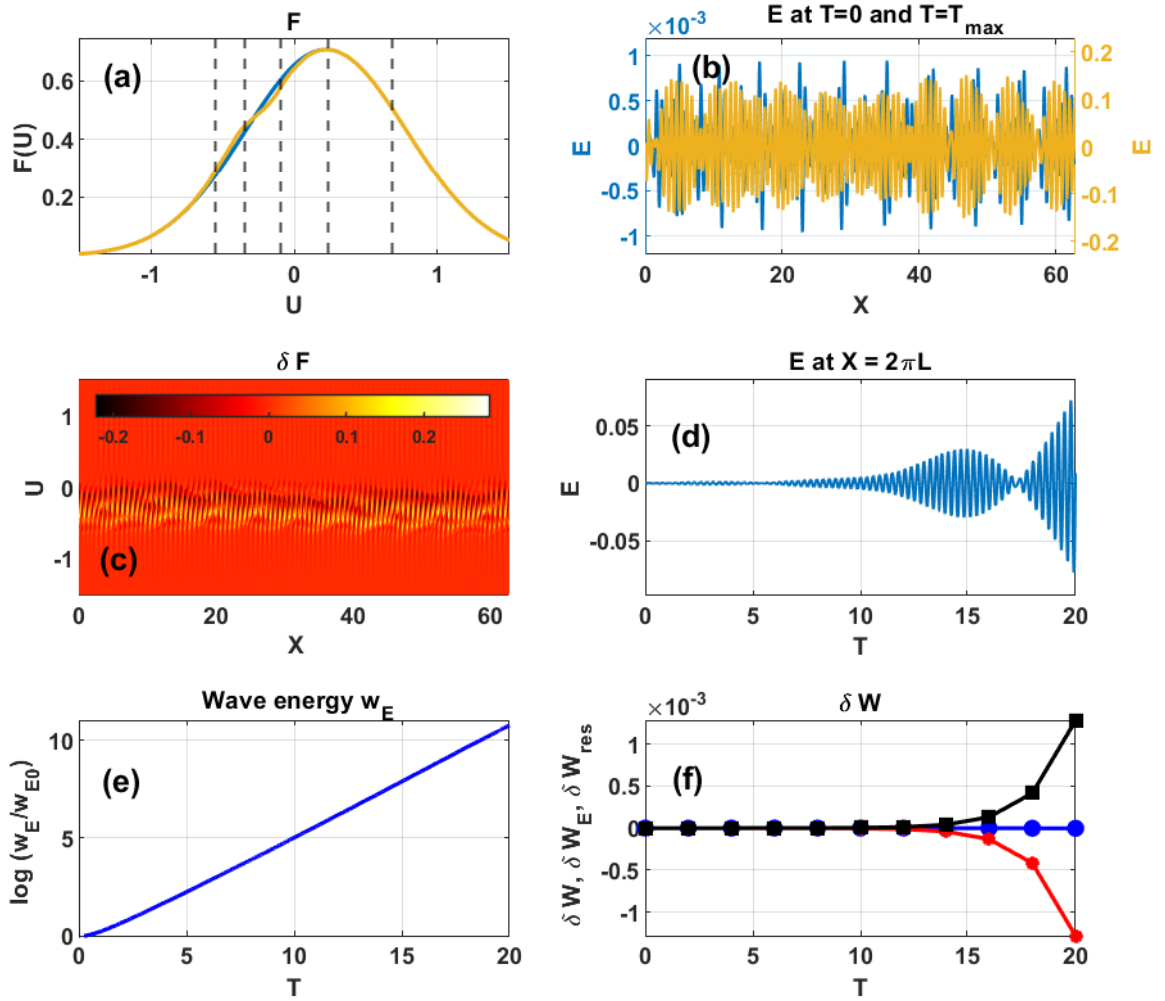


Рисунок 4.10 — Расчет №9. Результаты моделирования, проведенного для случая с волновым спектром в неоднородной неустойчивой плазме. (а) Пространственно усредненная начальная (синий) и конечная (оранжевый) функция распределения F в зависимости от скорости U . Вертикальные черные пунктирные линии указывают резонансные скорости для каждой волновой гармоники при $X = 0$. На других панелях показаны те же физические величины, что и на соответствующих панелях рисунка 4.1, но для параметров Расчета №9 из Таблицы 1.

мы на электрическое поле существенно маскируется эффектом наложения гармоник. В ходе всего моделирования с $T_{\text{MAX}} = 20$ энергия спектра волн w_E возрастала экспоненциально с практически постоянным инкрементом. На протяжении большей части расчета (до $T \approx 16$) структура δF оставалась линейной, после чего началось формирование нелинейных вихревых структур, связанных с захваченными по фазе электронами. Конечное распределение δF , представленное на рис. 4.10(с), демонстрирует сложную картину в фазовом пространстве, обусловленную преимущественно неоднородностью плазмы и взаимодействием частиц с несколькими волнами. В отдельных областях пространства наблюдаются как одиночные вихревые (или квазивихревые) структуры, так и множественные вихри на различных значениях скорости U . Относительное изменение энергии спектра волн δW_E достигало порядка 10^{-3} , тогда как отклонение полной энергии $|\delta W|$ за весь период расчета не превышало 3×10^{-6} .

В рассмотренных ранее случаях исследовалась динамика изолированных резонансов, связанных с отдельными гармониками волнового поля. Хотя в ряде численных расчетов наблюдалось перекрытие и смешивание вихревых структур в фазовом пространстве, ассоциированных с различными гармониками. В Расчете №10 исследуются пять гармоник в однородной неустойчивой плазме, при этом основное внимание уделяется сравнительно большим волновым числам K_j в диапазоне от 16 до 20. Результаты данного расчета представлены на рис. 4.11. Вследствие больших значений волновых чисел и слабой дисперсии ленгмюровских волн резонансные скорости оказываются значительно меньше, чем в предыдущих расчетах, со средним значением $\overline{V_R} \simeq 1.165$. Для предотвращения перекрытия функции распределения «холодных» электронов, составляющих основную компоненту плазмы, с функцией распределения резонансных частиц, используется пониженная тепловая скорость «холодных» электронов v_{Tc} , соответствующая параметру $a \simeq 0.11$. Центральная скорость пучка выбирается таким образом, чтобы резонансные скорости гармоник начального возмущения находились в области положительной производной функции распределения резонансных частиц по скорости. Для больших волновых чисел расстояние между резонансными скоростями соседних гармоник, ΔV_{Rj} , оказывается достаточно малым:

$$\Delta V_{Rj} = V_{Rj+1} - V_{Rj} \simeq \frac{K_{j+1} - K_j}{K_{j+1} K_j} \frac{p}{\Omega_j} \simeq \frac{1}{18 \times 17} \frac{400}{20.8} \simeq 0.06 \quad (4.34)$$

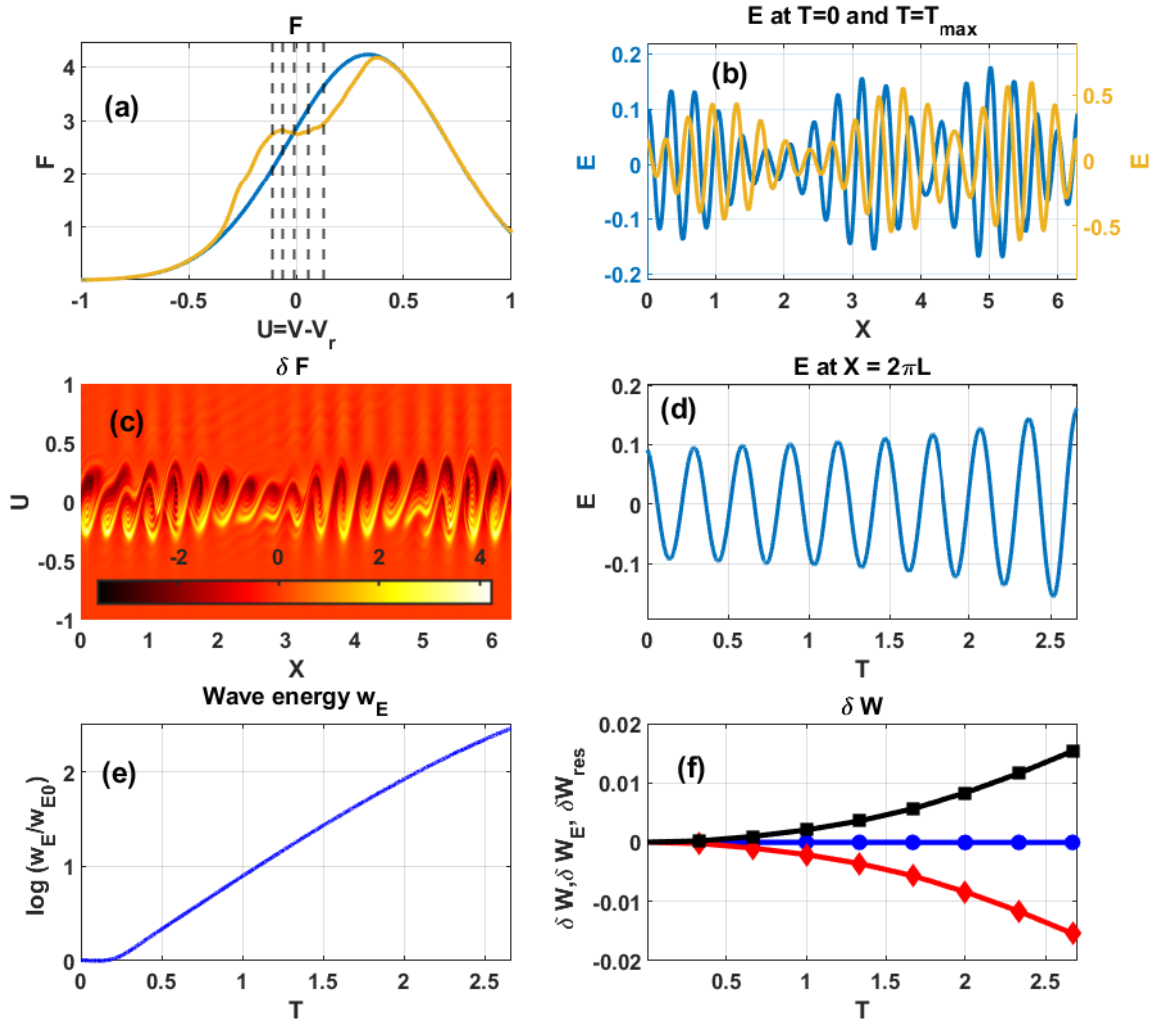


Рисунок 4.11 — Расчет №10. Результаты моделирования, проведенного для случая с волновым спектром $j = 16 - 20$ в однородной неустойчивой плазме. (а) Начальная (синий) и усредненная по пространству конечная (оранжевый) функция распределения F в зависимости от скорости U . Вертикальные черные пунктирные линии обозначают резонансные скорости для каждой волновой гармонике. На других панелях показаны те же физические величины, что и на соответствующих панелях рисунка 4.1, но для параметров Расчета №10 из Таблицы 1.

где использованы значения, соответствующие центральным гармоникам $j = 17$ и 18 с частотой $\Omega_j \simeq 20.8$. Начальные амплитуды гармоник выбираются достаточно большими, чтобы расстояние между соседними резонансными скоростями ΔV_{Rj} было сопоставимо с шириной области резонанса, $\delta V_{Rj} \sim \sqrt{E/K_j} \sim \sqrt{0.18/18} \sim 0.1$, где $E \simeq 0.18$ – максимальное значение начального электрического поля. В ходе моделирования неустойчивость приводит к дальнейшему росту амплитуды поля, что сопровождается увеличением ширины резонанса. Как показано на рис. 4.11(b), амплитуда электрического поля возрастает более чем в три раза: от начального максимума $E \simeq 0.175$ до значения более 0.59 к концу расчета. Анализ эволюции нормированной энергии спектра волн (рис. 4.11(e)) выявляет замедление экспоненциального роста на заключительных стадиях моделирования. Это совпадает с формированием горизонтального плато на профиле усредненной по пространству функции распределения резонансных частиц (рис. 4.11(a)), локализованного вблизи резонансных скоростей выбранных гармоник, что согласуется с предсказаниями квазилинейной теории [20; 21]. Окончательное изменение функции распределения δF в фазовом пространстве (рис. 4.11(c)) подтверждает эти динамические процессы, демонстрируя выраженные модификации функции распределения в области резонансных скоростей. На протяжении всего моделирования полная энергия системы сохранялась с высокой точностью: относительная ошибка не превышала $|\delta W| < 5 \times 10^{-5}$.

4.6 Выводы

Эволюция ленгмюровских волн в плазме зависит от множества факторов, в частности, от того, является ли среда однородной или неоднородной, от типа начальной функции распределения, устойчива она или нет, а также от начального возмущения электрического поля волны. Последнее может быть представлено в виде одной волны или в виде широкого спектра. Даже если начальное возмущение представляет собой одну волну в устойчивой плазме, эволюция волны зависит от начальной амплитуды волны и может проявлять как линейное, так и нелинейное поведение.

Результаты приведенных расчетов показывают, что различные комбинации этих факторов приводят к различным типам эволюции волн. В случае одной волны с малой начальной амплитудой в однородной плазме наблюдается обычное затухание Ландау [18], тогда как при большой начальной амплитуде проявляется режим эволюции энергии волны по О'Нилу [22]. В случае одной волны с большой начальной амплитудой в неоднородной плазме временная модуляция амплитуды в некоторой пространственной точке является характерной особенностью эволюции волны. Переход к режиму О'Нила также наблюдается при эволюции одной волны в однородной неустойчивой плазме. Этот процесс не имеет аналитического описания, так как ни линейное приближение, ни приближение заданного поля здесь не применимы. В случае одной волны в неустойчивой неоднородной плазме переход к режиму О'Нила не происходит, что соответствует теоретическим представлениям, но вместо этого появляется пространственная модуляция амплитуды волны.

