Федеральное государственное автономное образовательное учреждение
высшего образования “Национальный исследовательский университет
“Высшая школа экономики” и
Федеральное государственное бюджетное учреждение науки
Институт космических исследований Российской академии наук

На правах рукописи

Артеха Наталья Сергеевна

Особенности распространения и резонансного взаимодействия с частицами электромагнитных волн в магнитоактивной плазме произвольной плотности

Специальность 1.3.1.
«Физика космоса, астрономия»

Диссертация на соискание ученой степени
кандидата физико-математических наук

Научный руководитель:

доктор физико-математических наук

Шкляр Давид Рувимович

Москва
2026

Оглавление

Введение **4**

Актуальность темы исследования 10

Цели и задачи работы 11

Научная новизна работы 11

Теоретическая и практическая значимость 12

Методы исследования и достоверность результатов 13

Основные положения, выносимые на защиту 14

Апробация результатов исследования 15

Личный вклад автора 17

Публикации автора по теме диссертации 17

Структура и объём диссертации 18

Глава 1. Основные соотношения для волн в холодной магнитоактивной бесстолкновительной плазме **19**

1.1 Кинетическое уравнение Больцмана – Власова и система уравнений Максвелла 19

1.2 Дисперсионные свойства холодной магнитоактивной бесстолкновительной плазмы 21

1.3 Приближённые аналитические выражения для показателя преломления 27

Глава 2. Кинетическое описание свистовой волны, распространяющейся в плазме вдоль магнитного поля **32**

2.1 Вывод базовых уравнений 33

2.2 Дисперсионное уравнение для свистовых волн 38

2.3 Расчёт инкремента свистовых волн на основе данных спутников Van Allen Probe A и MMS 44

2.4 Выводы к Главе 2 55

Глава 3. Дисперсионные характеристики низкочастотных электронных волн в магнитоактивной плазме произвольной плотности **57**

3.1 Основные уравнения 58
3.2 Дисперсионные свойства низкочастотных электронных волн . . . 60
3.3 Выводы к Главе 3 74

Глава 4. Генерация медленных необыкновенных волн в неоднородной плазме (магнитосфере) 76
4.1 Некоторые характеристики медленных необыкновенных волн . . 77
4.2 Генерация квази-электростатических медленных необыкновенных волн каппа-распределением с конусом потерь 82
4.3 Уравнения движения релятивистских электронов в поле медленной необыкновенной волны 100
4.4 Резонансные условия и интегралы движения 108
4.5 Условия применимости системы уравнений 111
4.6 Инкремент медленных необыкновенных волн 113
4.7 Выводы к Главе 4 120

Глава 5. Объяснение спектральных особенностей верхнегибридных волн, наблюдавшихся на спутниках Van Allen Probes 123
5.1 Излучение вблизи верхнего гибридного резонанса на спектрограммах Van Allen Probes 123
5.2 Спектрограммы и инкремент верхнегибридных волн 126
5.3 Выводы к Главе 5 134

Заключение 136

Список литературы 139

Введение

Космическая плазма, представляя собой доминирующую форму видимой материи Вселенной [1–5], определяет условия распространения электромагнитных волн и их взаимодействия с частицами в космическом пространстве. Некоторые свойства космической плазмы могут быть исследованы прямыми измерениями с использованием космических аппаратов, другие могут быть смоделированы и изучены в лабораторных экспериментах [6]. Кроме того, исследование плазмы может проводиться с помощью численного моделирования. Плазменные процессы в околоземном космическом пространстве регулярно проявляют себя, например, в виде регистрируемых когерентных хоровых волн, широкополосного плазмосферного хисса, а также приводят к наблюдаемым полярным сияниям [7] в ионосфере Земли в области аврорального овала [8]. Последние вызваны взаимодействием заряженных частиц с верхними слоями атмосферы. Открытие важной особенности земной магнитосферы — радиационных поясов — стало возможным благодаря первым прямым измерениям в космосе [9; 10]. Радиационные пояса — это области, в которых магнитное поле Земли удерживает высокоэнергичные заряженные частицы, в первую очередь электроны и протоны. Эти зоны с повышенной радиационной активностью (при их пересечении) могут оказывать негативное влияние на всё живое и на оборудование космических аппаратов (солнечные батареи, интегральные схемы, датчики) [11]. По сути, околоземное космическое пространство представляет собой сложную динамичную систему, где взаимодействуют излучение Солнца, межпланетная среда, магнитное поле Земли и верхние слои её атмосферы. Генерируемые в космической плазме возмущения и волны также могут влиять на работу наземных и спутниковых систем связи — на распространение радиоволн и сигналов навигационных систем [12]. Поэтому понимание происходящих плазменных процессов имеет не только фундаментальное научное, но и важнейшее прикладное значение для обеспечения безопасности спутниковых группировок, пилотируемой космонавтики и наземных технологических систем.

Основной набор экспериментальных научных данных о магнитном поле, параметрах космической плазмы и протекающих волновых процессах в Солнечной системе (включая магнитосферы Земли, Юпитера, Сатурна) был полу-

чен в многочисленных космических миссиях [13–23], таких как спутники серий Спутник, Explorer, Alouette, Космос, Интеркосмос, аппаратами Луна, Pioneer, Voyager, Araks, Juno, Cassini, Apex, Интербол, Cluster, THEMIS (Time History of Events and Macroscale Interactions during Substorms), SWARM, RBSP/Van Allen Probes (Radiation Belt Storm Probes), ERG/Arase (Exploration of energization and Radiation in Geospace), MMS (Magnetospheric Multiscale), AETHER, EZIE, Ионосфера-М и других, а также в экспериментах на борту орбитальных станций. Космические миссии не только предоставляют богатый материал для исследований, но и стимулируют дальнейшее развитие теории, численных методов и экспериментальной техники.

Плазму во многих областях магнитосферы Земли и других планет Солнечной системы можно считать бесстолкновительной магнитоактивной средой. Довольно часто плазму можно представить состоящей из двух компонент: относительно плотной "холодной" ("фоновой") компоненты, определяющей дисперсию волн, и "горячей" компоненты малой плотности, определяющей затухание или усиление волн, но мало влияющей на их дисперсию [24]. В отсутствие последнего предположения, исследование дисперсионных характеристик и инкрементов волн является гораздо более сложной задачей, которая для электростатических электронно-циклотронных волн детально исследована в работах [25; 26]. Аналогичная задача для свистовых волн, распространяющихся вдоль внешнего магнитного поля, рассмотрена во второй главе диссертации.

Как известно, в холодной магнитоактивной плазме существует пять волновых мод, топология показателя преломления которых зависит от отношения электронной плазменной частоты к электронной гирочастоте. Дисперсионные и поляризационные свойства волн лежат в основе исследований волновых процессов в плазме, таких как генерация и распространение волн, резонансное взаимодействие волны и частиц, нелинейное взаимодействие волн. Поскольку ионы не влияют на дисперсию волн в частотном диапазоне много выше нижнегибридной частоты [27; 28], то волны с такими частотами называются электронными волнами. К ним относятся 4 моды: свистовая, медленная необыкновенная, обыкновенная и быстрая необыкновенная моды, которых и касаются исследования данной диссертации; при этом резонансное взаимодействие рассматривается только для свистов и медленных необыкновенных волн, для которых

показатель преломления $N > 1$.

Низкочастотные электронные волны, распространяющиеся в ионосфере и магнитосфере Земли и других планет, являются распространённым волновым явлением в космической плазме [29–35]. Так, волны свистовой моды возникают в результате развития циклотронной неустойчивости в радиационных поясах Земли [36], генерируются молниевыми разрядами [37; 38] и наземными передатчиками [39–43] и могут регистрироваться на больших удалениях от источника своего возникновения [44], в том числе, на спутниках. Низкочастотные волны свистовой моды оказывают заметное влияние на динамику космической плазмы [45–47], в том числе, играют существенную роль в процессах ускорения заряженных частиц в радиационных поясах [48–53]. Вследствие этого, проблема исследования свистовых волн до сих пор сохраняет свою актуальность [54–60]. Поскольку в большей части плазмосферы Земли плазма является плотной (электронная плазменная частота много больше циклотронной частоты), то большинство результатов по исследованию свистовой моды относится именно к случаю плотной плазмы [29]. Так, например, были выведены явные выражения для показателя преломления волны, закона дисперсии, плотности энергии и поляризационных коэффициентов. Кроме того, получены важные результаты, касающиеся угла Стори (угла волновой нормали, соответствующего максимальному отклонению групповой скорости от направления внешнего магнитного поля $\mathbf{B}_0$) [61], угла Жандрэна (ненулевого угла волновой нормали свистовых волн, при котором групповая скорость направлена вдоль $\mathbf{B}_0$) [62], явления нижнегибридного отражения, приводящего к формированию магнитосферно-отражённых свистов [63–65].

Тем не менее, также существуют области магнитосферы Земли, например, авроральная область, где плазму можно считать разреженной (когда электронная плазменная частота меньше циклотронной). Подобная ситуация может реализоваться и у других планет. Так, по данным миссий Voyager 1 и 2 [13] такая область была обнаружена у Юпитера на расстояниях $18.5R_{\text{ю}} < R < 22.5R_{\text{ю}}$. Современные данные, полученные космическими миссиями Juno в магнитосфере Юпитера [66–69] и Cassini в магнитосфере Сатурна [70; 71], подтверждают существование таких областей. Это, например, лобы магнитодиска Юпитера и авроральные области, где присутствуют сильные магнитные поля Юпитера

и Сатурна, в то время как плотность плазмы достаточно мала. Таким образом, изучение волн в разреженной плазме, помимо чисто теоретического интереса, может иметь и свои практические приложения к волновым процессам в космической плазме [72–75], включая околоземное пространство [76]. В данной диссертации также уделяется внимание изучению этих вопросов.

Помимо свистовых волн значительная часть диссертации посвящена исследованию медленных необыкновенных (МН) волн. МН волны включают верхнегибридные волны, которые являются одним из наиболее часто наблюдаемых волновых явлений в магнитосфере Земли [77]. Механизмы генерации верхнегибридного излучения до сих пор обсуждаются. Интенсивные квазиэлектростатические волны вблизи частоты верхнегибридного резонанса наблюдаются в локализованных областях за плазмопаузой со средней радиальной протяжённостью около $0.35R_з$ на широтах от экватора и до 50° при всех локальных временах [78]. Они характеризуются высокой интенсивностью $\sim 1-20$ мВ/м и узкой спектральной шириной менее 10% от центральной частоты [78]. Отметим также относительно недавние работы по исследованию верхнегибридных волн [79–82]. В статьях [80] и [82] было указано на преобладающее возбуждение верхнегибридных волн в экваториальной области. Верхнегибридные волны наблюдаются также в магнитосферах других планет [83–85]. Медленные необыкновенные волны могут играть важную роль для аврорального километрового излучения при их трансформации в другие моды [86]. Многие важные результаты, касающиеся роли МН волн в динамике электронов радиационного пояса, можно найти в следующих работах: [87–90].

Заметную часть настоящей диссертации составляет исследование резонансного взаимодействия волн и частиц, которое является одним из фундаментальных процессов в космической плазме (см., например, [57; 59] и имеющиеся там ссылки). Это взаимодействие в значительной степени определяет спектры наблюдаемых волн и динамику энергичных частиц в плазмосфере [91–93]. По имеющимся представлениям, резонансное взаимодействие с волнами играет важную роль в ускорении и питч-угловом рассеянии энергичных частиц, приводящем к их высыпанию в атмосферу (см., например, [94] и имеющиеся там ссылки). Поскольку данная диссертация носит преимущественно теоретический характер, необходимо упомянуть некоторые ключевые моменты, связанные с

развитием теоретических представлений о резонансном взаимодействии волн и частиц в плазме, которые начались с классических работ Власова [95; 96] и Ландау [97], посвящённых ленгмюровским волнам. Система уравнений, включающая кинетическое уравнение Больцмана – Власова с самосогласованным полем и уравнения Максвелла, является нелинейной, учитывает нелинейное взаимодействие между заряженными частицами плазмы и электромагнитным полем и описывает процессы, протекающие в плазме, в том числе космической [98; 99]. Однако в работах [95–97] система уравнений решалась в линейном приближении по полю (когда функция распределения считается состоящей из невозмущённой функции распределения и малой добавки, пропорциональной полю). Предложенный линейный подход был позднее обобщён и применён к волновым модам в магнитоактивной плазме, в том числе, к свистовым волнам [100]. Более того, важнейшим результатом дальнейших исследований стало обнаружение того факта, что в случае неравновесного распределения заряженных частиц плазмы по скоростям резонансное взаимодействие волн и частиц может вызывать усиление волн. Ссылки на многие работы по кинетическим неустойчивостям могут быть найдены в двухтомной монографии [101], посвящённой исследованию плазменных неустойчивостей в однородной и неоднородной плазме.

В общем случае резонансные условия можно записать в следующем виде: $v_{\parallel} = (\omega - n\omega_c/\gamma)/k_{\parallel}$, где $v_{\parallel}$ – параллельная составляющая скорости электрона, ω – частота волны, ω_c – электронная гирочастота, γ – релятивистский фактор, $k_{\parallel}$ – продольная составляющая волнового вектора, n – номер циклотронного резонанса. Из данного выражения видно, что резонансные скорости могут быть значительно меньше скорости света, когда $N \gg 1$. В результате, в этом случае реализуются более благоприятные условия для резонансного взаимодействия, так как чем меньше резонансные скорости, тем большим окажется количество резонансных частиц (хотя в случае неустойчивых распределений в некоторой области фазового пространства может реализоваться противоположная ситуация). При частотах намного выше нижнегибридной частоты существуют две волновые моды, для которых может быть $N \gg 1$: свистовая мода и медленная необыкновенная (МН) мода [27; 102], которую во многих публикациях называют Z-модой. Подчеркнём, что резонансное взаимодействие существует и в ионном диапазоне частот (в частности, для ионно-циклотронных волн), и хотя данный

диапазон частот находится вне рамок исследований настоящей диссертации, отметим, что по этой тематике тоже есть обширная литература (см., например, работы [103–110] и имеющиеся там ссылки).

Невозможно перечислить все работы, посвящённые исследованию резонансного взаимодействия волна – частица в случае свистовых волн (данная тема хорошо разработана), поэтому упомянем только ряд обзорных статей [58; 111–114], где можно, в том числе, найти ссылки на оригинальные исследования. Резонансным эффектам для МН-моды также посвящено достаточно большое количество работ. Так, статья [115] посвящена изучению МН-моды и свистовой моды на большой высоте над ночной авроральной областью. Здесь стоит упомянуть обзор [116], который раскрывает многие результаты (до 2002 года) по исследованию МН волн. Отдельно отметим статью [117], где исследовалась циклотронная неустойчивость как свистовых, так и медленных необыкновенных волн; при этом в случае МН волн была доказана необходимость учёта релятивистских эффектов для резонансных частиц. Движение релятивистских частиц в поле верхнегибридной волны анализировалось в плане перехода движения в стохастический режим при больших амплитудах волны [118] и для исследования питч-углового рассеяния и высыпания электронов при резонансном взаимодействии [119] (при этом затухание или усиление МН волны не рассматривалось). Отметим также относительно недавнюю статью [120], где анализируется устойчивость кольцевого распределения электронов по отношению к возбуждению квазиэлектростатических верхнегибридных волн, а также свистовых волн вблизи электронной циклотронной частоты. В данной диссертации при исследовании квазиэлектростатических МН волн вместо кольцевого распределения используется функция распределения вида каппа-функции с конусом потерь. В случае, когда волна возбуждается в результате взаимодействия с частицами на одном из циклотронных резонансов, а частота волны совпадает с частотой верхнего гибридного резонанса, говорят о двойном плазменном резонансе. Подобный случай тоже рассматривается в настоящей диссертации. Такая терминология часто используется в работах, посвящённых радиоизлучению Солнца, в частности, так называемым “зебра”-структурам и всплескам типа “головастиков” [121–125].

Таким образом, приведённый выше краткий анализ современного состо-

яния проблем, затрагиваемых в настоящей диссертации, свидетельствует, что теоретические и экспериментальные исследования взаимодействий волн и частиц позволили достичь значительных успехов в понимании динамики магнитосферной плазмы. Тем не менее, ряд вопросов оставался не до конца прояснённым, например, вопросы, связанные с изучением свойств разреженной плазмы, с проблемами нелинейного резонансного взаимодействия заряженных частиц и различных типов волн, а также генерацией волн в условиях неоднородной магнитосферной плазмы. Некоторые из этих вопросов анализируются в данной диссертации.

Актуальность темы исследования

Теоретические исследования процессов распространения и резонансного взаимодействия с энергичными частицами электромагнитных волн в ионосфере и магнитосфере Земли и других планет Солнечной системы получили новый импульс в связи с данными, полученными такими спутниковыми миссиями, как Интербол, Cluster, THEMIS, Van Allen Probes, Arase, MMS и другие. В ряде указанных экспериментов проводились и проводятся многокомпонентные волновые измерения в широком диапазоне частот, а также измерения дифференциальных потоков заряженных частиц в широком диапазоне энергий, с учётом зависимости этих потоков от питч-угла частиц. Волновые данные с высоким временным разрешением, а также данные по дифференциальным потокам частиц с высоким разрешением по энергии и питч углу стали доступны лишь в последние десятилетия. Проект Van Allen Probes был направлен непосредственно на исследование радиационных поясов Земли, в эволюции которых различные волны играют важную роль, а проект MMS направлен на изучение процессов, протекающих в хвосте магнитосферы. Космическими миссиями также проводились измерения в межпланетном пространстве и магнитосферах других планет Солнечной системы, включая Юпитер (миссии Voyager, Juno, Cassini) и Сатурн (миссии Voyager, Cassini). Таким образом, имеются данные измерений в различных областях космического пространства. Эти измерения показывают, что параметры плазмы, а именно отношение плазменной частоты к циклотронной частоте, меняются в очень широком диапазоне, что требует адекватного теоретического описания протекающих там процессов, в то время как выполненные и планируемые космические эксперименты предоставляют возможность для со-

поставления проведённых расчётов с данными измерений на космических аппаратах. Таким образом, тема диссертации, которая содержит анализ волновых процессов в плазме произвольной плотности, является актуальной для современных исследований волновых явлений в космической плазме.

Цели и задачи работы:

1. Получить приближённые аналитические выражения для показателей преломления электронных волновых мод в магнитоактивной плазме, справедливые в широкой области параметров плазмы.

2. В случае свистовой волны, распространяющейся вдоль магнитного поля, вывести общее выражение для дисперсионного уравнения с учётом резонансных частиц, не ограниченное малостью инкремента волны по сравнению с частотой, и разработать численный метод расчёта инкремента неустойчивости по экспериментально измеряемым дифференциальным потокам энергичных частиц.

3. Получить в явном виде дисперсионное соотношение для частоты волны как функции волнового вектора и параметров плазмы в диапазоне частот $\omega_{\text{LH}} \ll \omega \ll \omega_c$ (которое обычно задаётся уравнением 4-го порядка для показателя преломления N), а для случая разреженной плазмы $\omega_p < \omega_c$ исследовать выражения для угла Жандрэна и угла Стори.

4. Получить выражение для инкремента медленной необыкновенной волны, распространяющейся в плазме под произвольным углом к внешнему магнитному полю, с учётом релятивистских эффектов.

5. Объяснить особенности спектра верхнегибридных волн, наблюдаемых на спутниках в магнитосфере Земли, в частности, заметное возрастание интенсивности верхнегибридных волн в областях, где частота верхнегибридного резонанса кратна электронной циклотронной частоте.

Научная новизна работы

Научная новизна исследования связана с использованием уникальных данных по измерениям волн и дифференциальных потоков частиц в многоспутниковых миссиях, таких как Van Allen Probes [21] и MMS [23]. В работе получены следующие новые результаты:

1. Выполнен расчёт инкремента свистовых волн на основе функций распределения, полученных с помощью спутниковых измерений дифференциальных потоков заряженных частиц в широком диапазоне энергий, без разделения на “холодную” и “горячую” компоненты плазмы, и не ограниченный условием малости инкремента волны по сравнению с её частотой; обнаружены новые моды колебаний при малых значениях плотности холодных частиц.

2. Для разреженной плазмы получена формула, определяющая угол Жандрэна. Определена частота волны, ограничивающая область существования такого угла.

3. На основе расчёта инкремента квази-электростатических медленных необыкновенных волн в плазме с каппа-распределением при наличии конуса потерь впервые дано объяснение особенности спектра верхнегибридных волн, которая заключается в резком возрастании интенсивности излучения в случае, когда частота волны близка к гармоникам гирочастоты.

4. Общая двумерная система уравнений движения релятивистских электронов в поле медленной необыкновенной волны и внешнем магнитном поле сведена в приближении изолированных резонансов к одномерной системе уравнений, и получено выражение для инкремента медленной необыкновенной волны, распространяющейся под произвольным углом к внешнему магнитному полю.

Теоретическая и практическая значимость

Метод расчёта инкремента, представленный во второй главе, имеет как теоретическое, так и практическое значение, поскольку он не ограничен условием малости инкремента волны по сравнению с частотой и применим для функций распределения, восстанавливаемых численно по спутниковым данным. Полученные в рамках диссертационного исследования результаты первой и третьей главы, касающиеся дисперсионных свойств плазмы, имеют теоретическое и практическое значение для широкого круга задач, связанных с волновыми явлениями в космической плазме. В четвёртой главе на основе методов гамильтоновой механики изначально двумерная система уравнений движения резонансных частиц в поле квазимонохроматической волны и внешнем магнитном поле

сведена к одномерной системе в приближении изолированных резонансов. Это существенно упрощает решение задачи, уменьшает объём численных вычислений и позволяет свести вычисления инкремента волны к исследованным ранее случаям [126; 127]. Использованный подход может быть применён при решении различных задач, связанных с резонансным взаимодействием волн и частиц в магнитоактивной плазме. Пятая глава представляет собой непосредственное практическое приложение результатов четвёртой главы к интерпретации максимумов спектральной интенсивности верхнегибридных волн, обнаруженных по спутниковым измерениям.

Исследование взаимодействия заряженных частиц и волн (их генерация, усиление, затухание, трансформация) представляет большой теоретический и практический интерес. Данные вопросы тесно связаны с проблемой определения наиболее вероятной области возбуждения волн в магнитосфере, с проблемой распространения волн, с проблемой объяснения особенностей спектров и т.п. Теоретическая и практическая значимость результатов настоящей диссертации определяется возможностью их использования широким кругом специалистов, занимающихся изучением физических свойств плазмы, в том числе космической. Результаты диссертации могут быть использованы для дальнейшего развития методов исследования космической плазмы, обработки и интерпретации экспериментальных данных, полученных космическими аппаратами, проектирования будущих космических экспериментов.