Случаи широкого спектра, то есть такие, когда начальное возмущение состоит из множества пространственных гармоник с различными частотами согласно дисперсионному соотношению, до настоящего времени были исследованы аналитически и численно в значительно меньшей степени. Возмущение функции распределения распространяется на большую область фазовой плоскости и имеет более сложную структуру, чем в случае одной волны. В случае, когда резонансные области, соответствующие различным волновым гармоникам, перекрываются, наблюдается формирование плато на профиле пространственно усредненной функции распределения в области резонансных скоростей, как и предсказывает квазилинейная теория [20; 21].

Независимо от того, является ли среда однородной или неоднородной, а начальная функция распределения устойчивой или неустойчивой, характерной особенностью случая широкого спектра является появление пространственной и временной модуляции амплитуды поля. Учитывая хорошо известное сходство резонансного взаимодействия волна-частица для ленгмюровских волн, электронно-циклотронных и ионно-циклотронных волн, можно предположить, что эффекты модуляции, наблюдаемые в различных природных волновых явлениях в ОНЧ и УНЧ диапазонах, могут иметь ту же природу, что и выявленные для ленгмюровских волн.

Изложенные в четвертой главе результаты опубликованы в [111].

Глава 5. Квазипериодические структуры ленгмюровских волн на частотно-временных спектрограммах

В данном разделе продолжается рассмотрение той же самосогласованной системы уравнений (4.20), что и в предыдущей главе, однако основное внимание сосредоточено на частотно-временном анализе эволюции ленгмюровского спектра. Для выполнения такого анализа необходимо разрешить соседние гармоники j и $j + 1$ начального возмущения электрического поля, что требует соблюдения условия

$$\Delta\Omega_j = \Omega_{j+1} - \Omega_j > \delta\Omega, \quad (5.1)$$

где $\delta\Omega$ – частотное разрешение спектрограммы, связанное с временным разрешением соотношением $\delta\Omega \geq 2\pi/\delta T$. Однако, ввиду слабой дисперсии ленгмюровских волн (4.21), при рассматриваемых временах моделирования невозможно спектрально разрешить отдельные гармоники на спектрограмме. В связи с этим модифицируется дисперсионное соотношение для ленгмюровских волн. В (4.21) постоянный параметр a заменяется на увеличенное в десять раз значение $a^* = 10a$. Эта модификация применена и ко второму уравнению системы (4.20). Увеличение параметра a значительно расширяет частотные интервалы между соседними гармониками $\Delta\Omega_j$, обеспечивая выполнение (5.1) даже при ограниченном временном разрешении δT . На рисунке 5.1 представлена зависимость частоты $\Omega(K)$ от волнового числа K в однородной плазме ($\delta = 0$) для параметра $a = 0.96$ (пунктирная линия) и $a^* = 10a = 9.6$ (сплошная). Оценка разницы безразмерных частот между соседними гармониками $\Delta\Omega_j$ приведена на рисунке для двух дисперсионных кривых.

Стоит отметить, что увеличение тепловой скорости холодной компоненты электронов v_{Te} не производится, поскольку в этом случае может нарушаться ключевое допущение модели о разделении плазмы на холодную и резонансную компоненты. Существенный рост v_{Te} привел бы к уширению функции распределения холодных электронов, что, в свою очередь, вызвало бы поглощение функции распределения резонансных частиц и привело бы к затуханию волн за счет эффекта Ландау. Физически такое уширение означало бы, что часть электронов, формально отнесенных к холодной компоненте и учтенных через

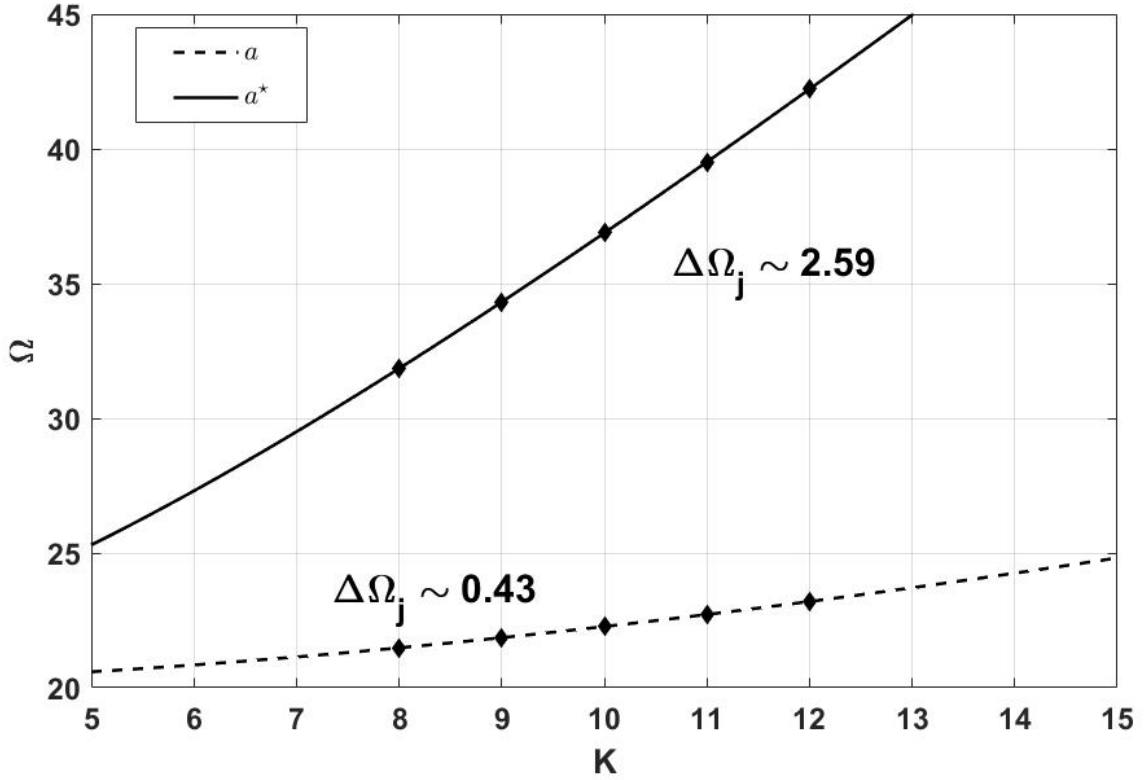


Рисунок 5.1 — Зависимость безразмерной частоты волны Ω от волнового числа K для параметров $a = 0.96$ (пунктирная линия) и $a^* = 9.6$ (сплошная линия).

диэлектрическую проницаемость, фактически должна рассматриваться как резонансная. В используемой модели кинетическое уравнение решается только для резонансной компоненты, тогда как холодная компонента рассматривается в линейном приближении. Во избежание перекрытия функций распределения двух компонент плазмы, которое противоречит нашему основному допущению, тепловая скорость холодной плазмы не изменяется, а используется модельная дисперсия, которая позволяет рассматривать кинетическое уравнение только для резонансных частиц. Такой выбор параметров гарантирует, что резонансная область отделена от основной функции распределения и обеспечивает достаточно большую дисперсию волн, которая позволяет различить гармоники на спектрограмме.

Для исследования частотно-временной динамики спектра волн в работе выполняется два численных расчета системы уравнений (4.20) — для случая однородной и неоднородной плазмы. Устанавливаются постоянные значения параметров, как и в предыдущих расчетах: $l_0 = 125$ м, $\tau_0 = 5 \times 10^{-5}$ с, $p(0) = 400$ и $v_{Te}/v_0 = 0.8$. Параметры невозмущенной функции распределения энергичных электронов (4.27) выбираются в виде $V_T = 0.8$, $\Omega_{ph} = \omega_{ph}\tau_0 = 0.6325$,

$V_b = 4.0$, $\overline{V_R} = 3.7185$ для однородного случая и $\overline{V_R} = 3.7216$ – для неоднородного. В качестве начального возмущения электрического поля выбираются пять волн, характеризующиеся частотой Ω_j и локальным волновым числом $K_j(X)$ для целых значений $j = 8 - 12$. Начальные амплитуды E_{0j} , соответствующие этим конкретным гармоникам, были равномерно установлены на одном значении $E_{0j} = 0.002$ для каждой гармоники. На рисунке 5.2 представлена начальная невозмущенная функция распределения как функция безразмерной скорости U , вертикальными пунктирными линиями обозначены резонансные скорости для каждой гармоники $j = 8 - 12$ в однородном случае.

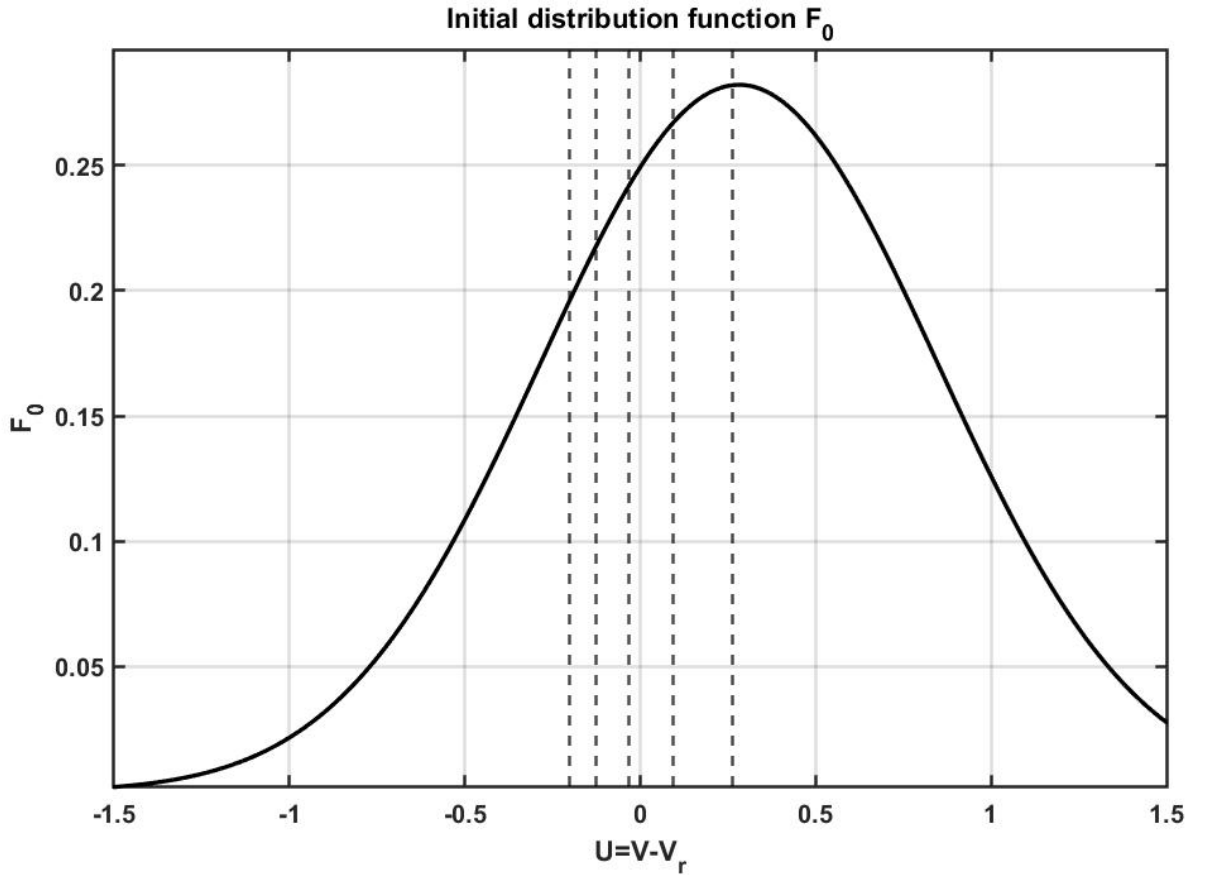


Рисунок 5.2 — Начальная невозмущенная функция распределения энергичных электронов F_0 как функция скорости U . Вертикальные пунктирные линии соответствуют резонансным скоростям для каждой гармоники ($j = 8-12$) в однородной плазме

5.1 Результаты моделирования

Расчет системы дифференциальных уравнений (4.20) выполнен с начальными условиями в виде электрического поля и векторного потенциала (4.23) при $T = 0$ и функции распределения (4.27). Рассмотрены два случая: пространственно однородная плазма ($\delta = 0$) и неоднородная плазма ($\delta = 0.15$). В отличие от предыдущей главы, в которой для однородной плазмы задавалось значение $L = 1$, здесь в обоих случаях использовалась одинаковая длина расчетной области – $2\pi L$ с $L = 10$. На рисунке 5.3 показана зависимость резонансной скорости $V_{Rj}(X) = \Omega_j/K_j(X)$ от координаты X для каждой из пяти гармоник $j = 8 - 12$ начального возмущения электрического поля.