Методы исследования и достоверность результатов

Результаты, полученные в настоящей диссертации, опираются на решения фундаментальных уравнений электродинамики и физики плазмы (кинетического уравнения Больцмана – Власова и уравнений Максвелла). Исследования носят преимущественно теоретический характер, при этом также используется численное моделирование, а результаты сопоставляются с экспериментальными данными, полученными из измерений на космических аппаратах. Достоверность представленных теоретических результатов обеспечивается корректным решением используемых фундаментальных уравнений в рамках обоснованных физических приближений, а также соответствием теоретических выводов имеющимся экспериментальным данным. Для решения поставленных задач при-

меняются различные методы и подходы. В частности, во второй главе используются метод линеаризации кинетического уравнения, преобразования Фурье – Лапласа и методы теории функции комплексной переменной. Аналитическое продолжение функции, определяющей дисперсионное уравнение, является центральным моментом в данной главе; при этом метод аналитического продолжения основан на принципе непрерывности. В третьей главе при выводе дисперсионного уравнения для низкочастотных волн используется разложение по малому параметру: отношению частоты к электронной гирочастоте. В четвёртой главе используется метод усреднения гамильтоновых уравнений, приводящий к приближению изолированных резонансов. Это позволяет понизить порядок решаемой системы уравнений движения: перейти от двумерной системы к одномерной. В четвёртой главе используется закон сохранения энергии и закон сохранения фазового объёма (теорема Лиувилля) для вычисления инкремента. Во втором параграфе четвёртой главы при решении кинетического уравнения используется метод характеристик, что сводится к решению уравнений движения частиц в заданном поле волны и внешнем магнитном поле. При этом используется дипольная модель внешнего магнитного поля, гиротропная модель плотности холодных частиц, а также моделирование функции распределения каппа-функцией с конусом потерь. В последующих параграфах четвёртой главы используются общие релятивистские уравнения движения электрона в поле медленной необыкновенной волны и приближение заданного поля для расчёта инкремента.

При проведении количественных расчётов в диссертационном исследовании использованы программные среды MATLAB и Wolfram Mathematica, с помощью которых реализованы используемые численные методы.

Основные положения, выносимые на защиту:

1. Для случая свистовой волны, распространяющейся в плазме вдоль внешнего магнитного поля, выведено комплексное дисперсионное уравнение, не ограниченное условием малости инкремента волны по сравнению с её частотой. Выполнен численный расчёт инкремента свистовых волн на основе измерений дифференциальных потоков электронов на спутниках Van Allen Probe A и MMS, и при малых значениях плотности холодных частиц обна-

ружена немонотонная зависимость частоты от волнового числа и связанная с ней неоднозначная зависимость инкремента от частоты.

2. Получены и проанализированы дисперсионное соотношение, поляризационные характеристики и выражение для плотности энергии низкочастотных волн ($\omega_{\text{LH}} \ll \omega \ll \omega_c$) для произвольного соотношения между ω_p и ω_c. Для свистовых волн в разреженной плазме ($\omega_p < \omega_c$) получено выражение для угла Жандрэна, определена максимальная частота волны, для которой такой угол существует, а также исследовано изменение угла Жандрэна и угла Стори в зависимости от параметров плазмы.

3. Получено общее выражение для линейного инкремента медленных необыкновенных волн, с учётом релятивистских эффектов, справедливое на всей плоскости (частота – угол волновой нормали), где существуют МН волны. Выполнены расчёты инкремента для функции распределения энергичных частиц в виде κ-функции с конусом потерь. Максимум инкремента отвечает частотам вблизи верхней гибридной частоты и углам волновой нормали вблизи $\pi/2$.

4. Наблюдаемое существенное возрастание спектральной интенсивности верхнегибридных волн в областях, где частота верхнегибридного резонанса кратна электронной циклотронной частоте, объяснено возбуждением этих волн вследствие развития циклотронной неустойчивости на высоких циклотронных резонансах. Фиксируемые на спутнике спектральные особенности верхнегибридных волн хорошо согласуются с расчётами инкремента вдоль траектории спутников.

Апробация результатов исследования

Основные результаты работы докладывались на научных семинарах по физике космической плазмы и на следующих конференциях:

1. Артеха Н.С., Шкляр Д.Р. Кинетическое описание свистовых волн, распространяющихся в плазме вдоль магнитного поля. Шестнадцатая конференция “Физика плазмы в солнечной системе”, 8–12 февраля 2021 г., г. Москва, ИКИ РАН, сборник тезисов, С. 244.

2. Артеха Н.С., Шкляр Д.Р. Волны с частотами ниже электронной гирочастоты и $\mathbf{k}||\mathbf{B}_0$ в “горячей” плазме. Семнадцатая конференция “Физика плазмы в солнечной системе”, 7–11 февраля 2022 г., г. Москва, ИКИ РАН, сборник тезисов, С. 291.

3. Артеха Н.С., Шкляр Д.Р. Дисперсионные характеристики свистовых волн в разреженной ($\omega_p < \omega_c$) магнитоактивной плазме. Восемнадцатая конференция “Физика плазмы в солнечной системе”, 6–10 февраля 2023 г., г. Москва, ИКИ РАН, сборник тезисов, С. 445.

4. Artekha N.S., Shklyar D.R. Dispersion features of whistler-mode waves in low-density magnetoactive plasma. 46th Annual Seminar “Physics of Auroral Phenomena”, March 13–17, 2023, Apatity, PGI.

5. Artekha N.S., Shklyar D.R. Dispersion and Polarization Features of Whistler-Mode Waves in Low-Density Plasma. XXXVth URSI General Assembly and Scientific Symposium, Sapporo, Japan, August 19–26, 2023.

6. Артеха Н.С., Шкляр Д.Р. Дисперсионные характеристики и поляризационные свойства низкочастотных волн в магнитоактивной плазме произвольной плотности. Девятнадцатая ежегодная конференция “Физика плазмы в солнечной системе”, 5–9.02.2024, г. Москва, ИКИ РАН, сборник тезисов, С. 339.

7. Шкляр Д.Р., Артеха Н. С. Приближенные формулы для показателя преломления электронных волн в плотной и разреженной плазме. Девятнадцатая ежегодная конференция “Физика плазмы в солнечной системе”, 5–9.02.2024, г. Москва, ИКИ РАН, сборник тезисов, С. 365.

8. Артеха Н.С., Шкляр Д.Р. Инкремент медленных необыкновенных волн в плазме с каппа-распределением при наличии конуса потерь. Двадцатая ежегодная конференция “Физика плазмы в солнечной системе”, 10–14.02.2025, г. Москва, ИКИ РАН, сборник тезисов, С. 286.

9. Шкляр Д.Р., Титова Е.Е., Артеха Н.С. Механизм генерации верхнегибридных волн в плазмосфере Земли. Двадцатая ежегодная конференция “Физика плазмы в солнечной системе”, 10–14.02.2025, г. Москва, ИКИ РАН, сборник тезисов, С. 287.

10. Артеха Н.С., Шкляр Д.Р. Резонансное взаимодействие медленных необыкновенных волн и релятивистских электронов в магнитоактивной плазме. Двадцать первая ежегодная конференция “Физика плазмы в солнечной систе-

ме”, 09–13.02.2026, г. Москва, ИКИ РАН, сборник тезисов, С. 336.

11. Шкляр Д.Р., Титова Е.Е., Артеха Н.С. Особенности спектра верхнегибридных волн в магнитосфере Земли. Двадцать первая ежегодная конференция “Физика плазмы в солнечной системе”, 09–13.02.2026, г. Москва, ИКИ РАН, сборник тезисов, С. 337.

12. Артеха Н.С., Шкляр Д.Р. Инкремент медленных необыкновенных волн с учетом релятивистских эффектов в магнитоактивной плазме. XXIII конференция молодых учёных “Фундаментальные и прикладные космические исследования”, 22-24 апреля 2026 г., г. Москва, ИКИ РАН.

13. Luzhkovskiy A., Shklyar D., Artekha N. Investigation of the resonant interaction of electrons with a slow extraordinary wave at $N_{\|} = 1$. XXIII конференция молодых учёных “Фундаментальные и прикладные космические исследования”, 22–24 апреля 2026 г., г. Москва, ИКИ РАН.

Личный вклад автора

Все результаты, представленные в настоящей диссертации, получены соискателем лично, либо совместно с соавторами. Автор участвовала в постановке и теоретической разработке научных задач, в проведении численных расчётов, в анализе и интерпретации полученных результатов, в написании текстов публикаций. Положения, выносимые на защиту, основаны на работах из списка публикаций автора по теме диссертации. Результаты, представленные в диссертации, согласованы с соавторами.

Публикации автора по теме диссертации

1. Артеха Н.С., Шкляр Д.Р. Кинетическое описание свистовой волны, распространяющейся в плазме вдоль магнитного поля // Физика плазмы. 2022. Т. 48. С. 613–627. https://doi.org/10.31857/S0367292121100413
   переводная версия: Artekha N.S., Shklyar D.R. Kinetic Description of a Whistler Wave Propagating in Plasma Along the Magnetic Field // Plasma Physics Reports. 2022. V. 48. P. 754–767. https://doi.org/10.1134/S1063780X2260044X

2. Артеха Н.С., Шкляр Д.Р. Дисперсионные характеристики низкочастотных электронных волн в магнитоактивной плазме произ-

вольной плотности // Физика плазмы. 2023. Т. 49. С. 1127–1139. https://doi.org/10.31857/S0367292123600838
переводная версия: Artekha N.S., Shklyar D.R. Dispersion Characteristics of Low-Frequency Electron Waves in a Magnetoactive Plasma of Arbitrary Density // Plasma Physics Reports. 2023. V. 49. P. 1309–1321. https://doi.org/10.1134/S1063780X23601529

3. Shklyar D.R., Artekha N.S. Model expressions for refractive indices of electron waves in cold magnetoactive plasma of arbitrary density // Fundamental Plasma Physics. 2024. V. 10. 100053. https://doi.org/10.1016/j.fpp.2024.100053

4. Шкляр Д.Р., Артеха Н.С. Генерация квазиэлектростатических медленных необыкновенных волн каппа-распределением с конусом потерь // Физика плазмы. 2024. Т. 50. С. 1205–1221. https://doi.org/10.31857/S0367292124100063
переводная версия: Shklyar D.R., Artekha N.S. Generation of Quasi-Electrostatic Slow Extraordinary Waves by Kappa Distribution with a Loss Cone // Plasma Physics Reports. 2024. V. 50. P. 1250–1264. https://doi.org/10.1134/S1063780X24601408

5. Shklyar D.R., Titova E.E., Artekha N.S. Generation of UHR Waves as Inferred From Wave and Electron Flux Measurements by Van Allen Probes // Journal of Geophysical Research: Space Physics. 2025. V. 130. No. 6. e2025JA033815. https://doi.org/10.1029/2025JA033815

6. Artekha N.S., Shklyar D.R. Relativistic effects in the interaction of electrons with a slow extraordinary wave // Physics of Plasmas 2026. V. 33. No. 6. 062105. https://doi.org/10.1063/5.0333261

Структура и объём диссертации

Диссертация состоит из введения, пяти глав, заключения и списка литературы из 165 наименований. Полный объём диссертации составляет 159 страниц машинописного текста, включая 45 рисунков.

Глава 1. Основные соотношения для волн в холодной магнитоактивной бесстолкновительной плазме

Часть результатов данной главы хорошо известна и приведена только для справочных целей: это необходимые сведения из физики плазмы, которые являются общими для использования в последующих главах. Оставшаяся часть главы посвящена нахождению приближённых аналитических выражений для показателей преломления электронных волновых мод в магнитоактивной плазме, которые могут быть полезны для оценок и приближённых расчётов [128].

1.1 Кинетическое уравнение Больцмана – Власова и система уравнений Максвелла

Наиболее полное описание волновых явлений в плазме с учётом взаимодействия волн и частиц осуществляется с помощью системы уравнений, включающей кинетические уравнения Больцмана–Власова для самосогласованного поля

$$\frac{\partial f_\alpha}{\partial t} + \mathbf{v}\frac{\partial f_\alpha}{\partial \mathbf{r}} - \frac{e_\alpha}{m_\alpha}\left(\boldsymbol{\mathcal{E}} + \frac{1}{c}\left[\mathbf{v}\times(\mathbf{B}_0 + \boldsymbol{\mathcal{B}})\right]\right)\frac{\partial f_\alpha}{\partial \mathbf{v}} = 0 \tag{1.1}$$

и систему уравнений Масквелла для поля волны

$$\mathrm{rot}\boldsymbol{\mathcal{E}} + \frac{1}{c}\frac{\partial \boldsymbol{\mathcal{B}}}{\partial t} = 0\ , \tag{1.2}$$

$$\mathrm{div}\,\boldsymbol{\mathcal{B}} = 0\ , \tag{1.3}$$

$$\mathrm{rot}\boldsymbol{\mathcal{B}} = \frac{4\pi}{c}\mathbf{j} + \frac{1}{c}\frac{\partial \boldsymbol{\mathcal{E}}}{\partial t}\ , \tag{1.4}$$

$$\mathrm{div}\,\boldsymbol{\mathcal{E}} = 4\pi\rho_e\ , \tag{1.5}$$

где $f_\alpha(\mathbf{r},\mathbf{v},t)$, m_α и e_α – соответственно функция распределения частиц сорта α в фазовом пространстве, их масса и заряд, $\mathbf{B}_0$ – внешнее магнитное поле, $\boldsymbol{\mathcal{E}}$ – электрическое поле волны, $\boldsymbol{\mathcal{B}}$ – магнитное поле волны, $\mathbf{r}$ – координата точки наблюдения, $\mathbf{v}$ – скорость частиц, а c – скорость света. Плотность заряда ρ_e и плотность тока $\mathbf{j}$ определяются самосогласованным образом:

$$\rho_e = \sum_\alpha e_\alpha \int f_\alpha(\mathbf{r},\mathbf{v},t)d\mathbf{v}\ , \tag{1.6}$$

$$\mathbf{j} = \sum_{\alpha} e_\alpha \int \mathbf{v} f_\alpha(\mathbf{r}, \mathbf{v}, t) d\mathbf{v} \ . \qquad (1.7)$$

В данной диссертации анализируются, в основном, волновые явления в электронной плазме.

Поскольку общего аналитического решения системы уравнений Больцмана – Власова – Максвелла до сих пор не найдено, то используются приближённые [97; 126; 129; 130] и численные методы решения. Для расчёта инкремента (декремента) волн часто используют два приближения. Линеаризация кинетического уравнения, описанная в статье [97], когда в членах, пропорциональных полю волны, функция распределения заменяется на её невозмущённое значение, фактически эквивалентна выбору невозмущённых траекторий в качестве характеристик кинетического уравнения. Область применимости данного подхода ограничена временами, меньшими нелинейного времени τ (см., например, статью [126] для ленгмюровской волны), на котором траектории резонансных частиц заметно изменяются под влиянием поля волны. Величина нелинейного времени в случае ленгмюровской волны с амплитудой E_0 определяется следующим выражением: $\tau = (m/eE_0k)^{1/2}$, где m и e – масса электрона и его заряд, k – волновой вектор. Если исследуется случай свистовой волны $\mathbf{k} \parallel \mathbf{B}_0$, то выражение для нелинейного времени имеет следующий вид: $(m\omega/eEk^2v_\perp)^{1/2}$, где ω – частота свистовой волны, E – амплитуда её электрического поля, а $v_\perp$ – поперечная скорость частицы [131]. Для МН волн в магнитоактивной плазме выражение для нелинейного времени записывается в более сложной форме. Область применимости линейной теории резонансного взаимодействия волна – частица определяется следующим неравенством: $\gamma_{\text{L}}\tau \gg 1$, где введено обозначение для декремента волны γ_{L} (при $\gamma_{\text{L}}\tau \gg 1$ волна затухает за время порядка τ).

Случай, когда выполняется обратное неравенство $\gamma_{\text{NL}}\tau \ll 1$, тоже подробно изучался, начиная с классической статьи [126] (см. также книгу [59], содержащую обширную библиографию по данной тематике). Чтобы найти функцию распределения (и вычислить ток резонансных частиц) в этом случае пренебрегают изменением $|\mathbf{E}|$ за время τ. Такой способ линеаризации (по $\gamma_{\text{NL}}\tau \ll 1$) называется “приближением заданного поля”. Изменение самой величины E детерминируется законом сохранения энергии (с учётом резонансных эффектов).

При этом, как установлено в [126], по истечении нескольких нелинейных периодов τ декремент волны приближается к нулю, а амплитуда волны асимптотически стремится к постоянному значению. Физическая интерпретация [126] опирается на эргодическую теорему (результат фазового перемешивания в резонансной области).

Способ нахождения декремента, предложенный в [97], ограничен следующим неравенством: $\gamma_{\text{L}} \ll \omega$. В противоположном случае решение комплексного дисперсионного уравнения для некоторых аналитических функций (максвелловской, би-максвелловской) анализировалось, например, в статье [127]. В других случаях приходится прибегать к численным расчётам [132–134].

Упомянем другие методы нахождения инкремента. Если $\gamma_{\text{L}} \ll \omega$, то при известной зависимости $\omega(\mathbf{k})$ инкремент можно также вычислить, используя закон сохранения энергии в системе волна – резонансные частицы [111; 135; 136]. Ещё один метод нахождения инкремента в случае $\gamma_{\text{L}} \ll \omega$ опирается на формулу из статьи [137], которая использует вычисленную анизотропию функции распределения (см., например, [138]).

1.2 Дисперсионные свойства холодной магнитоактивной бесстолкновительной плазмы

Известно, что не существует общего аналитического выражения для дисперсионного соотношения в форме $\omega = \omega(\mathbf{k})$ или в аналогичной форме $\omega = \omega(k, \theta)$. Поэтому будем исходить из общего выражения для показателя преломления $N = kc/\omega$ электромагнитных волн в магнитоактивной плазме, где k – величина вектора волновой нормали, ω – частота волны. Здесь и далее направляем ось z декартовой системы координат вдоль внешнего магнитного поля $\mathbf{B}_0$, и для определённости считаем, что волновой вектор $\mathbf{k}$ лежит в плоскости (x, z). Показатель преломления волны является фундаментальной характеристикой волновой моды в плазме [27; 99; 102; 139; 140]. Он определяет особенности распространения волны, её поляризацию, а также плотность энергии волны. Величина N определяется известным биквадратным уравнением [27; 28; 98; 102;

141]:

$$AN^4 + BN^2 + C = 0\ . \tag{1.8}$$

Коэффициенты уравнения (1.8) выражаются через компоненты тензора диэлектрической проницаемости

$$\varepsilon_{ij}(\omega) = \begin{pmatrix} \varepsilon_1 & i\varepsilon_2 & 0 \\ -i\varepsilon_2 & \varepsilon_1 & 0 \\ 0 & 0 & \varepsilon_3 \end{pmatrix} \tag{1.9}$$

и угол волновой нормали θ следующим образом:

$$\begin{aligned} A &= \varepsilon_1 \sin^2\theta + \varepsilon_3 \cos^2\theta\ , \\ B &= -\varepsilon_1\varepsilon_3(1+\cos^2\theta) - (\varepsilon_1^2 - \varepsilon_2^2)\sin^2\theta\ , \\ C &= \varepsilon_3(\varepsilon_1^2 - \varepsilon_2^2)\ , \end{aligned} \tag{1.10}$$

где θ – угол между волновым вектором $\mathbf{k}$ и внешним магнитным полем $\mathbf{B}_0$. Будем рассматривать электронные волны с частотами ω, значительно превышающими частоту нижнего гибридного резонанса $\omega_{\text{LH}} = \omega_c\omega_{pi}/\sqrt{\omega_c^2 + \omega_p^2}$, где ω_p и ω_c – соответственно электронная плазменная частота и абсолютная величина электронной циклотронной частоты, ω_{pi} – ионная плазменная частота. В этом случае действительные величины ε_1, ε_2, и ε_3 определяются следующим образом:

$$\varepsilon_1 = \frac{\omega^2 - \omega_{\text{UH}}^2}{\omega^2 - \omega_c^2}\ , \quad \varepsilon_2 = \frac{\omega_p^2\omega_c}{\omega(\omega^2 - \omega_c^2)}\ , \quad \varepsilon_3 = \frac{\omega^2 - \omega_p^2}{\omega^2}\ , \tag{1.11}$$

где $\omega_{\text{UH}} = \sqrt{\omega_p^2 + \omega_c^2}$ – частота верхнего гибридного резонанса. Как это общепринято, в выражениях для ε_1, ε_2, и ε_3 используются циклические частоты, измеряемые в рад/с (для ряда экспериментальных данных буквой ν будет обозначаться обычная частота, измеряемая в герцах). Решениями уравнения (1.8) будут

$$N_{1,2}^2 = \frac{-B \pm \sqrt{B^2 - 4AC}}{2A}\ , \tag{1.12}$$

где нижние индексы соответствуют верхнему и нижнему знакам перед корнем. Эти два возможных значения N^2 для заданной частоты и угла волновой нормали зависят от ω_p и ω_c. При этом могут реализоваться разные ситуации. Так, для заданных значений этих параметров 1) обе величины $N_{1,2}^2$ могут быть положительными, определяя две распространяющиеся моды, 2) одна из величин $N_{1,2}^2$

может быть отрицательной, а другая положительной, давая при этом одну распространяющуюся моду, или 3) обе величины $N_{1,2}^2$ могут оказаться отрицательными, а это означает, что для этих частот, угла волновой нормали и параметров плазмы в приближении холодной плазмы не существует распространяющихся электронных мод. Как показывает анализ, параметром, который в значительной степени определяет свойства волн, является отношение электронной плазменной частоты к электронной циклотронной частоте, которое обозначим через p:

$$p = \frac{\omega_p}{\omega_c} \, . \tag{1.13}$$

Как известно, в холодной магнитоактивной плазме в общем случае существуют четыре электронных моды. Согласно обозначениям, используемым в [27; 102], они называются быстрой магнитозвуковой (БМ) или свистовой модой, медленной необыкновенной (МН) модой, обыкновенной (О) модой и быстрой необыкновенной (БН) модой. В диссертации используется термин “медленная необыкновенная”, предложенный Шафрановым [102] и используемый в монографии [27]. Отметим, что при частоте $\omega < \omega_p$ фазовая скорость этих волн превышает скорость света, поэтому слово “медленная” в этом случае может вводить в заблуждение. Конечно, существует иная терминология для обозначения данной волновой моды, используемая, например, Альбертом [90] и другими исследователями, которые низкочастотную часть этой моды до ω_p называют LX-модой, что связано с её левосторонней поляризацией, а высокочастотную часть $\omega > \omega_p$ именуют Z-модой. Тем не менее, будем называть всю ветвь МН-модой, чтобы избежать путаницы.