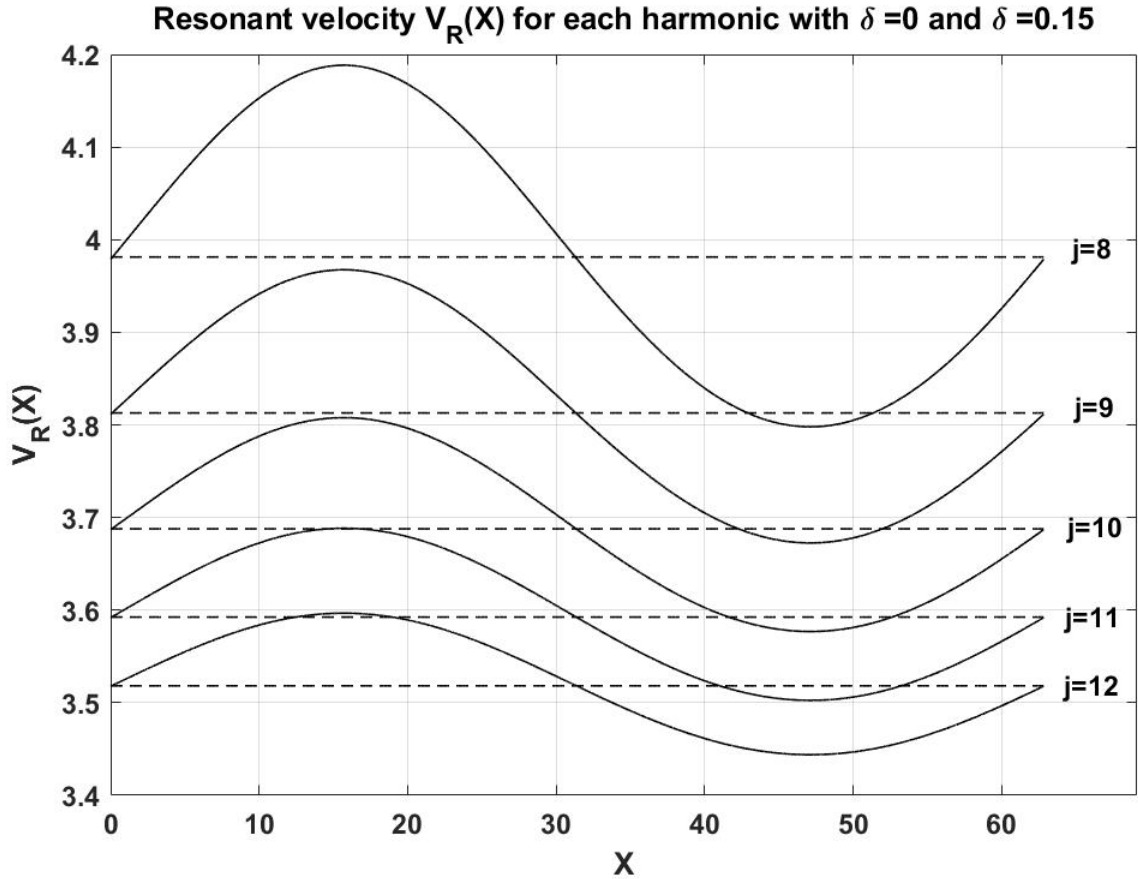


Рисунок 5.3 — Резонансная скорость $V_{Rj}(X)$ для каждой гармоники ($j = 8-12$) как функция координаты X в однородной (пунктирные линии) и неоднородной (сплошные линии) плазме.

В обоих исследуемых случаях – как для однородной, так и для неоднородной плазмы – резонансные скорости всех гармоник, за исключением,

возможно, $j = 8$, располагаются в области положительного градиента невозмущенной функции распределения по скорости, то есть $\partial F_0 / \partial U > 0$. Это соответствует положительному значению линейного инкремента волн $\gamma_L \sim \partial F_0 / \partial U$, что приводит к экспоненциальному увеличению энергии волнового спектра на протяжении всего времени моделирования. Полное безразмерное время моделирования в обоих расчетах ограничивалось значением $T_{\text{MAX}} = 20$, что соответствует $\omega_{pe} t_{\text{MAX}} = 400$.

Настоящее исследование фокусируется на начальной и промежуточной стадиях развития неустойчивости, когда наблюдается экспоненциальный рост энергии волнового спектра и начальный этап формирования плато у функции распределения. При этом вопросы насыщения неустойчивости и перехода к турбулентному режиму выходят за рамки рассмотрения и требуют отдельного анализа.

Рассмотрим характерные особенности эволюции функции распределения в фазовом пространстве, выявленные в ходе численного моделирования. В обоих случаях наблюдаются изменения пространственно-усредненной функции распределения $F(T, U)$ в области резонансных скоростей выбранных гармоник, а также формируются вихревые структуры (вихри) в фазовом пространстве, что свидетельствует о развитии нелинейных процессов фазового захвата электронов волной. На рисунках 5.4 и 5.5 показана разница между конечной и начальной функциями распределения $\delta F = F(T_{\text{MAX}}, X, U) - F_0(X, U)$ для однородного и неоднородного случаев соответственно. Верхние панели демонстрируют δF на всей расчетной области по X , а нижние – на выбранном отрезке для лучшей видимости структур в фазовом пространстве.

Анализ верхних панелей рисунков 5.4 (однородная плазма) и 5.5 (неоднородная плазма) выявляет заметные различия в изменении функции распределения $F(X, U)$ в фазовом пространстве. В случае однородной плазмы основные изменения δF локализованы вблизи резонансных скоростей, соответствующих гармоникам начального спектра, и равномерно распределены по всей области X . Напротив, для неоднородной плазмы на рисунке 5.5 отчетливо видны выраженные пространственные вариации δF , пространственный период которых совпадает с периодом $2\pi L$ модуляции величины $p(X)$. Эти вариации коррелируют с координатной зависимостью резонансных скоростей $V_{Rj}(X)$ (см. Рисунок 5.3), поскольку изменение резонансных условий вдоль X непосредственно влияет на локализацию изменений функции распределения в фазовом пространстве.

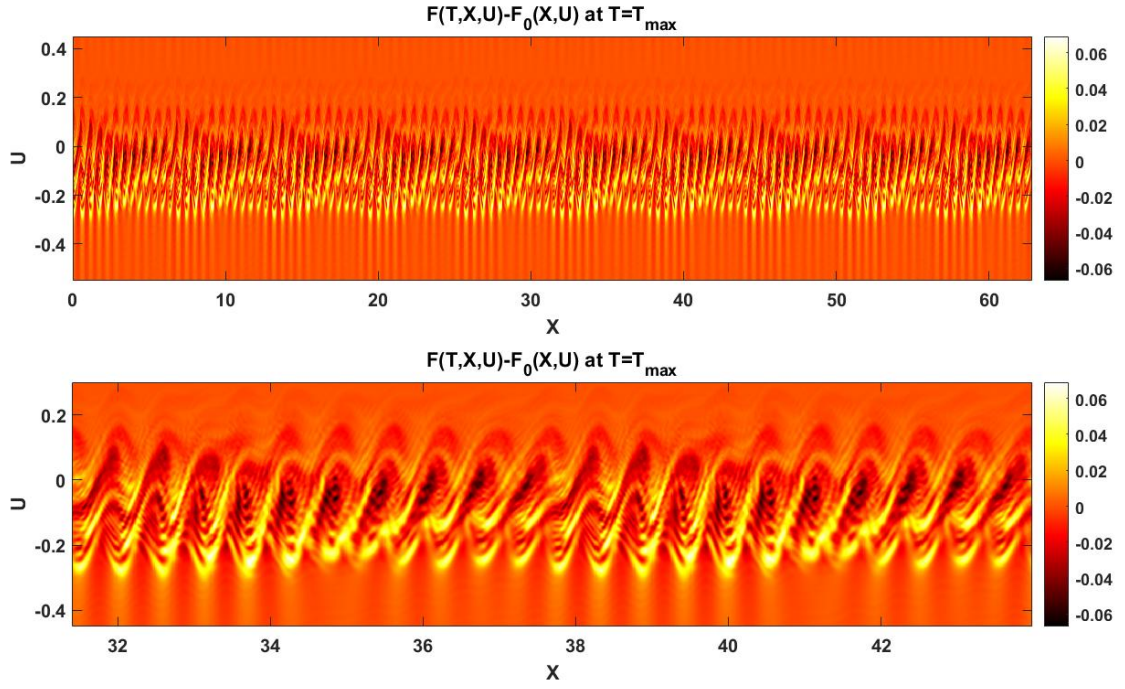


Рисунок 5.4 — Результаты моделирования для однородной плазмы. (верхняя панель) Финальное изменение функции распределения, $\delta F = F(T_{\max}, X, U) - F_0(X, U)$, по всей области X . (нижняя панель) То же на выбранном участке $\pi L \leq X \leq \frac{7}{5}\pi L$.

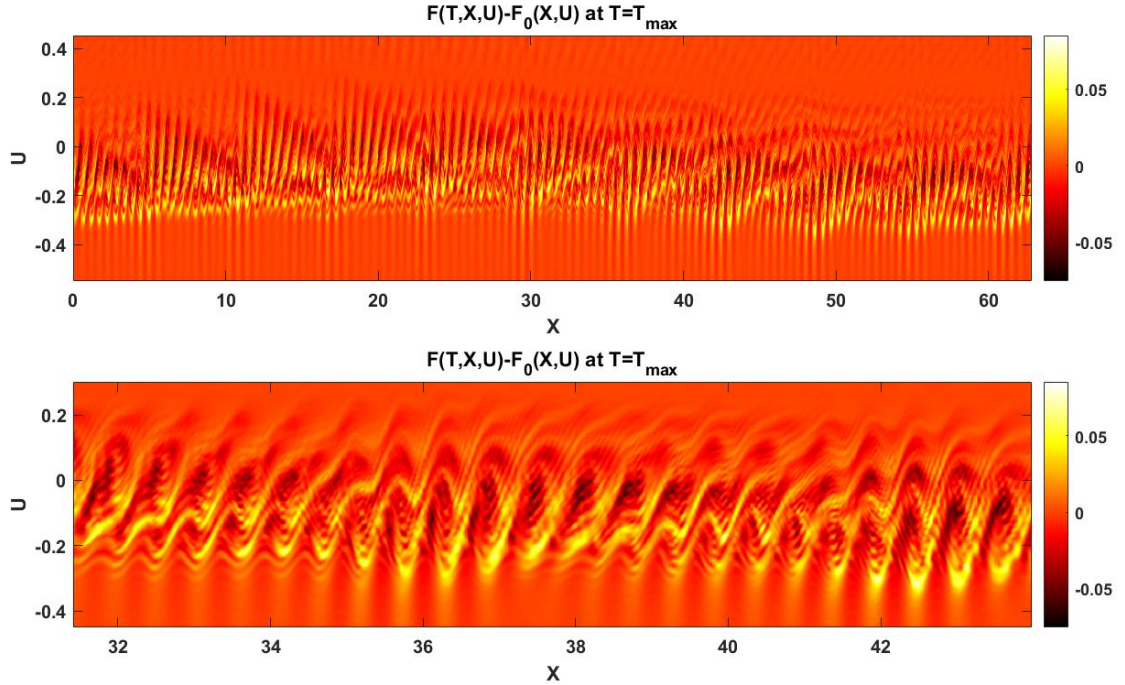


Рисунок 5.5 — Результаты моделирования для неоднородной плазмы. (верхняя панель) Финальное изменение функции распределения, $\delta F = F(T_{\max}, X, U) - F_0(X, U)$, по всей области X . (нижняя панель) То же на выбранном участке $\pi L \leq X \leq \frac{7}{5}\pi L$.

В ходе развития неустойчивости резонансное взаимодействие между волновым спектром и частицами выходит за рамки теории изолированных резонансов. Это обусловлено тем, что по мере роста амплитуды волн к концу расчета ширина резонансной области становится сравнимой с расстоянием между соседними резонансами в пространстве скоростей или даже превышает его. Для проведения количественной оценки выбирается среднее волновое число спектра $K \sim 10$ и амплитуда электрического поля $E \sim 0.066$. Тогда характерное нелинейное время определяется как $\tau = 1/\sqrt{EK} \sim 1.23$, а ширина резонанса по скорости вычисляется по формуле

$$\Delta V_R \sim \frac{1}{K\tau} \sim 0.08 .$$

Это значение близко к расстоянию между резонансными скоростями соседних гармоник (см. Рисунок 5.3), что указывает на частичное перекрытие резонансов и начало перехода системы в режим стохастического нерегулярного движения резонансных частиц.

На рисунке 5.6 представлены пространственно-временные профили безразмерного электрического поля E для однородной (левые панели) и неоднородной (правые панели) плазмы. Верхние панели отображают зависимость поля от координаты X в начальный момент времени ($T = 0$), средние – в финальный момент моделирования ($T = T_{\text{MAX}}$), а нижние – временную эволюцию поля в фиксированной точке пространства точке $X_0 = 2\pi L$. В обоих случаях наблюдается экспоненциальный рост амплитуды волнового спектра, что подтверждает развитие пучковой неустойчивости. К концу расчета амплитуда превышает начальный уровень примерно на порядок. По аналогии с реальными наблюдениями космических аппаратов, регистрирующих в своей точке расположения многокомпонентные волновые данные в зависимости от времени, для частотно-временного анализа выбирается фиксированная точка пространства $X_0 = 2\pi L$ и исследуется электрическое поле $E(X_0, T)$ (см. нижние панели на Рис. 5.6).

Частотно-временные спектрограммы сигнала $E(X_0, T)$, для однородной и неоднородной плазмы (верхняя и нижняя панели рисунка 5.7) построены с использованием функции `pspectrum` в MATLAB, что реализует метод кратковременного преобразования Фурье с окном, составляющим примерно $\sim 12.5\%$ от общего времени моделирования и перекрытием сегментов около $\sim 90\%$. Параметр утечки 0.85 обеспечил применение окна, близкого к окну Ганна (Hann

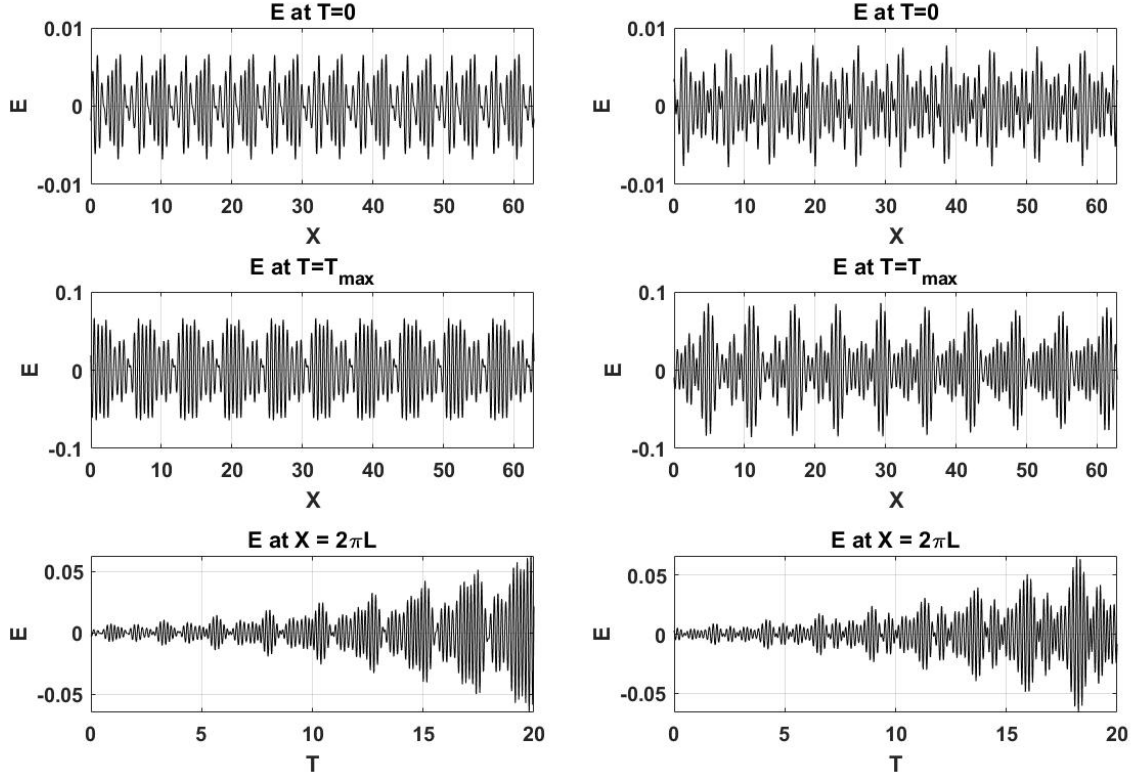


Рисунок 5.6 — Результаты моделирования для однородной (левые панели) и неоднородной (правые панели) плазмы. (сверху вниз) Начальное безразмерное электрическое поле $E(X, 0)$ в зависимости от координаты X ; финальное безразмерное электрическое поле $E(X, T_{\max})$ в зависимости от координаты X ; эволюция поля $E(X_0, T)$ во времени для $X_0 = 2\pi L$

Window), для минимизации спектральной утечки с сохранением высокого разрешения по частоте.