В случае параллельного распространения, т. е. при $\theta = 0$, показатель преломления определяется следующим образом:

$$N^2 \equiv \varepsilon_1 - \varepsilon_2 = \frac{\omega^2 - \omega\omega_c - \omega_p^2}{\omega(\omega - \omega_c)} \, , \tag{1.14}$$

или

$$N^2 \equiv \varepsilon_1 + \varepsilon_2 = \frac{\omega^2 + \omega\omega_c - \omega_p^2}{\omega(\omega + \omega_c)} \, . \tag{1.15}$$

При $\theta = 0$ также существует электростатическая Ленгмюровская волна, распространяющаяся на частоте $\omega = \omega_p$, для которой показатель преломления может быть произвольным. Следует отметить, что случай параллельного распространения вырождается, если полоса частот соответствующей моды включает

$\omega = \omega_p$, поскольку в этом случае все коэффициенты уравнения (1.8) стремятся к нулю, и показатель преломления не определён должным образом. Именно поэтому показатель преломления одной и той же волновой моды может быть описан различными выражениями (1.14) или (1.15) в частотных областях ниже и выше ω_p, и это изменение происходит резко. Этого не происходит для свистовой моды, если $p > 1$, поскольку в этом случае $\omega < \omega_p$, и для БН-моды, частота которой всегда больше ω_p. В обоих этих случаях действует выражение (1.14).

В случае перпендикулярного распространения, т. е. при $\theta = \pi/2$, показатель преломления определяется другими формулами:

$$N^2 \equiv \frac{\varepsilon_1^2 - \varepsilon_2^2}{\varepsilon_1} = \frac{(\omega^2 - \omega\omega_c - \omega_p^2)(\omega^2 + \omega\omega_c - \omega_p^2)}{\omega^2(\omega^2 - \omega_{\text{UH}}^2)} \tag{1.16}$$

для МН- и БН-мод в соответствующих частотных диапазонах, а также выражением

$$N^2 \equiv \varepsilon_3 = \frac{\omega^2 - \omega_p^2}{\omega^2} \tag{1.17}$$

для О-моды.

Важной характеристикой волновой моды является частота отсечки (существует не для всех мод), определяемая из условия $C = 0$, при которой показатель преломления обращается в ноль. Существуют три частоты отсечки, которые задаются формулами:

$$\omega_{\text{O1}} = \frac{\omega_c}{2} + \sqrt{\frac{\omega_c^2}{4} + \omega_p^2}\,, \quad \omega_{\text{O2}} = \omega_p\,, \quad \omega_{\text{O3}} = -\frac{\omega_c}{2} + \sqrt{\frac{\omega_c^2}{4} + \omega_p^2} \tag{1.18}$$

для БН-, О- и МН-мод соответственно. Другой характерной частотой волновой моды, определяемой условием $A = 0$, является резонансная частота, при которой показатель преломления стремится к бесконечности. В области электронных волн их две:

$$\omega_{r1}^2 = \frac{\omega_{\text{UH}}^2}{2} + \sqrt{\frac{\omega_{\text{UH}}^4}{4} - \omega_p^2\omega_c^2\cos^2\theta}\,, \quad \omega_{r2}^2 = \frac{\omega_{\text{UH}}^2}{2} - \sqrt{\frac{\omega_{\text{UH}}^4}{4} - \omega_p^2\omega_c^2\cos^2\theta}\,, \tag{1.19}$$

и они относятся, соответственно, к МН- и свистовой моде. Обратим внимание, что частоты отсечки не зависят от угла распространения, в то время как резонансные частоты зависят. При этом резонансные частоты имеют следующие

предельные значения:

$$\begin{aligned} \omega_{r1}(\theta=0) &= \max(\omega_p,\omega_c)\ ,\ \ \omega_{r1}(\theta=\pi/2)=\omega_{\text{UH}}\ , \\ \omega_{r2}(\theta=0) &= \min(\omega_p,\omega_c)\ ,\ \ \omega_{r2}(\theta=\pi/2)\to 0\ , \\ \omega_{r2}(p\gg 1) &= \omega_c|\cos\theta|\ ,\ \ \omega_{r2}(p\ll 1)=\omega_p|\cos\theta|\ . \end{aligned} \tag{1.20}$$

Следует отметить, что при пренебрежении вкладом ионов в тензор диэлектрической проницаемости свистовые волны не могут распространяться при $\theta \to \pi/2$, поскольку диапазон допустимых частот внутри резонансного конуса исчезает.

Важной характеристикой волнового поля является поляризация волн, которая определяет эффективную амплитуду резонансного взаимодействия волн с энергичными частицами, а также плотность энергии волн. Если записать электрическое поле волны в виде

$$\mathbf{E} = \mathrm{Re}\left\{E\boldsymbol{a}e^{i\mathbf{kr}-i\omega t}\right\}\ , \tag{1.21}$$

где E – комплексная амплитуда электрического поля, то компоненты вектора поляризации $\boldsymbol{a}$ (или поляризационные коэффициенты) записываются через компоненты тензора диэлектрической проницаемости, показатель преломления и угол волновой нормали следующим образом [28]:

$$a_x = 1,\ \ a_y = -\frac{i\varepsilon_2}{N^2-\varepsilon_1},\ \ a_z = \frac{N^2\sin\theta\cos\theta}{N^2\sin^2\theta-\varepsilon_3}\ , \tag{1.22}$$

где без потери общности принято в нашем случае $a_x = 1$, а выражения для компонент тензора диэлектрической проницаемости берутся из (1.11). Поскольку в "холодной" плазме величины $\varepsilon_1, \varepsilon_2, \varepsilon_3$ являются действительными величинами, x- и z-компоненты электрического поля всегда колеблются в фазе или противофазе и сдвинуты по фазе на $\pm\pi/2$ с y-компонентой поля. Таким образом, одна ось эллипса поляризации волнового электрического поля всегда лежит в плоскости (x,z), а вторая всегда коллинеарна оси y (напомним конфигурацию: $\mathbf{B}_0$ лежит вдоль оси z и вектор $\mathbf{k}$ лежит в плоскости (x,z)). Поскольку z-компонента электрического поля коллинеарна внешнему магнитному полю, направление поляризации электрического поля волны относительно $\mathbf{B}_0$ определяется относительной фазой между x- и y-компонентами электрического поля. Правая поляризация, называемая положительной, соответствует

$-\varepsilon_2/(N^2-\varepsilon_1) > 0$, а левая поляризация, называемая отрицательной, соответствует $-\varepsilon_2/(N^2-\varepsilon_1) < 0$. Комплексный вектор поляризации магнитного поля $\mathbf{b}$ связан с вектором $\boldsymbol{a}$ соотношением, которое следует из закона индукции Фарадея (1.2):

$$b_x = -Na_y\cos\theta, \quad b_y = N\cos\theta - Na_z\sin\theta, \quad b_z = Na_y\sin\theta. \tag{1.23}$$

Другая характеристика поляризации — эллиптичность электрического (магнитного) поля. Она равна отношению меньшей полуоси эллипса поляризации к большей полуоси, взятой со знаком плюс, если направление вращения поля волны совпадает с направлением вращения электронов в магнитном поле, или со знаком минус, если поле вращается в противоположном направлении. В первом случае имеем правую поляризацию, во втором случае – левую. Так как в бесстолкновительной плазме ω, k и N – действительные величины, то электрическое и магнитное поле волны всегда вращаются в одном направлении, что следует из (1.22), (1.23), т.е. знак поляризации не зависит, определена она по электрическому или магнитному полю. Эллиптичность изменяется от 0 для линейной поляризации до 1 для круговой поляризации. Волны, распространяющиеся вдоль внешнего магнитного поля ($\theta = 0$), всегда имеют круговую поляризацию, что является хорошо известным свойством волн в холодной замагниченной плазме [27; 28].

Важность понятия групповой скорости волн $\partial\omega(\mathbf{k})/\partial\mathbf{k}$ очевидна. Зная показатель преломления на плоскости (θ, ω), можно рассчитать и представить величину групповой скорости, используя элегантную формулу, приведённую в [142]:

$$v_g = \frac{c}{N^2 + \omega N(\partial N/\partial\omega)}\left[N^2 + \left(\frac{\partial N}{\partial\theta}\right)^2\right]^{1/2}. \tag{1.24}$$

Выражение (1.24) предполагает положительность его знаменателя, что имеет место для волн с положительной дисперсией, т.е. когда $\partial k(\omega,\theta)/\partial\omega > 0$, а это всегда верно для волн в холодной плазме [27].

Общее выражение для плотности энергии волны имеет вид [102]:

$$U = \frac{1}{16\pi\omega}\frac{\partial}{\partial\omega}(\omega^2\varepsilon_{ij})|E|^2 a_i^* a_j\ , \tag{1.25}$$

где E определено в (1.21). Выполняя дифференцирование $(\omega^2\varepsilon_{ij})$, где ε_{ij} определены в (1.11), и используя выражения для поляризационных коэффициентов

(1.22), получаем

$$U = \frac{1}{8\pi}\left[\left(1+\frac{\omega_p^2\omega_c^2}{(\omega^2-\omega_c^2)^2}\right)\left(1+\frac{\omega_p^4\omega_c^2}{\omega^2(\omega^2-\omega_c^2)^2}\frac{1}{(N^2-\varepsilon_1)^2}\right)+\right.$$
$$\left.+\frac{N^4\sin^2\theta\cos^2\theta}{(N^2\sin^2\theta-\varepsilon_3)^2}-\frac{\omega_p^4\omega_c^2(\omega^2+\omega_c^2)}{\omega^2(\omega^2-\omega_c^2)^3}\frac{1}{(N^2-\varepsilon_1)}\right]|E|^2\ , \tag{1.26}$$

где N^2 – квадрат показателя преломления.

1.3 Приближённые аналитические выражения для показателя преломления

Несмотря на очевидную пользу для ряда теоретических расчётов иметь в наличии некоторые простые аналитические формулы для показателей преломления волновых мод в магнитоактивной плазме (т. е. явные выражения N^2 в зависимости от частоты и угла волновой нормали, не содержащие радикалов), подобные формулы найдены только для нескольких случаев. Для электронных волн (при $\omega \gg \omega_{\text{LH}}$) подобное выражение найдено только для свистовых волн в плотной плазме $p \gg 1$, т.е. при $\omega_p \gg \omega_c$. Такое выражение может быть получено следующим феноменологическим способом. Для $p \gg 1$ и $\omega < \omega_c$ выражение (1.14) превращается в

$$N^2 = \frac{\omega_p^2}{\omega(\omega_c-\omega)}\ . \tag{1.27}$$

Поскольку для $p \gg 1$ частота ω_c является резонансной частотой свистовых волн при $\theta = 0$, то для произвольного угла распространения естественно заменить ω_c на ω_{r2} из (1.19), что для $p \gg 1$ даёт $\omega_c|\cos\theta|$. Это приводит к хорошо известным выражениям для показателя преломления и дисперсионного соотношения свистовых волн:

$$N^2 = \frac{\omega_p^2}{\omega(\omega_c|\cos\theta|-\omega)}\ , \quad \omega = \omega_c|\cos\theta|\frac{k^2c^2}{k^2c^2+\omega_p^2}\ . \tag{1.28}$$

Достоверность этих выражений затем можно проверить прямыми вычислениями с использованием (1.8) и условия $p \gg 1$. В этом параграфе аналогично полу-

чаются приближённые выражения для показателей преломления четырёх электронных мод в широких диапазонах углов волновой нормали и произвольного отношения p между электронной плазменной и циклотронной частотами. Поскольку соответствующих аналитических выражений не существует, точность полученных выражений проверяется по точным решениям уравнения (1.8).