На спектрограммах отображен логарифм спектральной интенсивности $\log_{10} S(T, \Omega)$ в зависимости от безразмерной частоты Ω (ось ординат) и времени T (ось абсцисс). Черная штриховая линия показывает частоту максимума спектральной интенсивности в каждый момент времени $\Omega_{\max}(T)$. Анализ спектрограмм демонстрирует, что с течением времени доминируют более высокие частоты, что связано с максимальным инкрементом именно для этих гармоник. На рисунке 5.8 представлена аналитическая зависимость линейного инкремента ленгмюровской волны от частоты Ω в однородном случае. В наших переменных эта зависимость может быть записана в виде:

$$\Gamma_L(\Omega) = \gamma_L \tau_0 = -\frac{\sqrt{\pi} \Omega_{ph}^2 \Omega (\Omega - KV_b)}{V_T^3 K^3} \exp\left(-\frac{(\Omega - KV_b)^2}{V_T^2 K^2}\right), \quad (5.2)$$

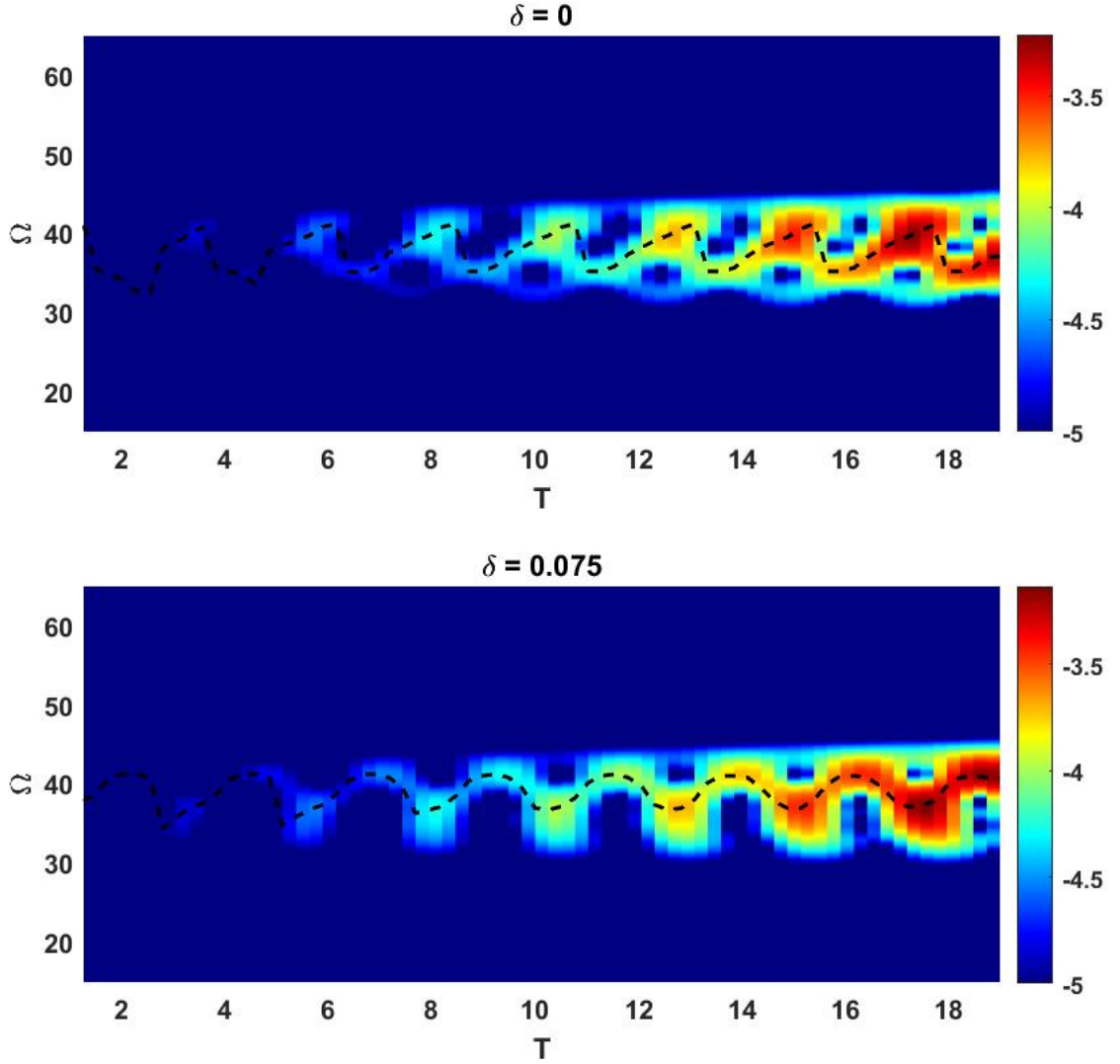


Рисунок 5.7 — Частотно-временная спектрограмма сигнала $E(X_0, T)$, зарегистрированного в точке $X_0 = 2\pi L$, для однородной (верхняя панель) и неоднородной (нижняя) плазмы.

где Ω и K строго связаны дисперсионным соотношением (2.2). Вертикальные штриховые линии обозначают частоты гармоник начального возмущения электрического поля.

Характерной особенностью представленных спектрограмм является наличие структурных элементов с высокой интенсивностью, повторяющихся с определенным квазипостоянным периодом во времени. Период оценивается по временному интервалу между локальными максимумами кривой $\Omega_{\text{MAX}}(T)$ и составляет примерно $\Delta T_m \simeq 2.31$. Каждый из этих элементов характеризуется увеличением частоты во времени. Формирование квазипериодических структур на спектрограммах объясняется следующим образом. В начальном спектре

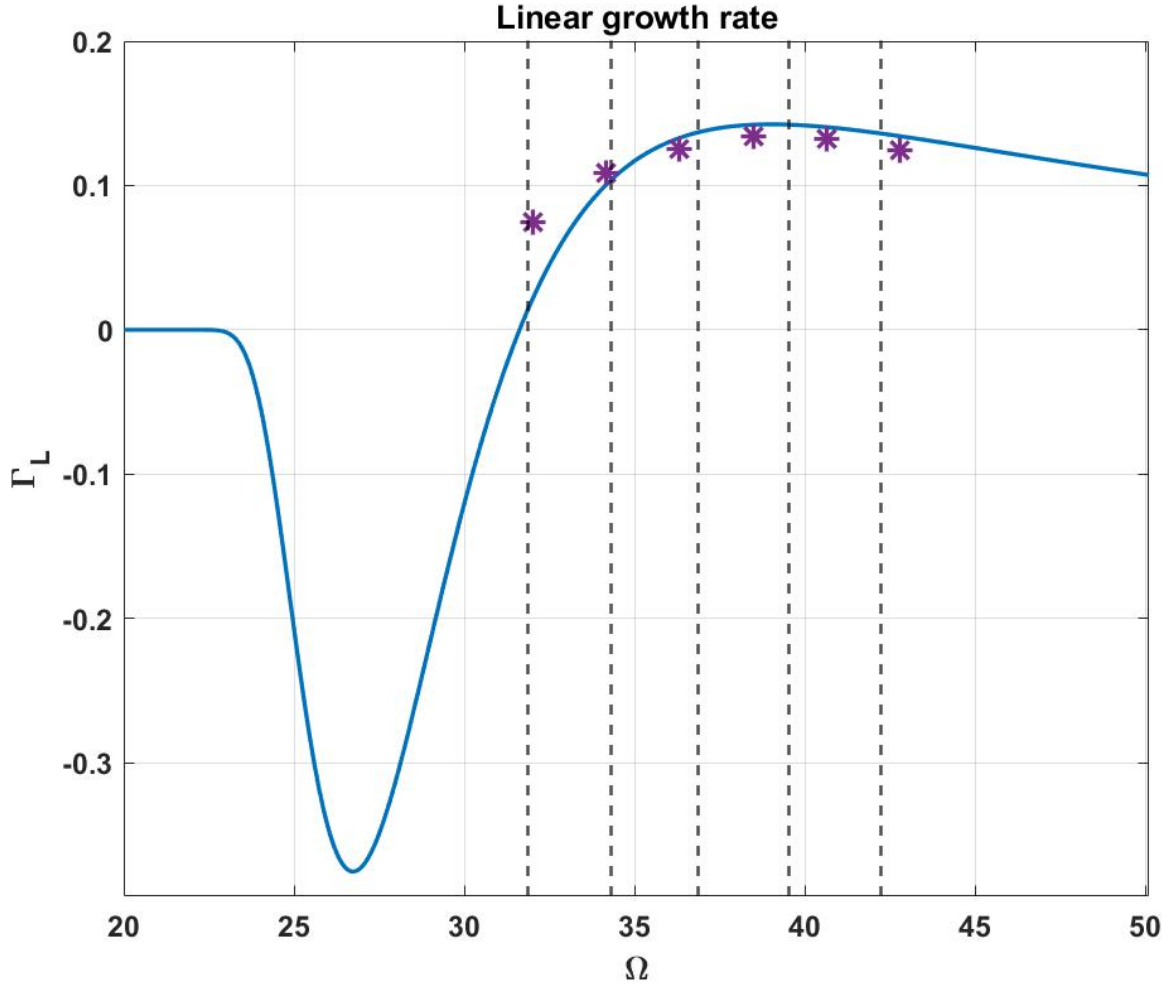


Рисунок 5.8 — Безразмерный линейный инкремент волны как функция безразмерной частоты Ω в однородной плазме. Вертикальные пунктирные линии соответствуют частотам гармоник ($j = 8 - 12$); звездочками отмечены значения инкремента, рассчитанные по спектральной интенсивности для шести частот.

электрического поля, состоящего из гармоник с номерами $j = 8-12$, шаг по волновому числу между соседними гармониками постоянен ($\Delta K_j = 1$ в однородном случае, $\Delta K_j \simeq 1$ в неоднородном). Суперпозиция таких волн приводит к возникновению пространственно-периодических модуляций амплитуды поля с характерной длиной $l = 2\pi/\Delta K \simeq 2\pi$. Эти модуляции, выражающиеся в чередовании максимумов и минимумов амплитуды электрического поля, отчетливо видны на рисунке 5.6 как в начальный (верхняя панель), так и в конечный моменты времени (средняя панель). Перенос энергии с групповой скоростью $V_g = \partial\Omega/\partial K$ приводит к преобразованию пространственной периодичности во временную модуляцию, наблюдаемую в фиксированной точке пространства. Эта временная модуляция поля продемонстрирована на нижних панелях рис.

5.6 для $X_0 = 2\pi L$. Проведенные оценки подтверждают данное представление о формировании квазипериодических структур на частотно-временных спектрограммах. Действительно, средняя групповая скорость составляет

$$V_g = \frac{\partial \Omega}{\partial K} = a^* \frac{K}{\Omega} \simeq 9.6 \times \frac{11}{38.5} \simeq 2.74. \quad (5.3)$$

Тогда время, через которое в заданной точке появится следующий элемент, определяется как

$$\Delta T_e = \frac{l}{V_g} \simeq \frac{2\pi}{2.74} \simeq 2.29, \quad (5.4)$$

что хорошо согласуется с периодом, измеренным по спектрограммам $\Delta T_m = 2.31$.

Наблюдаемое различие между однородной и неоднородной плазмой проявляется в эволюции частоты Ω_{MAX} от времени T . В однородном случае резкий переход между высокими и низкими частотами различных чередующихся элементов обусловлен дискретностью волновых чисел с фиксированным шагом. В неоднородной плазме пространственная зависимость волновых чисел гармоник делает переход плавным: шаг между модами квазипостоянен, но его малые вариации «размывают» резкие границы при суперпозиции волн.

Для однородной плазмы исследована зависимость инкремента волны от частоты на основе спектральной интенсивности $S(T, \Omega)$ (верхняя панель рис. 5.7). Поскольку в однородной среде инкремент не зависит от пространственной координаты, все элементы пространственно-периодической структуры поля испытывают одинаковый прирост энергии. При последовательном прохождении этих элементов через фиксированную точку $X_0 = 2\pi L$ наблюдается экспоненциальный рост интенсивности $S(T, \Omega)$ на заданной частоте. На рис. 5.9 показана временная эволюция $\log_{10} S(T, \Omega)$ для частоты $\Omega = 38.5$. Локальные максимумы спектральной интенсивности (отмечены звездочками) соответствуют моментам времени, при которых электрическое поле в точке X_0 дает наибольший вклад в спектральную компоненту на данной частоте. Эти значения использованы для оценки инкремента по наклону аппроксимирующей прямой в логарифмическом масштабе (красная штриховая линия на Рисунке 5.9). Аналогичная процедура выполнена для шести частот. Полученные значения инкремента (обозначены звездами на рис. 5.8) хорошо совпадают с аналитической зависимостью (5.2).

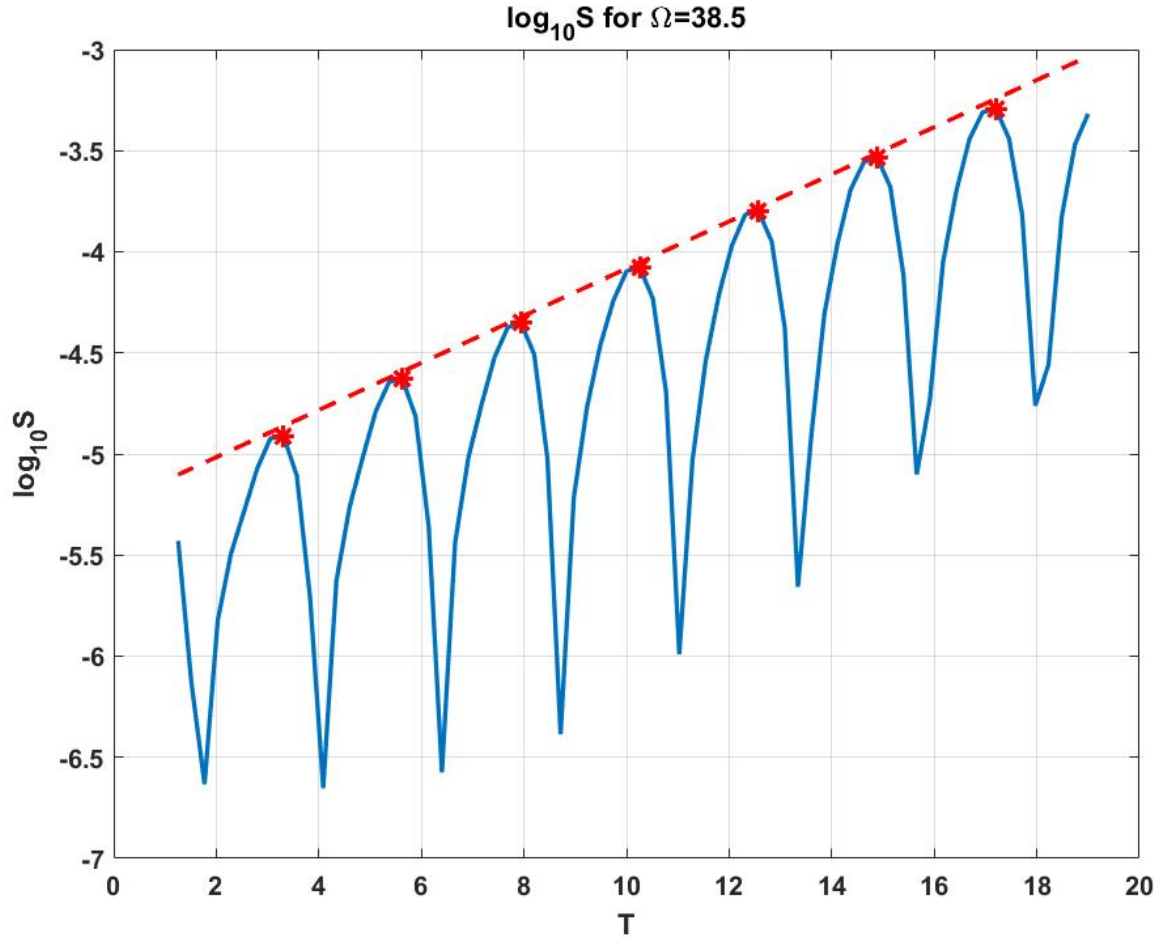


Рисунок 5.9 — Временная эволюция спектральной интенсивности $\log_{10} S(T, \Omega)$ для частоты $\Omega \simeq 38.5$ в однородной плазме.

5.2 Выводы

В данной главе была исследована самосогласованная модель, описывающая динамику ленгмюровских волн в неоднородной плазме с учетом резонансного взаимодействия с электронами. Модель основана на системе уравнений Власова и Ампера–Максвелла, где внесен ряд упрощающих предположений, в частности, нерезонансные частицы учитываются в линейном приближении через диэлектрическую проницаемость, а кинетическое уравнение Власова решается только для резонансных частиц, ответственных за рост или затухание волн.

Для численного моделирования использовано модифицированное дисперсионное соотношение для ленгмюровских волн, сохраняющее форму $\Omega^2 = aK^2 + p$, но с увеличенным в 10 раз коэффициентом при K^2 . Такой выбор

был сделан с целью повышения спектрального разрешения частот Ω в условиях слабой дисперсии ленгмюровских волн.

Численное моделирование показало, что в случае широкого спектра начальных возмущений в электрическом поле формируются квазипериодические структуры, проявляющиеся на частотно-временных спектрограммах в виде элементов с возрастающей частотой. Анализ этих структур позволил установить, что их появление связано не с нелинейными эффектами резонансного взаимодействия волна-частица, а с пространственной периодичностью амплитуды электрического поля, обусловленной дискретностью волновых чисел в спектре волн. Численные оценки показали, что наблюдаемые периодические структуры на спектрограммах могут быть объяснены переносом энергии волны с групповой скоростью и соответствующим преобразованием пространственных структур во временные модуляции.

С учетом указанной аналогии в описании ленгмюровских и свистовых волн, распространяющихся вдоль внешнего магнитного поля, выявленные особенности эволюции ленгмюровского спектра могут проявляться и для свистовых волн, которые играют важную роль в динамике частиц радиационных поясов.

Заключение

В рамках данной диссертационной работы были получены следующие основные результаты:

1. Вычислен нелинейный инкремент дактированной квазимонохроматической свистовой волны для произвольного профиля амплитуды волны в неоднородной плазме. На основе итерационного алгоритма определен самосогласованный пространственный профиль амплитуды сигнала ОНЧ передатчика с учетом геометрических факторов распространения и резонансного взаимодействия с энергичными электронами.
2. Исследован механизм передачи энергии между различными группами резонансных электронов, опосредованный квазимонохроматической свистовой волной, генерируемой циклотронной неустойчивостью в экваториальной области и распространяющейся в земной магнитосфере. Прделанный детальный анализ нелинейного инкремента показал возможность передачи энергии от менее энергичных к более энергичным электронам в неравновесной неустойчивой плазме, что имеет важное значение для понимания процессов ускорения частиц в радиационных поясах Земли.
3. Разработан и реализован эффективный численный алгоритм для самосогласованного описания эволюции ленгмюровских волн и функции распределения резонансных частиц в условиях как однородной, так и неоднородной плазмы. На его основе воспроизводятся хорошо известные явления – такие как линейное и нелинейное затухание Ландау, а также формирование плато на профиле функции распределения, предсказываемое квазилинейной теорией. Помимо этого, с использованием предложенного подхода получены новые важные результаты, касающиеся особенностей динамики спектра волн в устойчивой и неустойчивой плазме.
4. Построены частотно-временные спектрограммы электрического поля ленгмюровских волн. Анализ выявил квазипериодические временные структуры, которые отражают пространственную модуляцию амплитуды поля, связанную с постоянным шагом волновых чисел гармоник начального волнового спектра.

Предложенные в работе методы вносят существенный вклад в развитие численного моделирования нелинейных волновых процессов в плазме и дают возможность более детально исследовать механизмы ускорения и обмена энергией между волнами и частицами в лабораторных экспериментах и космических наблюдениях.

В заключение автор выражает благодарность научному руководителю Шкляру Давиду Рувимовичу за плодотворную совместную работу, ценные советы, конструктивные замечания и всестороннюю поддержку на всех этапах проведения исследования. Автор признателен Петруковичу Анатолию Алексеевичу, Зеленому Льву Матвеевичу и Садовскому Андрею Михайловичу за помощь и полезные советы в процессе подготовки диссертации. Я благодарен сотрудникам Отдела физики космической плазмы ИКИ РАН за поддержку во время моей работы в отделе.

Список литературы

1. *Wesson, J.* Tokamaks / J. Wesson, D. J. Campbell. — 4th. — Oxford University Press, 2011. — P. 812. — (International Series of Monographs on Physics).
2. *Esarey, E.* Physics of laser-driven plasma-based electron accelerators / E. Esarey, C. B. Schroeder, W. P. Leemans // Reviews of Modern Physics. — 2009. — Aug. — Vol. 81, no. 3. — P. 1229—1285. — URL: <http://dx.doi.org/10.1103/RevModPhys.81.1229>.
3. *Hubeny, I.* Theory of Stellar Atmospheres. An Introduction to Astrophysical Non-equilibrium Quantitative Spectroscopic Analysis / I. Hubeny, D. Mihalas. — 2015.
4. *Ferrière, K.* Plasma turbulence in the interstellar medium / K. Ferrière // Plasma Physics and Controlled Fusion. — 2019. — Nov. — Vol. 62, no. 1. — P. 014014. — URL: <http://dx.doi.org/10.1088/1361-6587/ab49eb>.
5. *Russell, C.* The dynamics of planetary magnetospheres / C. Russell // Planetary and Space Science. — 2001. — Aug. — Vol. 49, no. 10/11. — P. 1005—1030. — URL: [http://dx.doi.org/10.1016/S0032-0633\(01\)00017-4](http://dx.doi.org/10.1016/S0032-0633(01)00017-4).
6. *Akasofu, S. I.* Polar and Magnetosphere Substorms. Vol. 11 / S. I. Akasofu. — 1968.
7. Observation of High Intensity Radiation by Satellites 1958 Alpha and Gamma / J. A. Van Allen [et al.] // Journal of Jet Propulsion. — 1958. — Sept. — Vol. 28, no. 9. — P. 588—592. — URL: <http://dx.doi.org/10.2514/8.7396>.
8. Измерения космического излучения на искусственном спутнике Земли / С. Н. Вернов [и др.] // Доклады Академии наук СССР. — 1958. — Т. 120, № 6. — С. 231—233.
9. Space weather impacts on satellites and forecasting the Earth's electron radiation belts with SPACECAST / R. B. Horne [et al.] // Space Weather. — 2013. — Apr. — Vol. 11, no. 4. — P. 169—186. — URL: <http://dx.doi.org/10.1002/swe.20023>.

10. *Kennel, C. F.* Limit on stably trapped particle fluxes / C. F. Kennel, H. E. Petschek // Journal of Geophysical Research. — 1966. — Jan. — Vol. 71, no. 1. — P. 1—28. — URL: <http://dx.doi.org/10.1029/JZ071i001p00001>.
11. *Thorne, R. M.* Radiation belt dynamics: The importance of wave-particle interactions / R. M. Thorne // Geophysical Research Letters. — 2010. — Nov. — Vol. 37, no. 22. — URL: <http://dx.doi.org/10.1029/2010GL044990>.
12. *Pulkkinen, T.* Space Weather: Terrestrial Perspective / T. Pulkkinen // Living Reviews in Solar Physics. — 2007. — Vol. 4. — URL: <http://dx.doi.org/10.12942/lrsp-2007-1>.
13. The Electric and Magnetic Field Instrument Suite and Integrated Science (EMFISIS) on RBSP / C. A. Kletzing [et al.] // Space Science Reviews. — 2013. — June. — Vol. 179, no. 1—4. — P. 127—181. — URL: <http://dx.doi.org/10.1007/s11214-013-9993-6>.
14. The Electric Field and Waves Instruments on the Radiation Belt Storm Probes Mission / J. R. Wygant [et al.] // Space Science Reviews. — 2013. — Oct. — Vol. 179, no. 1—4. — P. 183—220. — URL: <http://dx.doi.org/10.1007/s11214-013-0013-7>.
15. The Plasma Wave Experiment (PWE) on board the Arase (ERG) satellite / Y. Kasahara [et al.] // Earth, Planets and Space. — 2018. — May. — Vol. 70, no. 1. — URL: <http://dx.doi.org/10.1186/s40623-018-0842-4>.
16. Magnetospheric Multiscale Overview and Science Objectives / J. L. Burch [et al.] // Space Science Reviews. — 2015. — May. — Vol. 199, no. 1—4. — P. 5—21. — URL: <http://dx.doi.org/10.1007/s11214-015-0164-9>.
17. *Krall, N.* Principles of Plasma Physics / N. Krall, A. Trivelpiece. — McGraw-Hill, 1973. — (International series in pure and applied physics). — URL: <https://books.google.ru/books?id=b0BRAAAAMAAJ>.
18. *Ландау, Л. Д.* О колебаниях электронной плазмы / Л. Д. Ландау // Журнал экспериментальной и теоретической физики. — 1946. — Т. 16. — С. 574.
19. *Гинзбург, В. Л.* Волны в магнитоактивной плазме / В. Л. Гинзбург, А. А. Рухадзе. — Москва : Наука, 1975.