Для свистовых волн модельное выражение для N^2 имеет следующий вид:

$$N^2 = \frac{(\omega_p^2 + \omega\omega_c - \omega^2)[\min(\omega_c, \omega_p) - \omega]}{\omega(\omega_c - \omega)(\omega_{r2} - \omega)} , \tag{1.29}$$

где ω_{r2} определяется в (1.19). Это выражение даёт точное значение N^2 при $\theta = 0$ и всех ω в области частот свистовой моды, точную резонансную частоту для всех θ и p, и переходит в (1.28) для $p \gg 1$. Действительно, в этом случае последними двумя членами в первой скобке в числителе можно пренебречь, вторая скобка равна $(\omega_c - \omega)$ и сокращается с первой в знаменателе, в то время как $\omega_{r2} = \omega_c|\cos\theta|$ (см. (1.20)), и в результате приходим к выражению для N^2 из (1.28). В случае $p \ll 1$ первая скобка в числителе не может быть упрощена, вторая даёт $(\omega_p - \omega)$, $\omega_{r2} = \omega_p|\cos\theta|$ (см. (1.20)), и получается

$$N^2 = \frac{(\omega_p^2 + \omega\omega_c - \omega^2)(\omega_p - \omega)}{\omega(\omega_c - \omega)(\omega_p|\cos\theta| - \omega)} \simeq \frac{(\omega_p^2 + \omega\omega_c - \omega^2)(\omega_p - \omega)}{\omega\omega_c(\omega_p|\cos\theta| - \omega)} , \tag{1.30}$$

что приводит к особенно простому результату в случае параллельного распространения:

$$N^2 = \frac{\omega_p^2 + \omega\omega_c - \omega^2}{\omega\omega_c} . \tag{1.31}$$

В отличие от свистовых волн, выражения для N^2 оставшихся трёх мод при произвольных углах распространения θ будут опираться на точные выражения (1.16) и (1.17) для перпендикулярного распространения. Начнём с БН-моды. Выражение (1.16) даёт точное значение N^2 при $\theta = \pi/2$ для всех частот, будучи положительным для ω выше частоты отсечки ω_{o1} и отрицательным ниже её. Поскольку для БН волны N^2 стремится к $-\infty$, когда $\omega \to \omega_{r1} + 0$, т. е. на резонансной частоте МН волны, и поскольку $\omega_{r1}(\pi/2) = \omega_{uh}$, естественным обобщением формулы (1.16) на БН-моду является

$$N^2 = \frac{(\omega^2 - \omega\omega_c - \omega_p^2)(\omega^2 + \omega\omega_c - \omega_p^2)}{\omega^2(\omega^2 - \omega_{r1}^2)} . \tag{1.32}$$

Полученное выражение (1.32) является точным для $\theta = \pi/2$, даёт правильную частоту отсечки, которая не зависит от θ, как и должно быть, даёт правильную частоту, зависящую от θ, при которой $N^2 \to -\infty$, и даёт правильное поведение N^2 при $\omega \to \infty$, а именно, $N^2 \to 1$. Все эти свойства выполняются для произвольных значений параметра p, оставляя мало возможностей для модификации предложенного выражения.

Обобщение выражения (1.17) для О-моды на произвольные углы распространения аналогично случаю БН-моды, с той лишь разницей, что частота, при которой показатель преломления должен стремиться к $-\infty$, теперь равна ω_{r2}. Учитывая, что в принятом приближении $\omega_{r2}(\pi/2) = 0$, получаем для О-моды

$$N^2 = \frac{\omega^2 - \omega_p^2}{\omega^2 - \omega_{r2}^2} \, . \tag{1.33}$$

Все свойства приведённого выше модельного выражения для БН-моды также применимы к О-моде.

Аналогично БН-моде, в случае МН-моды исходим из (1.16) и записываем выражение для N^2 в форме

$$N^2 = \frac{(\omega^2 - \omega\omega_c - \omega_p^2)(\omega^2 + \omega\omega_c - \omega_p^2)}{\omega^2(\omega - \omega_{r1})(\omega + \omega_r)} \, , \tag{1.34}$$

где ω_{r1} определяется в (1.19), а ω_r ещё предстоит определить. Выражение (1.34) даёт правильную частоту отсечки и правильную резонансную частоту ω_{r1} для МН-моды. Поскольку $\omega_{r1}(\theta = \pi/2) = \omega_{\text{UH}}$, выражение (1.34) даст точные значения N^2 при $\theta = \pi/2$ для всех частот, при условии, что $\omega_r(\theta = \pi/2)$ также равно ω_{UH}. Для определения величины ω_r воспользуемся общим свойством показателя преломления для МН волны [128], а именно, что при $\omega = \omega_p$, $N^2 = 1$ для всех значений параметров и всех углов волновой нормали. Действительно, при $\omega = \omega_p$, $A = \varepsilon_1 \sin^2\theta$, $B = -(\varepsilon_1^2 - \varepsilon_2^2)\sin^2\theta$, $C = 0$, и из общего уравнения (1.8) имеем $N^2 = (\varepsilon_1^2 - \varepsilon_2^2)/\varepsilon_1$. Таким образом, $N^2(\omega = \omega_p)$ не зависит от θ и совпадает с выражением для $\theta = \pi/2$:

$$N^2 = \frac{\omega_p^2\omega_c^2}{\omega_p^2(\omega_{\text{UH}}^2 - \omega_p^2)} = 1 \, . \tag{1.35}$$

Из условия, что при $\omega = \omega_p$ выражение (1.34) равно 1 для всех θ, находим

$$\omega_r = \frac{\omega_{\text{UH}}^2 - \omega_p\omega_{r1}}{\omega_{r1} - \omega_p} \, . \tag{1.36}$$

Используя определение (1.19), легко проверить, что $\omega_r(\theta = \pi/2) = \omega_{\text{UH}}$. Сравнение точного и приближённых выражений $N^2(\omega)$ электронных мод для четырёх значений θ и трёх значений p приведено на Рисунке 1.1.

Таким образом, здесь представлены модельные выражения для показателей преломления электронных волн в холодной магнитоактивной плазме, которые дают хорошие приближения к точным значениям в широкой области частот волн, углов волновой нормали и отношения ω_p/ω_c. Теперь о применимости модельных выражений для N^2 в различных областях параметров. Как видно из Рисунка 1.1, приближённое выражение для свистовых волн хорошо работает для $p \gg 1$ и $p \ll 1$ для всех θ (кроме $\theta \to \pi/2$) и даёт вполне удовлетворительное согласие с точными значениями для $p \simeq 1$. Модельное выражение для МН-моды работает достаточно хорошо для большинства углов θ и значений параметра p, за исключением малых θ и больших p. Выражение для О-моды плохо работает при малых θ и $p \lesssim 1$, в то время как выражение для БН-моды хорошо работает для всех значений θ и p, за исключением малых θ и $p \sim 1$. То, что для последних трёх мод модельные выражения не работают при малых θ, понятно, так как при их получении исходными были строгие выражения при $\theta = \pi/2$ (в этом случае модельные и точные выражения совпадают).

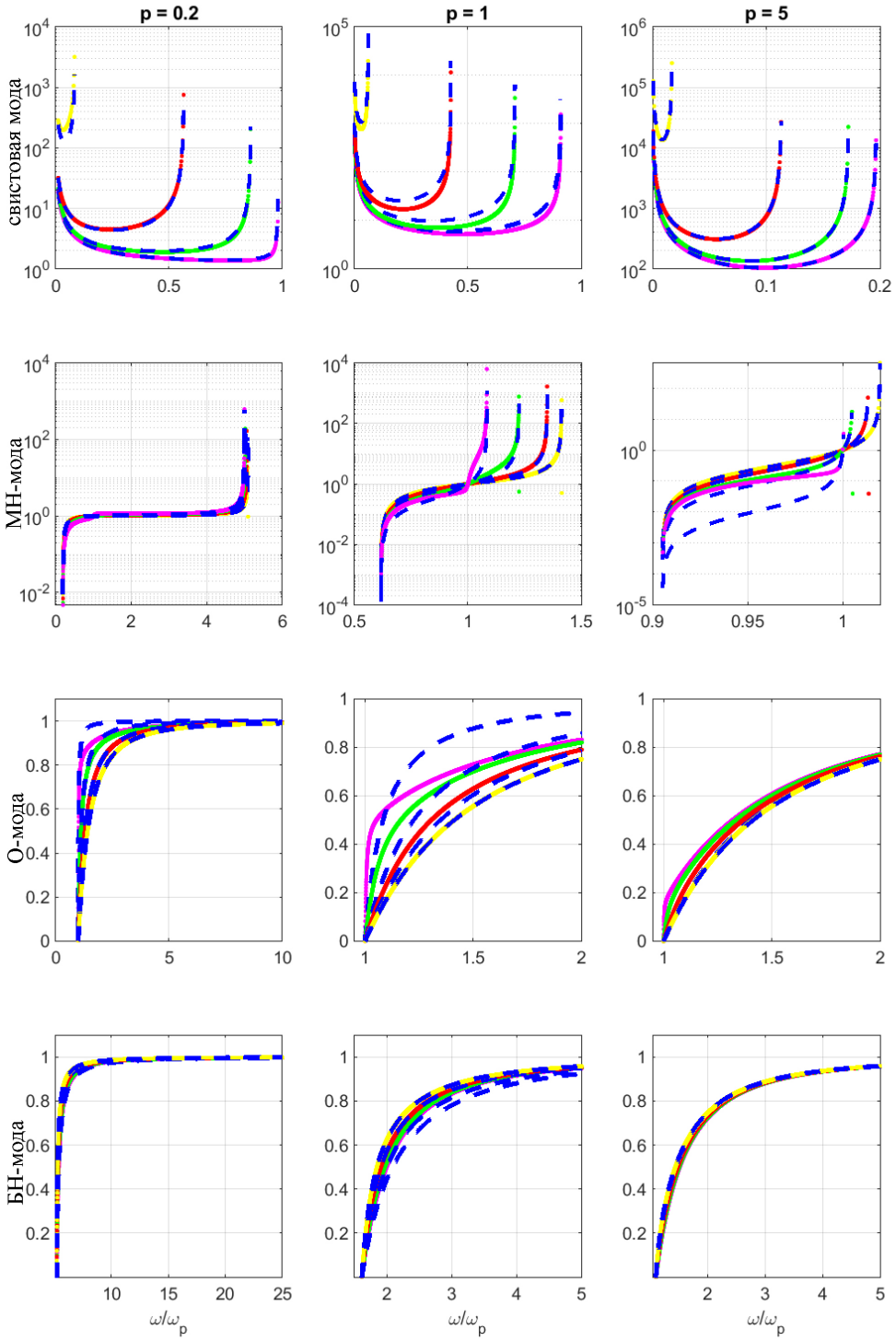


Рисунок 1.1 – Квадраты показателей преломления как функции нормированной частоты. Точные значения для четырёх углов волновой нормали $10°, 30°, 55°,$ и $85°$ показаны соответственно малиновым, зелёным, красным и жёлтым цветами, а модельные величины – синим. Величина $N^2(\omega)$ изображена для четырёх электронных мод: свистовой, МН-, О- и БН-моды, соответственно, сверху вниз, и для трёх значений параметра $p = \omega_p/\omega_c$, указанных над соответствующими столбцами

Глава 2. Кинетическое описание свистовой волны, распространяющейся в плазме вдоль магнитного поля

Резонансное взаимодействие волн и частиц детально изучено для случая, когда плазма может быть представлена состоящей из двух компонент: холодной составляющей и энергичной компоненты, плотность которой мала по сравнению с плотностью холодной составляющей. Описание подобного случая существенно упрощается, так как дисперсионные свойства волн полностью детерминируются холодной компонентой. С другой стороны, в резонансном взаимодействии с волной участвуют только энергичные частицы. Именно с этим взаимодействием связано кинетическое бесстолкновительное затухание. В случае же неустойчивого распределения частиц вероятно усиление волн. Для возможности количественного расчёта инкремента функцию распределения энергичных частиц часто задают в простом аналитическом виде. Теоретическое рассмотрение предполагает величину инкремента много меньше частоты. Во второй главе настоящей диссертации излагается подход, который свободен от подобных ограничений [143]. Он будет применён к исследованию резонансного взаимодействия свистовых волн, распространяющихся вдоль внешнего магнитного поля, с энергичными электронами. В результате, одновременно действительная и мнимая часть частоты может быть вычислена при произвольном соотношении между ними (вектор $\mathbf{k}$ задан). При этом функция распределения электронов не разделяется на плотную холодную и разреженную энергичную составляющие и может быть задана численно, из спутниковых измерений дифференциальных потоков частиц. Для наглядности перехода к одномерной задаче дисперсионное уравнение выводится из первых принципов. Предложенный подход будет применён к данным измерений потоков электронов на спутниках Van Allen Probe A и MMS.