20. *Vedenov, A.* Quasi-linear theory of plasma oscillations / A. Vedenov, E. Velikhov, R. Sagdeev // Nucl. Fusion Suppl. — 1962. — Vol. Pt. 2. — P. 465—475.
21. *Drummond, W.* NON-LINEAR STABILITY OF PLASMA OSCILLATIONS / W. Drummond, D. Pines // Nucl. Fusion Suppl. — 1962. — Vol. Pt. 3. — P. 1049—1058.
22. *O’Neil, T.* Collisionless Damping of Nonlinear Plasma Oscillations / T. O’Neil // The Physics of Fluids. — 1965. — Dec. — Vol. 8, no. 12. — P. 2255—2262. — URL: <http://dx.doi.org/10.1063/1.1761193>.
23. *Трахтенгерц, В. Ю.* Свистовые и альфвеновские циклотронные мазеры в космосе / В. Ю. Трахтенгерц, М. Д. Райкрофт ; под ред. А. Г. Демехов. — Физматлит, 2011.
24. *Галеев, А. А.* Нелинейная теория плазмы / А. А. Галеев, Р. З. Сагдеев // Вопросы теории плазмы. Том 7 / под ред. М. А. Леонтович. — М. : Атомиздат, 1973. — С. 3—144.
25. *Dawson, J. M.* Particle simulation of plasmas / J. M. Dawson // Reviews of Modern Physics. — 1983. — Apr. — Vol. 55, no. 2. — P. 403—447. — URL: <http://dx.doi.org/10.1103/RevModPhys.55.403>.
26. *Hockney, R.* Computer Simulation Using Particles / R. Hockney, J. Eastwood. — CRC Press, 03/2021. — URL: <http://dx.doi.org/10.1201/9780367806934>.
27. *Ren, J.* Recent development of fully kinetic particle-in-cell method and its application to fusion plasma instability study / J. Ren, G. Lapenta // Frontiers in Physics. — 2024. — Jan. — Vol. 12. — URL: <http://dx.doi.org/10.3389/fphy.2024.1340736>.
28. *Filbet, F.* Conservative Numerical Schemes for the Vlasov Equation / F. Filbet, E. Sonnendrücker, P. Bertrand // Journal of Computational Physics. — 2001. — Sept. — Vol. 172, no. 1. — P. 166—187. — URL: <http://dx.doi.org/10.1006/jcph.2001.6818>.
29. A Numerical Scheme for the Integration of the Vlasov–Maxwell System of Equations / A. Mangeney [et al.] // Journal of Computational Physics. — 2002. — July. — Vol. 179, no. 2. — P. 495—538. — URL: <http://dx.doi.org/10.1006/jcph.2002.7071>.

30. *Crouseilles, N.* Conservative semi-Lagrangian schemes for Vlasov equations / N. Crouseilles, M. Mehrenberger, E. Sonnendrücker // Journal of Computational Physics. — 2010. — Mar. — Vol. 229, no. 6. — P. 1927—1953. — URL: <http://dx.doi.org/10.1016/j.jcp.2009.11.007>.
31. *Helliwell, R.* Whistlers and Related Ionospheric Phenomena / R. Helliwell. — Stanford, CA : Stanford University Press, 1965.
32. *Storey, L.* / L. Storey // Philosophical Transactions of the Royal Society of London. Series A, Mathematical and Physical Sciences. — 1953. — July. — Vol. 246, no. 908. — P. 113—141. — URL: <http://dx.doi.org/10.1098/rsta.1953.0011>.
33. *Kolmašová, I.* Whistler echo trains triggered by energetic winter lightning / I. Kolmašová, O. Santolík, J. Manninen // Nature Communications. — 2024. — Aug. — Vol. 15, no. 1. — URL: <http://dx.doi.org/10.1038/s41467-024-51684-0>.
34. *Gurnett, D. A.* Plasma waves in the distant magnetotail / D. A. Gurnett, L. A. Frank, R. P. Lepping // Journal of Geophysical Research. — 1976. — Dec. — Vol. 81, no. 34. — P. 6059—6071. — URL: <http://dx.doi.org/10.1029/JA081i034p06059>.
35. *Helliwell, R. A.* VLF wave injection into the magnetosphere from Siple Station, Antarctica / R. A. Helliwell, J. P. Katsufakis // Journal of Geophysical Research. — 1974. — June. — Vol. 79, no. 16. — P. 2511—2518. — URL: <http://dx.doi.org/10.1029/JA079i016p02511>.
36. *Helliwell, R. A.* VLF wave stimulation experiments in the magnetosphere from Siple Station, Antarctica / R. A. Helliwell // Reviews of Geophysics. — 1988. — Aug. — Vol. 26, no. 3. — P. 551—578. — URL: <http://dx.doi.org/10.1029/RG026i003p00551>.
37. *Cohen, M. B.* Terrestrial VLF transmitter injection into the magnetosphere / M. B. Cohen, U. S. Inan // Journal of Geophysical Research: Space Physics. — 2012. — Aug. — Vol. 117, A8. — URL: <http://dx.doi.org/10.1029/2012JA017992>.

38. The significance of VLF transmitters in the precipitation of inner belt electrons / W. L. Imhof [et al.] // Journal of Geophysical Research: Space Physics. — 1981. — Dec. — Vol. 86, A13. — P. 11225—11234. — URL: <http://dx.doi.org/10.1029/JA086iA13p11225>.
39. The modulated precipitation of radiation belt electrons by controlled signals from VLF transmitters / W. L. Imhof [et al.] // Geophysical Research Letters. — 1983. — Aug. — Vol. 10, no. 8. — P. 615—618. — URL: <http://dx.doi.org/10.1029/GL010i008p00615>.
40. *Inan, U. S.* Nonlinear pitch angle scattering of energetic electrons by coherent VLF waves in the magnetosphere / U. S. Inan, T. F. Bell, R. A. Helliwell // Journal of Geophysical Research: Space Physics. — 1978. — July. — Vol. 83, A7. — P. 3235—3253. — URL: <http://dx.doi.org/10.1029/JA083iA07p03235>.
41. *Matsumoto, H.* Nonlinear whistler-mode interaction and triggered emissions in the magnetosphere: a review / H. Matsumoto // Wave Instabilities in Space Plasmas / ed. by P. Palmadesso, K. Papadopoulos. — Hingham : D. Reidel, 1979. — P. 163—190.
42. *Nunn, D.* A self-consistent theory of triggered VLF emissions / D. Nunn // Planetary and Space Science. — 1974. — Mar. — Vol. 22, no. 3. — P. 349—378. — URL: [http://dx.doi.org/10.1016/0032-0633\(74\)90070-1](http://dx.doi.org/10.1016/0032-0633(74)90070-1).
43. Ground-based transmitter signals observed from space: Ducted or non-ducted? / M. A. Clilverd [et al.] // Journal of Geophysical Research: Space Physics. — 2008. — Apr. — Vol. 113, A4. — URL: <http://dx.doi.org/10.1029/2007JA012602>.
44. Very-Low-Frequency transmitters bifurcate energetic electron belt in near-earth space / M. Hua [et al.] // Nature Communications. — 2020. — Sept. — Vol. 11, no. 1. — URL: <http://dx.doi.org/10.1038/s41467-020-18545-y>.
45. VLF waves from ground-based transmitters observed by the Van Allen Probes: Statistical model and effects on plasmaspheric electrons / Q. Ma [et al.] // Geophysical Research Letters. — 2017. — July. — Vol. 44, no. 13. — P. 6483—6491. — URL: <http://dx.doi.org/10.1002/2017GL073885>.

46. An Investigation of VLF Transmitter Wave Power in the Inner Radiation Belt and Slot Region / N. P. Meredith [et al.] // Journal of Geophysical Research: Space Physics. — 2019. — July. — Vol. 124, no. 7. — P. 5246—5259. — URL: <http://dx.doi.org/10.1029/2019JA026715>.
47. *Karpman, V.* Particle precipitation caused by a single whistler-mode wave injected into the magnetosphere / V. Karpman, D. Shklyar // Planetary and Space Science. — 1977. — Apr. — Vol. 25, no. 4. — P. 395—403. — URL: [http://dx.doi.org/10.1016/0032-0633\(77\)90055-1](http://dx.doi.org/10.1016/0032-0633(77)90055-1).
48. Precipitation signatures of ground-based VLF transmitters / P. Kulkarni [et al.] // Journal of Geophysical Research: Space Physics. — 2008. — July. — Vol. 113, A7. — URL: <http://dx.doi.org/10.1029/2007JA012569>.
49. Radiation belt electron precipitation due to VLF transmitters: Satellite observations / J.-A. Sauvaud [et al.] // Geophysical Research Letters. — 2008. — May. — Vol. 35, no. 9. — URL: <http://dx.doi.org/10.1029/2008GL033194>.
50. *Shklyar, D.* Oblique Whistler-Mode Waves in the Inhomogeneous Magnetospheric Plasma: Resonant Interactions with Energetic Charged Particles / D. Shklyar, H. Matsumoto // Surveys in Geophysics. — 2009. — Mar. — Vol. 30, no. 2. — P. 55—104. — URL: <http://dx.doi.org/10.1007/s10712-009-9061-7>.
51. *Shklyar, D. R.* On the nature of particle energization via resonant wave-particle interaction in the inhomogeneous magnetospheric plasma / D. R. Shklyar // Annales Geophysicae. — 2011. — June. — Vol. 29, no. 6. — P. 1179—1188. — URL: <http://dx.doi.org/10.5194/angeo-29-1179-2011>.
52. Cyclotron acceleration of radiation belt electrons by whistlers / V. Y. Trakhtengerts [et al.] // Journal of Geophysical Research: Space Physics. — 2003. — Mar. — Vol. 108, A3. — URL: <http://dx.doi.org/10.1029/2002JA009559>.
53. *Smith, R. L.* Magnetospheric properties deduced from OGO 1 observations of ducted and nonducted whistlers / R. L. Smith, J. J. Angerami // Journal of Geophysical Research. — 1968. — Jan. — Vol. 73, no. 1. — P. 1—20. — URL: <http://dx.doi.org/10.1029/JA073i001p00001>.

54. *Thorne, R. M.* Landau damping of magnetospherically reflected whistlers / R. M. Thorne, R. B. Horne // Journal of Geophysical Research: Space Physics. — 1994. — Sept. — Vol. 99, A9. — P. 17249—17258. — URL: <http://dx.doi.org/10.1029/94JA01006>.
55. *Bortnik, J.* Frequency-time spectra of magnetospherically reflecting whistlers in the plasmasphere / J. Bortnik, U. S. Inan, T. F. Bell // Journal of Geophysical Research: Space Physics. — 2003. — Jan. — Vol. 108, A1. — URL: <http://dx.doi.org/10.1029/2002JA009387>.
56. *Shklyar, D. R.* Characteristic properties of Nu whistlers as inferred from observations and numerical modelling / D. R. Shklyar, J. Chum, F. Jiříček // Annales Geophysicae. — 2004. — Nov. — Vol. 22, no. 10. — P. 3589—3606. — URL: <http://dx.doi.org/10.5194/angeo-22-3589-2004>.
57. *Shklyar, D. R.* A Theory of Interaction Between Relativistic Electrons and Magnetospherically Reflected Whistlers / D. R. Shklyar // Journal of Geophysical Research: Space Physics. — 2021. — Feb. — Vol. 126, no. 2. — URL: <http://dx.doi.org/10.1029/2020JA028799>.
58. *Беспалов, П.* Альфвеновские мазеры / П. Беспалов, В. Трахтенгерц. — Горький : ИПФ АН СССР, 1986. — С. 190.
59. *Демехов, А. Г.* О генерации ОНЧ излучений с повышающейся и понижающейся частотой в магнитосферном циклотронном лазере в режиме лампы обратной волны / А. Г. Демехов // Известия вузов. Радиофизика. — 2010. — Т. 53, № 11. — С. 679—694.
60. Statistical properties of plasmaspheric hiss derived from Van Allen Probes data and their effects on radiation belt electron dynamics / W. Li [et al.] // Journal of Geophysical Research: Space Physics. — 2015. — May. — Vol. 120, no. 5. — P. 3393—3405. — URL: <http://dx.doi.org/10.1002/2015JA021048>.
61. Analytical Chorus Wave Model Derived from Van Allen Probe Observations / D. Wang [et al.] // Journal of Geophysical Research: Space Physics. — 2019. — Feb. — Vol. 124, no. 2. — P. 1063—1084. — URL: <http://dx.doi.org/10.1029/2018JA026183>.

62. *Omura, Y.* Relativistic turning acceleration of resonant electrons by coherent whistler mode waves in a dipole magnetic field / Y. Omura, N. Furuya, D. Summers // Journal of Geophysical Research: Space Physics. — 2007. — June. — Vol. 112, A6. — URL: <http://dx.doi.org/10.1029/2006JA012243>.
63. *Summers, D.* Pitch-angle scattering rates in planetary magnetospheres / D. Summers, R. L. Mace, M. A. Hellberg // Journal of Plasma Physics. — 2005. — May. — Vol. 71, no. 3. — P. 237—250. — URL: <http://dx.doi.org/10.1017/S0022377804003186>.
64. Timescale for MeV electron microburst loss during geomagnetic storms / R. M. Thorne [et al.] // Journal of Geophysical Research: Space Physics. — 2005. — Sept. — Vol. 110, A9. — URL: <http://dx.doi.org/10.1029/2004JA010882>.
65. *Lyons, L. R.* Pitch-angle diffusion of radiation belt electrons within the plasmasphere / L. R. Lyons, R. M. Thorne, C. F. Kennel // Journal of Geophysical Research. — 1972. — July. — Vol. 77, no. 19. — P. 3455—3474. — URL: <http://dx.doi.org/10.1029/JA077i019p03455>.
66. Modeling inward diffusion and slow decay of energetic electrons in the Earth's outer radiation belt / Q. Ma [et al.] // Geophysical Research Letters. — 2015. — Feb. — Vol. 42, no. 4. — P. 987—995. — URL: <http://dx.doi.org/10.1002/2014GL062977>.
67. Correlated whistler and electron plasma oscillation bursts detected on ISEE-3 / C. F. Kennel [et al.] // Geophysical Research Letters. — 1980. — Vol. 7, no. 2. — P. 129—132.
68. Fine structure of Langmuir waves produced by a solar electron event / D. A. Gurnett [et al.] // J. Geophys. Res. Space Phys. — 1993. — Vol. 98. — P. 5631—5637.
69. *Graham, D. B.* The Langmuir waves associated with the 1 December 2013 type II burst / D. B. Graham, I. H. Cairns // Journal of Geophysical Research: Space Physics. — 2015. — Vol. 120, no. 6. — P. 4126—4141.
70. Parametric instabilities of Langmuir waves observed by Freja / K. Stasiewicz [et al.] // Journal of Geophysical Research: Space Physics. — 1996. — Vol. 101, A10. — P. 21515—21525.

71. Small-scale bursts of Langmuir waves in the polar cap / T. M. Burinskaya [et al.] // *Advances in Space Research*. — 2003. — Mar. — Vol. 31, no. 5. — P. 1247—1252. — URL: [http://dx.doi.org/10.1016/S0273-1177\(02\)00937-7](http://dx.doi.org/10.1016/S0273-1177(02)00937-7).
72. *Schlatter, N. M.* On the relation of Langmuir turbulence radar signatures to auroral conditions / N. M. Schlatter, N. Ivchenko, I. Häggström // *Journal of Geophysical Research: Space Physics*. — 2014. — Vol. 119, no. 10. — P. 8499—8511.
73. Modulated electron plasma waves observed in the tail lobe: Geotail waveform observations / H. Kojima [et al.] // *Geophysical Research Letters*. — 1997. — Vol. 24, no. 23. — P. 3049—3052.
74. *Kellogg, P. J.* Nearly monochromatic waves in the distant tail of the Earth / P. J. Kellogg, S. D. Bale // *Journal of Geophysical Research: Space Physics*. — 2004. — Vol. 109, A4.
75. *Fijalkow, E.* A numerical solution to the Vlasov equation / E. Fijalkow // *Computer Physics Communications*. — 1999. — Feb. — Vol. 116, no. 2/3. — P. 319—328. — URL: [http://dx.doi.org/10.1016/S0010-4655\(98\)00146-5](http://dx.doi.org/10.1016/S0010-4655(98)00146-5).
76. *Nakamura, T.* Cubic interpolated propagation scheme for solving the hyper-dimensional Vlasov—Poisson equation in phase space / T. Nakamura, T. Yabe // *Computer Physics Communications*. — 1999. — Aug. — Vol. 120, no. 2/3. — P. 122—154. — URL: [http://dx.doi.org/10.1016/s0010-4655\(99\)00247-7](http://dx.doi.org/10.1016/s0010-4655(99)00247-7).
77. *Pohn, E.* Eulerian Vlasov codes / E. Pohn, M. Shoucri, G. Kamelander // *Computer Physics Communications*. — 2005. — Mar. — Vol. 166, no. 2. — P. 81—93. — URL: <http://dx.doi.org/10.1016/j.cpc.2004.10.009>.
78. *Umeda, T.* Vlasov simulation of Langmuir wave packets / T. Umeda // *Nonlinear Processes in Geophysics*. — 2007. — Oct. — Vol. 14, no. 5. — P. 671—679. — URL: <http://dx.doi.org/10.5194/npg-14-671-2007>.
79. *Karpman, V.* Effects of Nonlinear Interaction of Monochromatic Waves with Resonant Particles in the Inhomogeneous Plasma / V. Karpman, J. Istomin, D. Shklyar // *Physica Scripta*. — 1975. — May. — Vol. 11, no. 5. — P. 278—284. — URL: <http://dx.doi.org/10.1088/0031-8949/11/5/008>.

80. *Шафранов, В.* Электромагнитные волны в плазме / В. Шафранов // Вопросы теории плазмы. Т. 3 / под ред. М. Леонтович. — Москва : Атомиздат, 1963. — С. 3—140.
81. *Электродинамика плазмы* / А. Ахиезер [и др.]. — 2-е, перераб. — Москва : Наука, 1974. — С. 720.
82. *Ландау, Л. Д.* Теория поля. Т. II / Л. Д. Ландау, Е. М. Лифшиц. — 8-е, стереотипное. — Москва : Физматлит, 2012. — С. 536. — (Теоретическая физика).
83. *Ландау, Л. Д.* Электродинамика сплошных сред. Т. VIII / Л. Д. Ландау, Е. М. Лифшиц. — 4-е, стереотипное. — Физматлит, 2005. — С. 656. — (Теоретическая физика).
84. *Пасманик, Д. Л.* Влияние эффектов распространения свистовых волн в магнитосфере Земли на их циклотронное усиление / Д. Л. Пасманик, А. Г. Демехов // Известия вузов. Радиофизика. — 2020. — Т. 63, № 4. — С. 267—284.
85. *R. Z. Sagdeev, R.* On the Instability of a Plasma with an Anisotropic Distribution of Velocities in a Magnetic Field / R. R. Z. Sagdeev, S. V.D. // Soviet Physics JETP. — 1961. — Vol. 12, no. 1. — P. 130—132. — Originally published in Zh. Eksp. Teor. Fiz. 39, 177 (1960).
86. Alpha Transmitter Signal Reflection and Triggered Emissions / W. Gu [et al.] // Geophysical Research Letters. — 2020. — Nov. — Vol. 47, no. 23. — URL: <http://dx.doi.org/10.1029/2020GL090165>.
87. Study of the lower hybrid resonance frequency over the regions of gathering earthquakes using DEMETER data / D. Vavilov [et al.] // Journal of Atmospheric and Solar-Terrestrial Physics. — 2013. — Aug. — Vol. 100/101. — P. 1—12. — URL: <http://dx.doi.org/10.1016/j.jastp.2013.03.019>.
88. The Magnetic Electron Ion Spectrometer (MagEIS) Instruments Aboard the Radiation Belt Storm Probes (RBSP) Spacecraft / J. B. Blake [et al.] // Space Science Reviews. — 2013. — June. — Vol. 179, no. 1—4. — P. 383—421. — URL: <http://dx.doi.org/10.1007/s11214-013-9991-8>.

89. Experimental study of the relationship between energetic electrons and ELF waves observed on board GEOS: A support to quasi-linear theory / N. Cornilleau-Wehrin [et al.] // Journal of Geophysical Research: Space Physics. — 1985. — May. — Vol. 90, A5. — P. 4141—4154. — URL: <http://dx.doi.org/10.1029/ja090ia05p04141>.
90. *Shklyar, D.* Self-consistent amplitude profile of ducted VLF transmitter signal due to resonant interaction with energetic electrons in the magnetosphere / D. Shklyar, A. Luzhkovskiy // Advances in Space Research. — 2023. — Jan. — Vol. 71, no. 1. — P. 228—243. — URL: <http://dx.doi.org/10.1016/j.asr.2022.08.081>.
91. Helium, Oxygen, Proton, and Electron (HOPE) Mass Spectrometer for the Radiation Belt Storm Probes Mission / H. O. Funsten [et al.] // Space Science Reviews. — 2013. — Mar. — Vol. 179, no. 1—4. — P. 423—484. — URL: <http://dx.doi.org/10.1007/s11214-013-9968-7>.
92. Source characteristics of ELF/VLF chorus / D. S. Lauben [et al.] // Journal of Geophysical Research: Space Physics. — 2002. — Dec. — Vol. 107, A12. — URL: <http://dx.doi.org/10.1029/2000ja003019>.
93. *LeDocq, M. J.* Chorus source locations from VLF Poynting flux measurements with the Polar spacecraft / M. J. LeDocq, D. A. Gurnett, G. B. Hospodarsky // Geophysical Research Letters. — 1998. — Nov. — Vol. 25, no. 21. — P. 4063—4066. — URL: <http://dx.doi.org/10.1029/1998gl900071>.
94. Central position of the source region of storm-time chorus / O. Santolík [et al.] // Planetary and Space Science. — 2005. — Jan. — Vol. 53, no. 1—3. — P. 299—305. — URL: <http://dx.doi.org/10.1016/j.pss.2004.09.056>.
95. The Effects of Thermal Electrons on Whistler Mode Waves Excited by Anisotropic Hot Electrons: Linear Theory and 2-D PIC Simulations / K. Fan [et al.] // Journal of Geophysical Research: Space Physics. — 2019. — July. — Vol. 124, no. 7. — P. 5234—5245. — URL: <http://dx.doi.org/10.1029/2019ja026463>.
96. *Kimura, I.* Effects of Ions on Whistler-Mode Ray Tracing / I. Kimura // Radio Science. — 1966. — Mar. — Vol. 1, no. 3. — P. 269—284. — URL: <http://dx.doi.org/10.1002/rds196613269>.

97. *Meredith, N. P.* Substorm dependence of chorus amplitudes: Implications for the acceleration of electrons to relativistic energies / N. P. Meredith, R. B. Horne, R. R. Anderson // Journal of Geophysical Research: Space Physics. — 2001. — July. — Vol. 106, A7. — P. 13165—13178. — URL: <http://dx.doi.org/10.1029/2000JA900156>.
98. The quasi-electrostatic mode of chorus waves and electron nonlinear acceleration / O. V. Agapitov [et al.] // Journal of Geophysical Research: Space Physics. — 2014. — Mar. — Vol. 119, no. 3. — P. 1606—1626. — URL: <http://dx.doi.org/10.1002/2013ja019223>.
99. Discovery of very large amplitude whistler-mode waves in Earth's radiation belts / C. Cattell [et al.] // Geophysical Research Letters. — 2008. — Jan. — Vol. 35, no. 1. — URL: <http://dx.doi.org/10.1029/2007gl032009>.
100. *Cully, C. M.* THEMIS observations of long-lived regions of large-amplitude whistler waves in the inner magnetosphere / C. M. Cully, J. W. Bonnell, R. E. Ergun // Geophysical Research Letters. — 2008. — June. — Vol. 35, no. 17. — URL: <http://dx.doi.org/10.1029/2008gl033643>.
101. *Shklyar, D. R.* Energy transfer from lower energy to higher-energy electrons mediated by whistler waves in the radiation belts / D. R. Shklyar // Journal of Geophysical Research: Space Physics. — 2017. — Jan. — Vol. 122, no. 1. — P. 640—655. — URL: <http://dx.doi.org/10.1002/2016JA023263>.
102. Oblique Whistler-Mode Waves in the Earth's Inner Magnetosphere: Energy Distribution, Origins, and Role in Radiation Belt Dynamics / A. Artemyev [et al.] // Space Science Reviews. — 2016. — Apr. — Vol. 200, no. 1—4. — P. 261—355. — URL: <http://dx.doi.org/10.1007/s11214-016-0252-5>.
103. Plasma observations at the Earth's magnetic equator / R. C. Olsen [et al.] // Journal of Geophysical Research: Space Physics. — 1987. — Mar. — Vol. 92, A3. — P. 2385—2407. — URL: <http://dx.doi.org/10.1029/ja092ia03p02385>.
104. *Luzhkovskiy, A. A.* Energy Transfer Between Various Electron Populations Via Resonant Interaction With Whistler Mode Wave / A. A. Luzhkovskiy, D. R. Shklyar // Journal of Geophysical Research: Space Physics. — 2023. — Dec. — Vol. 128, no. 12. — URL: <http://dx.doi.org/10.1029/2023JA031962>.

105. *Mikhailovskii, A.* Theory of Plasma Instabilities, Vol. 1: Instabilities of a Homogeneous Plasma. Vol. 1 / A. Mikhailovskii. — Consultant Bureau, 1971.
106. *Vlasov, A.* On the Kinetic Theory of an Assembly of Particles with Collective Interaction / A. Vlasov // Journal of Physics USSR. — 1945. — Vol. 9. — P. 25—40.
107. *Владимиров, В.* Уравнения математической физики / В. Владимиров. — Москва : Наука, 1988. — С. 512.
108. *Mazitov, R.* Damping of plasma waves / R. Mazitov // Journal of Applied Mechanics and Technical Physics. — 1965. — Vol. 6, no. 1. — P. 22—25. — URL: <http://dx.doi.org/10.1007/BF00914365>.
109. *Al'tshul, L. M.* Theory of nonlinear oscillations in a collisionless plasma. / L. M. Al'tshul, V. I. Karpman // Journal of Experimental and Theoretical Physics. — 1965. — Vol. 49. — P. 515—528.
110. *Чириков, В. В.* Нелинейный резонанс. Учебное пособие / В. В. Чириков. — НГУ, 1977. — С. 1—82.
111. *Luzhkovskiy, A. A.* Self-consistent description of Langmuir waves in an inhomogeneous plasma / A. A. Luzhkovskiy, D. R. Shklyar // Physics of Plasmas. — 2025. — July. — Vol. 32, no. 7. — URL: <http://dx.doi.org/10.1063/5.0266890>.