2.1 Вывод базовых уравнений

При распространении вдоль магнитного поля свистовая волна представляет собой чисто поперечную электромагнитную волну, обладающую правой круговой поляризацией [19]. Для удобства описания процесса распространения такой волны выберем декартову систему координат с осью z, направленной вдоль внешнего магнитного поля $\mathbf{B}_0$. Волновой вектор имеет только продольную ($\mathbf{k} \| \mathbf{B}_0$) составляющую $\mathbf{k} = (0, 0, k)$. В этом случае электромагнитное поле волны будет зависеть только от координаты z.

Для удобства расчётов в качестве электрического и магнитного поля волны будем использовать комплексные функции, действительная часть которых, имеющая физический смысл, запишется в следующем виде:

$$\boldsymbol{\mathcal{E}} = \mathrm{Re}\{\widetilde{\mathbf{E}}(z,t)\} \equiv \mathrm{Re}\{\mathbf{E}(t)e^{ikz}\}\ , \quad \boldsymbol{\mathcal{B}} = \mathrm{Re}\{\widetilde{\mathbf{B}}(z,t)\} \equiv \mathrm{Re}\{\mathbf{B}(t)e^{ikz}\}\ . \tag{2.1}$$

Здесь явно выделена зависимость комплексных величин от координаты z в виде множителя e^{ikz}. С помощью закона электромагнитной индукции Фарадея (1.2) можно выписать связь между этими полями:

$$\mathrm{Re}\left\{\mathrm{rot}\left[\mathbf{E}(t)e^{ikz}\right] + \frac{1}{c}\frac{\partial \mathbf{B}(t)}{\partial t}e^{ikz} = 0\right\}\ . \tag{2.2}$$

Из (2.2) можно получить следующую взаимосвязь между комплексными компонентами электрического и магнитного поля волны:

$$\begin{gathered} ikc\widetilde{E}_y(z,t) = \frac{\partial \widetilde{B}_x(z,t)}{\partial t}\ , \quad ikc\widetilde{E}_x(z,t) = -\frac{\partial \widetilde{B}_y(z,t)}{\partial t}\ , \\ ikc\mathbf{E}_y(t) = \frac{\partial \mathbf{B}_x(t)}{\partial t}\ , \quad ikc\mathbf{E}_x(t) = -\frac{\partial \mathbf{B}_y(t)}{\partial t}\ . \end{gathered} \tag{2.3}$$

Дальнейшее упрощение этих выражений и нахождение связи $\mathbf{E}$ с $\mathbf{B}$ требовало бы знания явной временной зависимости электромагнитного поля.

Точный закон дисперсии $\omega(\mathbf{k})$ в явном виде не известен; будем рассматривать волну с правой круговой поляризацией:

$$E_y = iE_x\ , \quad B_y = iB_x\ . \tag{2.4}$$

Используя эти взаимосвязи (2.4) совместно с выражениями (2.3), можно записать все компоненты поля через величины B_x и $\partial B_x/\partial t$ (или любые другие).

Используя уравнение Максвелла (1.4), получим уравнение для выбранной величины B_x. Подставляя (2.1), данное уравнение можно расписать покомпонентно как систему уравнений:

$$\begin{aligned} -\frac{\partial \mathrm{Re}\{\widetilde{B}_y\}}{\partial z} &= \frac{4\pi}{c} j_x + \frac{1}{c}\frac{\partial \mathrm{Re}\{\widetilde{E}_x\}}{\partial t} \ , \\ \frac{\partial \mathrm{Re}\{\widetilde{B}_x\}}{\partial z} &= \frac{4\pi}{c} j_y + \frac{1}{c}\frac{\partial \mathrm{Re}\{\widetilde{E}_y\}}{\partial t} \ . \end{aligned} \tag{2.5}$$

Умножаем первое уравнение системы на i и складываем со вторым уравнением. После этого заменяем с помощью (2.4) и (2.3) компоненты поля $\widetilde{B}_y, \widetilde{E}_x, \widetilde{E}_y$ через $\widetilde{B}_x$ и $\partial\widetilde{B}_x/\partial t$. Далее, учитываем z-зависимость $\partial\widetilde{B}_x/\partial z = ik\widetilde{B}_x$, а также свойство, верное для произвольной комплексной величины Z: $\mathrm{Re}(-iZ) \equiv \mathrm{Im}(Z)$. В результате получается одно уравнение для выбранной комплексной величины $\widetilde{B}_x$:

$$\widetilde{B}_x = \frac{4\pi}{kc}(j_x - ij_y) - \frac{1}{k^2c^2}\frac{\partial^2\widetilde{B}_x}{\partial t^2} \ . \tag{2.6}$$

Здесь плотность тока электронов определяется возмущением функции распределения электронов, вызванным распространяющейся свистовой волной.

Считая поле волны слабым ($B \ll B_0$), запишем функцию распределения электронов $f(\mathbf{r}, \mathbf{v}, t)$ в виде суммы

$$f = f_0(\mathbf{v}) + \delta f(\mathbf{r}, \mathbf{v}, t), \qquad \delta f(\mathbf{r}, \mathbf{v}, t) \ll f_0(\mathbf{v}) \ ,$$

и учтём, что возмущённая функция распределения зависит, как и поле, только от одной координаты z. Ограничиваясь линейными членами по $\widetilde{\mathbf{E}}, \widetilde{\mathbf{B}}, \delta f$, из (1.1) получаем линеаризованное кинетическое уравнение

$$\frac{\partial \delta f}{\partial t} + v_z\frac{\partial \delta f}{\partial z} - \frac{e}{mc}[\mathbf{v}\times\mathbf{B}_0]\frac{\partial \delta f}{\partial \mathbf{v}} = \frac{e}{m}\left(\boldsymbol{\mathcal{E}} + \frac{1}{c}[\mathbf{v}\times\boldsymbol{\mathcal{B}}]\right)\frac{\partial f_0}{\partial \mathbf{v}} \ . \tag{2.7}$$

Рассматриваем однородную магнитоактивную плазму; относительно невозмущенной функции распределения f_0 будем считать, что она не зависит от фазы (угла φ), а зависит только от компонент $v_\parallel$ и $v_\perp$ (они определяются

относительно поля $\mathbf{B}_0$). Поэтому перейдем в кинетическом уравнении от прежних величин v_x, v_y, v_z к цилиндрическим координатам в пространстве скоростей $v_\perp, \varphi, v_\parallel$, используя следующие соотношения:

$$v_x = v_\perp \cos\varphi \ , \qquad v_y = v_\perp \sin\varphi \ , \qquad v_z = v_\parallel \ . \tag{2.8}$$

Учитывая также соотношения (2.1)-(2.4), линеаризованное кинетическое уравнение (2.7) приобретает следующий вид:

$$\frac{\partial \delta f}{\partial t} + v_\parallel \frac{\partial \delta f}{\partial z} + \omega_c \frac{\partial \delta f}{\partial \varphi} =$$

$$= \frac{e}{mkc} \mathrm{Re} \left\{ \left[ikv_\perp B_x(t) \frac{\partial f_0}{\partial v_\parallel} - \left(\frac{dB_x}{dt} + ikv_\parallel B_x(t) \right) \frac{\partial f_0}{\partial v_\perp} \right] e^{ikz + i\varphi} \right\} \ . \tag{2.9}$$

Заметим, что полученное уравнение (2.9) можно представить в виде

$$\hat{L}(\delta f) = \mathrm{Re} \left\{ \ Z(t, v_\perp, v_\parallel) e^{ikz+i\varphi} \right\} \ ,$$

где символом $\hat{L}$ обозначен дифференциальный оператор в левой части уравнения (2.9). Так как он является линейным и его коэффициенты – действительные величины, то из комплексного решения уравнения

$$\hat{L}(\widetilde{\Phi}) = Z(t, v_\perp, v_\parallel) e^{ikz+i\varphi} \tag{2.10}$$

следует, что функция $\mathrm{Re}\{\widetilde{\Phi}\}$ будет удовлетворять анализируемому нами линеаризованному уравнению (2.9). Так как коэффициенты введённого оператора $\hat{L}$ не зависят ни от z, ни от φ, то комплексная функция $\widetilde{\Phi}$ будет иметь следующий вид:

$$\widetilde{\Phi} = \Phi(t, v_\perp, v_\parallel) e^{ikz+i\varphi} \ . \tag{2.11}$$

Подставляя выражение (2.11) в уравнение (2.9), после упрощений и сокращения обеих частей этого уравнения на множитель $\exp(ikz + i\varphi)$ получаем следующее уравнение для комплексной функции Φ:

$$\frac{\partial \Phi}{\partial t} + ikv_\parallel \Phi + i\omega_c \Phi = \frac{e}{mkc} \left[ikv_\perp B_x(t) \frac{\partial f_0}{\partial v_\parallel} - \left(\frac{dB_x}{dt} + ikv_\parallel B_x(t) \right) \frac{\partial f_0}{\partial v_\perp} \right] \ . \tag{2.12}$$

Тогда действительная величина — возмущение функции распределения — δf, удовлетворяющее уравнению (2.9), может быть записана с помощью функции Φ:

$$\delta f(t, z, \varphi, v_\perp, v_\parallel) = \frac{1}{2} \left[\Phi(t, v_\perp, v_\parallel) e^{ikz+i\varphi} + \Phi^*(t, v_\perp, v_\parallel) e^{-ikz-i\varphi} \right] \ , \tag{2.13}$$

где верхний символ * означает комплексное сопряжение. Легко можно проверить, что комплексный ток $j_x - ij_y$ в уравнении (2.6) для компоненты поля $\widetilde{B}_x(t,z) = B_x(t)e^{ikz}$ выражается через функцию Φ следующим образом:

$$j_x - ij_y = -e\pi e^{ikz} \int_0^\infty dv_\perp \int_{-\infty}^\infty dv_\parallel \Phi(t, v_\perp, v_\parallel) v_\perp^2 \ . \tag{2.14}$$

Тогда, принимая во внимание (2.6) и (2.14), уравнение для компонеты поля $B_x(t)$ будет иметь вид

$$B_x + \frac{1}{k^2c^2}\frac{d^2B_x}{dt^2} = -\frac{4\pi^2 e}{kc} \int_0^\infty dv_\perp \int_{-\infty}^\infty dv_\parallel \Phi(t, v_\perp, v_\parallel) v_\perp^2 \ . \tag{2.15}$$

Для удобства расчётов введём новую функцию $F(t, v_\parallel)$:

$$F(t, v_\parallel) = \pi \int_0^\infty v_\perp^2 \Phi(t, v_\perp, v_\parallel) dv_\perp \ . \tag{2.16}$$

Если теперь умножить все члены уравнения (2.12) на $\pi v_\perp^2$ и проинтегрировать по $dv_\perp$, то в результате получается окончательное уравнение для этой функции $F(t, v_\parallel)$:

$$\frac{\partial F}{\partial t} + ikv_\parallel F + i\omega_c F =$$
$$\frac{e}{mkc}\left[ikB_x(t)\frac{\partial g(v_\parallel)}{\partial v_\parallel} + \left(\frac{dB_x}{dt} + ikv_\parallel B_x(t)\right) f_{0\parallel}(v_\parallel)\right] \ , \tag{2.17}$$

где введены следующие обозначения величин, полностью определяемых невозмущённой функцией распределения:

$$g(v_\parallel) = \pi \int_0^\infty v_\perp^3 f_0(v_\perp, v_\parallel) dv_\perp \ , \quad f_{0\parallel}(v_\parallel) = 2\pi \int_0^\infty v_\perp f_0(v_\perp, v_\parallel) dv_\perp \ . \tag{2.18}$$

Тогда уравнение (2.15) для компоненты поля $B_x(t)$ с учётом определения (2.16) приобретает окончательный вид:

$$B_x(t) + \frac{1}{k^2c^2}\frac{d^2B_x(t)}{dt^2} = -\frac{4\pi e}{kc} \int_{-\infty}^\infty F(t, v_\parallel) dv_\parallel \ . \tag{2.19}$$

Пара взаимосвязанных уравнений (2.17), (2.19) составляет искомую замкнутую систему уравнений, которая позволяет самосогласованно определить как электромагнитное поле волны, так и величину F. Обратим внимание, что в данной системе уравнений компонента поля B_x есть функция только от t, в то время как

функция распределения F зависит только от t и $v_\parallel$. Таким образом, выведенная система уравнений оказывается аналогичной известной системе уравнений Больцмана–Власова для ленгмюровской волны [95].