Приложение А

Вычисление коэффициентов b_n, c_n разложения функции $\Phi(\epsilon)$

Вычислим коэффициенты Фурье в разложении (2.40). Следует иметь в виду, что интеграл (2.39), определяющий функцию $\Phi(\epsilon)$, является несобственным и должен пониматься в смысле предела. По определению:

$$\begin{aligned} b_0 &= \frac{1}{2\pi} \int_a^{a+2\pi} \Phi(\epsilon) d\epsilon ; \\ b_n &= \frac{1}{\pi} \int_a^{a+2\pi} \Phi(\epsilon) \cos n\epsilon d\epsilon ; \\ c_n &= \frac{1}{\pi} \int_a^{a+2\pi} \Phi(\epsilon) \sin n\epsilon d\epsilon . \end{aligned}$$

Используя для $\Phi(\epsilon)$ представление (2.39) и меняя порядок интегрирования, получаем для коэффициента b_0 :

$$\begin{aligned} b_0 &= \frac{1}{2\pi} \lim_{\mathcal{A} \rightarrow \infty} \int_a^{a+2\pi} d\epsilon \int_{-\mathcal{A}}^{\zeta_c(\epsilon)} \frac{\cos x dx}{\sqrt{\epsilon - x + \beta \sin x}} = \\ &= \frac{1}{2\pi} \lim_{\mathcal{A} \rightarrow \infty} \left(\int_{-\mathcal{A}}^{\zeta'_a} dx \cos x \int_a^{a+2\pi} \frac{d\epsilon}{\sqrt{\epsilon - x + \beta \sin x}} + \right. \\ &\quad \left. + \int_{\zeta'_a}^{\zeta_a+2\pi} dx \cos x \int_{x-\beta \sin x}^{a+2\pi} \frac{d\epsilon}{\sqrt{\epsilon - x + \beta \sin x}} \right) = \\ &= -\frac{1}{\pi} \int_{\zeta_a}^{\zeta'_a} dx \cos x \sqrt{a - x + \beta \sin x} . \end{aligned} \tag{A.1}$$

Подставляя

$$\cos x = \frac{1}{\beta} (\beta \cos x - 1 + 1) \tag{A.2}$$

и учитывая, что $(\beta \cos x - 1)$ является производной подкоренного выражения, получаем из (A.1):

$$b_0 = -\frac{1}{\pi\beta} \int_{\zeta_a}^{\zeta'_a} dx \sqrt{a - x + \beta \sin x} . \quad (\text{A.3})$$

Используемое свойство можно сформулировать в более общем виде. Для любой функции $f(\beta \sin x - x)$:

$$\int_{\zeta_a}^{\zeta'_a} f(\beta \sin x - x)(\beta \cos x - 1)dx = \int_a^{-a} f(y)dy + \int_{-a}^a f(y)dy = 0 , \quad (\text{A.4})$$

и, следовательно,

$$\int_{\zeta_a}^{\zeta'_a} \cos x f(\beta \sin x - x)dx = \frac{1}{\beta} \int_{\zeta_a}^{\zeta'_a} f(\beta \sin x - x)dx . \quad (\text{A.5})$$

Для коэффициента b_n , используя представление (2.39) и меняя порядок интегрирования, получаем:

$$\begin{aligned} b_n = \frac{1}{\pi} \lim_{\mathcal{A} \rightarrow \infty} & \left(\int_{-\mathcal{A}}^{\zeta'_a} dx \cos x \int_a^{a+2\pi} \frac{d\epsilon \cos n\epsilon}{\sqrt{\epsilon - x + \beta \sin x}} + \right. \\ & \left. + \int_{\zeta'_a}^{\zeta_a+2\pi} dx \cos x \int_{x-\beta \sin x}^{a+2\pi} \frac{d\epsilon \cos n\epsilon}{\sqrt{\epsilon - x + \beta \sin x}} \right) . \end{aligned} \quad (\text{A.6})$$

Воспользовавшись неопределенным интегралом

$$\begin{aligned} \int \frac{\cos n\epsilon d\epsilon}{\sqrt{\epsilon - x + \beta \sin x}} = \sqrt{\frac{2\pi}{n}} & \left[\cos(nx - \beta n \sin x) \mathcal{C}(\sqrt{n}u_\epsilon) - \right. \\ & \left. - \sin(nx - \beta n \sin x) \mathcal{S}(\sqrt{n}u_\epsilon) \right] , \end{aligned} \quad (\text{A.7})$$

где $u_\epsilon = \sqrt{\epsilon - x + \beta \sin x}$, и учитывая, что

$$\mathcal{C}(\infty) = \mathcal{S}(\infty) = \frac{1}{2} \quad (\text{A.8})$$

получаем из (A.6) (как и ранее, $u_a = \sqrt{a - x + \beta \sin x}$):

$$\begin{aligned}
 b_n = & \sqrt{\frac{2\pi}{n}} \frac{1}{2\pi} \int_{-\mathcal{A}}^{-\mathcal{A}+2\pi} dx \cos x \cos(nx - \beta n \sin x) - \\
 & - \sqrt{\frac{2}{\pi n}} \int_{\zeta_a}^{\zeta'_a} dx \cos x \cdot \left\{ \cos(nx - \beta n \sin x) \mathcal{C}(\sqrt{n}u_a) - \right. \\
 & \left. - \sin(nx - \beta n \sin x) \mathcal{S}(\sqrt{n}u_a) \right\}. \tag{A.9}
 \end{aligned}$$

Таким образом, использование (A.4)-(A.9) вместе с определением функции Бесселя

$$\frac{1}{\pi} \int_0^\pi dx \cos(nx - \beta n \sin x) = J_n(\beta n)$$

приводит к доказательству выражения (2.42). Аналогично, следуя тем же шагам и технике, но используя неопределенный интеграл

$$\begin{aligned}
 \int \frac{\sin n\epsilon d\epsilon}{\sqrt{\epsilon - x + \beta \sin x}} = & \sqrt{\frac{2\pi}{n}} \left[\cos(nx - \beta n \sin x) \mathcal{S}(\sqrt{n}u_\epsilon) + \right. \\
 & \left. + \sin(nx - \beta n \sin x) \mathcal{C}(\sqrt{n}u_\epsilon) \right], \tag{A.10}
 \end{aligned}$$

получаем выражение (2.43) для коэффициента c_n .

Как было указано в разделе 2.2, интегралы, возникающие при вычислении вклада в инкремент из области пролетных частиц, сводятся к коэффициентам

b_0 , b_n и c_n (см. (2.51)). Начнем с интеграла:

$$\begin{aligned}
& \int_{S_{UT}} \int \frac{d\epsilon dx \cos x}{\sqrt{\epsilon - x + \beta \sin x}} = \lim_{\mathcal{A} \rightarrow \infty} \left(\int_{\zeta_a}^{\zeta'_a} dx \cos x \int_a^{\mathcal{A}} \frac{d\epsilon}{\sqrt{\epsilon - x + \beta \sin x}} + \right. \\
& + \left. \int_{\zeta'_a}^{\zeta_a + 2\pi} dx \cos x \int_{x - \beta \sin x}^{\mathcal{A}} \frac{d\epsilon}{\sqrt{\epsilon - x + \beta \sin x}} \right) = \\
& = \lim_{\mathcal{A} \rightarrow \infty} 2 \left(\int_{\zeta_a}^{\zeta'_a} dx \cos x \left(\sqrt{\mathcal{A} - x + \beta \sin x} - \sqrt{a - x + \beta \sin x} \right) + \right. \\
& + \left. \int_{\zeta'_a}^{\zeta_a + 2\pi} dx \cos x \sqrt{\mathcal{A} - x + \beta \sin x} \right) = \\
& = 2 \lim_{\mathcal{A} \rightarrow \infty} \int_{\zeta_a}^{\zeta_a + 2\pi} dx \cos x \sqrt{\mathcal{A} - x + \beta \sin x} - 2 \int_{\zeta_a}^{\zeta'_a} dx \cos x \sqrt{a - x + \beta \sin x} = \\
& = -\frac{2}{\beta} \int_{\zeta_a}^{\zeta'_a} dx \sqrt{a - x + \beta \sin x},
\end{aligned} \tag{A.11}$$

где учтено, что

$$\lim_{\mathcal{A} \rightarrow \infty} \left(\int_{\zeta_a}^{\zeta_a + 2\pi} dx \cos x \sqrt{\mathcal{A} - x + \beta \sin x} \right) = 0$$

и использовано свойство (A.4).

Из оставшихся двух интегралов в (2.51) рассмотрим, например, последний:

$$\begin{aligned}
& \int_{S_{UT}} \int \frac{d\epsilon dx \cos x \sin n\epsilon}{\sqrt{\epsilon - x + \beta \sin x}} = \lim_{\mathcal{A} \rightarrow \infty} \left(\int_{\zeta_a}^{\zeta'_a} dx \cos x \int_a^{\mathcal{A}} \frac{\sin n\epsilon d\epsilon}{\sqrt{\epsilon - x + \beta \sin x}} + \right. \\
& + \left. \int_{\zeta'_a}^{\zeta_a + 2\pi} dx \cos x \int_{x - \beta \sin x}^{\mathcal{A}} \frac{\sin n\epsilon d\epsilon}{\sqrt{\epsilon - x + \beta \sin x}} \right) = \\
& = \sqrt{\frac{\pi}{2n}} \int_{-\mathcal{A}}^{-\mathcal{A} + 2\pi} dx \cos x \cos(nx - \beta n \sin x) - \\
& - \sqrt{\frac{2\pi}{n}} \int_{\zeta_a}^{\zeta'_a} dx \cos x \cdot [\cos(nx - \beta n \sin x) \mathcal{S}(\sqrt{n}u_a) + \sin(nx - \beta n \sin x) \mathcal{C}(\sqrt{n}u_a)] ,
\end{aligned} \tag{A.12}$$

где были использованы асимптотические значения (A.8) интегралов Френеля, а также неопределенный интеграл (A.10). Используя (A.4) и определение функции Бесселя, получаем:

$$\begin{aligned} \int_{S_{UT}} \int \frac{d\epsilon dx \cos x \sin n\epsilon}{\sqrt{\epsilon - x + \beta \sin x}} &= \sqrt{\frac{2\pi}{n}} \frac{\pi}{\beta} J_n(\beta n) - \sqrt{\frac{2\pi}{n}} \frac{1}{\beta} \int_{\zeta_a}^{\zeta'_a} dx \times \\ &\times [\cos(nx - \beta n \sin x) \mathcal{S}(\sqrt{n}u_a) + \sin(nx - \beta n \sin x) \mathcal{C}(\sqrt{n}u_a)] . \end{aligned} \quad (\text{A.13})$$

Аналогично, используя неопределенный интеграл (A.7), получаем:

$$\begin{aligned} \int_{S_{UT}} \int \frac{d\epsilon dx \cos x \cos n\epsilon}{\sqrt{\epsilon - x + \beta \sin x}} &= \sqrt{\frac{2\pi}{n}} \frac{\pi}{\beta} J_n(\beta n) - \sqrt{\frac{2\pi}{n}} \frac{1}{\beta} \int_{\zeta_a}^{\zeta'_a} dx \times \\ &\times [\cos(nx - \beta n \sin x) \mathcal{C}(\sqrt{n}u_a) - \sin(nx - \beta n \sin x) \mathcal{S}(\sqrt{n}u_a)] . \end{aligned} \quad (\text{A.14})$$

Сравнение (A.14), (A.13) с выражениями (2.42), (2.43) для коэффициентов Фурье b_n, c_n подтверждает справедливость соотношений (2.51).

Приложение Б

Закон сохранения энергии для системы уравнений (4.12)

Для вывода закона сохранения, связанного с системой (4.12), исходим из уравнения (4.8). Умножая это уравнение на $\partial\mathcal{A}/\partial t$ и интегрируя по координате x по всей длине системы, получаем

$$\begin{aligned} \frac{1}{2} \int \left[\frac{\partial}{\partial t} \left(\frac{\partial\mathcal{A}(x,t)}{\partial t} \right)^2 - 3v_{\text{Tc}}^2 \frac{\partial^2\mathcal{A}(x,t)}{\partial x^2} \frac{\partial\mathcal{A}(x,t)}{\partial t} + \omega_{pc}^2(x) \frac{\partial\mathcal{A}(x,t)^2}{\partial t} \right] dx = \\ = 4\pi c \int \delta j_{\text{res}} \frac{\partial\mathcal{A}(x,t)}{\partial t} dx . \end{aligned} \quad (\text{Б.1})$$

Интегрируя второй член в левой части (Б.1) по частям с учетом периодичности волнового поля и принимая во внимание, что $\partial\mathcal{A}(x,t)/\partial t = -c\mathcal{E}(x,t)$, получаем

$$\frac{dw_{\text{E}}}{dt} = - \int \delta j_{\text{res}} \mathcal{E} dx , \quad (\text{Б.2})$$

где энергия волны w_{E} определяется выражением (4.15).

Связь между правой частью уравнения (Б.2) и величиной δw_{res} (4.14) устанавливается стандартным образом. Из кинетического уравнения для резонансных частиц (второе уравнение в (4.12)) и уравнения для начальной функции распределения f_0

$$v \frac{\partial f_0(x,v)}{\partial x} + \frac{\mathcal{F}}{m} \frac{\partial f_0(x,v)}{\partial v} = 0 \quad (\text{Б.3})$$

имеем

$$\frac{\partial(f-f_0)}{\partial t} + v \frac{\partial(f-f_0)}{\partial x} + \left(\frac{\mathcal{F}}{m} - \frac{e\mathcal{E}}{m} \right) \frac{\partial(f-f_0)}{\partial v} = \frac{e\mathcal{E}}{m} \frac{\partial f_0}{\partial v} . \quad (\text{Б.4})$$

Умножая это уравнение на $(mv^2/2 + h(x))$ и интегрируя по скорости в резонансной области, а затем по координате по всей длине системы, получаем

$$\begin{aligned} & \int dx \int_{\Delta v_{\text{res}}} \frac{\partial(f-f_0)}{\partial t} \left(\frac{mv^2}{2} + h(x) \right) dv + \\ & + \int dx \int_{\Delta v_{\text{res}}} v \frac{\partial(f-f_0)}{\partial x} \left(\frac{mv^2}{2} + h(x) \right) dv + \\ & + \int dx \int_{\Delta v_{\text{res}}} \left(\frac{\mathcal{F}}{m} - \frac{e\mathcal{E}}{m} \right) \frac{\partial(f-f_0)}{\partial v} \left(\frac{mv^2}{2} + h(x) \right) dv = \\ & = \int dx \int_{\Delta v_{\text{res}}} \frac{e\mathcal{E}}{m} \frac{\partial f_0}{\partial v} \left(\frac{mv^2}{2} + h(x) \right) dv . \end{aligned} \quad (\text{Б.5})$$

Первый член в левой части (Б.5) есть не что иное, как $d\delta w_{\text{res}}/dt$. После интегрирования второго члена по частям по x с учетом периодичности подынтегрального выражения по координате x и интегрирования третьего члена по частям по v с учетом того, что $f = f_0$ на границах резонансной области, члены, пропорциональные силе неоднородности $\mathcal{F}$, сокращаются, и получаем

$$\frac{d\delta w_{\text{res}}}{dt} - \int \delta j_{\text{res}} \mathcal{E} dx = \int dx \int_{\Delta v_{\text{res}}} \frac{e\mathcal{E}}{m} \frac{\partial f_0}{\partial v} \left(\frac{mv^2}{2} + h(x) \right) dv. \quad (\text{Б.6})$$

Подынтегральное выражение в правой части пропорционально произведению быстро меняющейся по x функции с нулевым средним значением, $\mathcal{E}$, и медленно меняющейся по x функции. Подынтегральное выражение как функция x не имеет точки стационарной фазы, и, следовательно, интеграл по x мал по сравнению со вторым членом в левой части (Б.6), который содержит интеграл от произведения синфазных колебаний волнового поля и функции распределения резонансных частиц. Пренебрегая правой частью уравнения (Б.6) и объединяя его с (Б.2), получаем закон сохранения (4.16).