Для решения этой системы уравнений используем преобразование Фурье–Лапласа [144] с комплексной частотой ω, следуя стандартной процедуре [97]. Пусть компонента поля $B_x(t)$ удовлетворяет следующему условию: $B_x(t) = 0$ при $t < 0$ и $|B_x(t)| < Me^{\alpha t}$ при $t \geq 0$, где M и α – две положительные константы. Тогда прямое и обратное преобразования Фурье–Лапласа, соответственно, имеют вид [144]:

$$B_x(\omega) = \int_0^\infty B_x(t)e^{i\omega t}dt \ , \quad B_x(t) = \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty+i\sigma}^{\infty+i\sigma} B_x(\omega)e^{-i\omega t}d\omega \ , \quad \sigma > \alpha. \quad (2.20)$$

Интегрирование в обратном преобразовании Фурье–Лапласа выполняется в верхней полуплоскости комплексной плоскости ω вдоль прямой, проходящей на фиксированном расстоянии $\sigma > \alpha$ от действительной оси. Прямое и обратное преобразования Фурье–Лапласа для возмущения функции распределения $F(t, v_\parallel)$ имеют аналогичный вид.

Применение преобразований Фурье–Лапласа для (2.17) и (2.19) приводит к следующим уравнениям:

$$B_x(\omega)\left(1 - \frac{\omega^2}{k^2c^2}\right) + \frac{4\pi e}{kc}\int_{-\infty}^{\infty} F(\omega, v_\parallel)dv_\parallel =$$

$$= \frac{1}{k^2c^2}\left[\frac{dB_x(t=0)}{dt} - i\omega B_x(t=0)\right] \ , \quad (2.21)$$

$$F(\omega, v_\parallel)(kv_\parallel - \omega + \omega_c) + iF(t=0, v_\parallel) =$$

$$= \frac{e}{mkc}\left\{B_x(\omega)\left[k\frac{dg}{dv_\parallel} + (kv_\parallel - \omega)f_{0\parallel}\right] + iB_x(t=0)f_{0\parallel}\right\} \ . \quad (2.22)$$

Подставляя величину $F(\omega, v_\parallel)$ из (2.22) в уравнение (2.21), получаем одно замкнутое уравнение относительно компоненты поля $B_x(\omega)$:

$$B_x(\omega)\left[1 - \frac{\omega^2}{k^2c^2} + \frac{4\pi e^2}{mk^2c^2}\int_{-\infty}^{\infty}\frac{k\frac{dg}{dv_\parallel} + (kv_\parallel - \omega)f_{0\parallel}}{kv_\parallel - \omega + \omega_c}dv_\parallel\right] = \quad (2.23)$$

$$= \frac{1}{k^2c^2}\left[\frac{dB_x(t=0)}{dt} - i\omega B_x(t=0)\right] + \frac{4\pi ie}{kc}\int_{-\infty}^{\infty}\frac{F(t=0, v_\parallel) - \frac{eB_x(t=0)}{mkc}f_{0\parallel}}{kv_\parallel - \omega + \omega_c}dv_\parallel \ .$$

2.2 Дисперсионное уравнение для свистовых волн

Если частотная зависимость $B_x(\omega)$ найдена, то зависимость компоненты поля от времени вычисляется из второго выражения (2.20) путём интегрирования по ω в верхней полуплоскости, как это описано выше (именно там $B_x(\omega)$ — аналитическая функция). При этом контур интегрирования замыкается на бесконечности в нижней полуплоскости комплексной частоты. Компонента поля $B_x(\omega)$ находится из (2.23) путём деления правой части (2.23) на квадратную скобку в левой части этого же уравнения. Обозначим последнюю величину как

$$D(\omega;k) = 1 - \frac{\omega^2}{k^2c^2} + \frac{4\pi e^2}{mk^2c^2}\int_{-\infty}^{\infty} \frac{kdg/dv_\parallel + (kv_\parallel - \omega)f_{0\parallel}}{kv_\parallel - \omega + \omega_c} dv_\parallel \ . \qquad (2.24)$$

Если приравнять её нулю, то получится дисперсионное уравнение для комплексной частоты ω как функции волнового числа k. В этом выражении функции $f_{0\parallel}$ и $dg/dv_\parallel$ считаются заданными, так как детерминируются невозмущённой функцией распределения; они могут быть рассчитаны из (2.18). Поскольку $\int_{-\infty}^{\infty} f_{0\parallel} dv_\parallel = n_0$, где n_0 – невозмущенная плотность плазмы, то, используя определение электронной плазменной частоты $\omega_p^2 = 4\pi n_0 e^2/m$, запишем величину $D(\omega;k)$ в следующем виде:

$$D(\omega;k) = 1 - \frac{\omega^2 - \omega_p^2}{k^2c^2} + \frac{4\pi e^2}{mk^2c^2}\int_{-\infty}^{\infty} \frac{dg/dv_\parallel - (\omega_c/k)f_{0\parallel}}{v_\parallel - (\omega - \omega_c)/k} dv_\parallel \ . \qquad (2.25)$$

Поскольку в верхней полуплоскости $\mathrm{Im}(\omega) > \sigma > 0$ величина $D(\omega;k)$ является аналитической функцией, то она полностью определена уравнением (2.25). Однако, интересующий нас корень дисперсионного уравнения

$$D(\omega;k) = 0 \qquad (2.26)$$

лежит ниже прямой $\mathrm{Im}(\omega) = \sigma$. Следовательно, необходимо найти способ аналитического продолжения комплексной функции $D(\omega;k)$ в нижнюю полуплоскость комплексной частоты ω, чтобы можно было найти такой корень.

Таким образом, в выведенной формуле (2.25) вместо одной невозмущенной функции распределения $f_0(v_\perp, v_\parallel)$, которая зависит от $v_\perp$ и $v_\parallel$, будем использовать функции $g(v_\parallel)$ и $f_{0\parallel}(v_\parallel)$ (2.18), каждая из которых зависит от единственной величины $v_\parallel$. В результате, решая уравнение $D(\omega;k) = 0$, можно определить искомую комплексную частоту. Это уравнение полностью аналогично

дисперсионному уравнению для ленгмюровских волн, проанализированному в работе [97]. По сути, в работе [97] предполагается, что $\partial f_0/\partial v_\parallel$ — аналитическая функция действительной переменной $v_\parallel$. В результате, аналитическое продолжение интеграла осуществлено путём смещения контура интегрирования в комплексную плоскость $v_\parallel$. При аналитическом задании функции распределения (модельный вид) такая процедура также может быть применима к полученным нами формулам. Однако, если функция распределения задана в табличном виде, например, восстанавливается из спутниковых данных (очевидно, что $v_\parallel$ — реальная величина), то использование такого метода затруднительно и не может быть обосновано в общем виде. Заметим, что для неустойчивой плазмы корень дисперсионного уравнения лежит в верхней полуплоскости комплексной частоты ω, поэтому его можно найти вовсе без привлечения аналитического продолжения интеграла.

Будем так же полагать, что рассчитанные с помощью спутниковых данных функции, которые входят в числитель под знаком интеграла (2.25), являются аналитическими, но чтобы аналитически продолжить этот интеграл в нижнюю полуплоскость комплексной частоты ω, будем применять принцип непрерывности [145]. В данном случае будем использовать следующую формулировку принципа непрерывности. Если $\Psi_1(\omega)$ и $\Psi_2(\omega)$ являются аналитическими функциями комплексной переменной ω соответственно во всей верхней и нижней полуплоскости, и каждая из них сохраняет непрерывность, а при этом на самой действительной ω-оси выполняется равенство $\Psi_1(\omega) = \Psi_2(\omega)$, тогда $\Psi_2(\omega)$ — это аналитическое продолжение $\Psi_1(\omega)$ в нижнюю полуплоскость.

Введём следующее обозначение в интеграле (2.25):

$$Q(v_\parallel) = \frac{dg}{dv_\parallel} - \frac{\omega_c}{k} f_{0\parallel} \ . \tag{2.27}$$

Пусть для определенности $k > 0$. В этом случае видно, что в верхней полуплоскости интеграл

$$I_1(\omega) = \int_{-\infty}^{\infty} \frac{Q(v_\parallel) dv_\parallel}{v_\parallel - (\omega - \omega_c)/k} \tag{2.28}$$

является аналитической функцией переменной ω. Если для комплексной частоты $\omega = a + ib$ найти предел при $\mathrm{Im}(\omega) \to +0$ с использованием формулы Сохоцкого (см., например, [146]), то получаем значение интеграла (2.28) на дей-

ствительной оси:

$$I_1(a) = \lim_{b\to+0}\int_{-\infty}^{\infty}\frac{Q(v_\parallel)dv_\parallel}{v_\parallel-(a-\omega_c)/k-ib/k} =$$

$$= P.V.\int_{-\infty}^{\infty}\frac{Q(v_\parallel)dv_\parallel}{v_\parallel-(a-\omega_c)/k} + i\pi Q\left(\frac{a-\omega_c}{k}\right) . \qquad (2.29)$$

Здесь буквы *P.V.* перед интегралом означают "Principal Value", т. е. интеграл берётся в смысле главного значения. В нижней полуплоскости комплексной частоты ω наш интеграл (2.28) тоже является аналитической функцией, но его предел снизу, т. е. при $\mathrm{Im}(\omega)\to -0$ равен другой величине:

$$\lim_{b\to-0}\int_{-\infty}^{\infty}\frac{Q(v_\parallel)dv_\parallel}{v_\parallel-(a-\omega_c)/k-ib/k} =$$

$$= P.V.\int_{-\infty}^{\infty}\frac{Q(v_\parallel)dv_\parallel}{v_\parallel-(a-\omega_c)/k} - i\pi Q\left(\frac{a-\omega_c}{k}\right) . \qquad (2.30)$$

Будем считать функцию $Q(v_\parallel)$ аналитической функцией своего аргумента $v_\parallel$. В нижней полуплоскости ω введём следующую аналитическую функцию:

$$I_2(\omega) = \int_{-\infty}^{\infty}\frac{Q(v_\parallel)dv_\parallel}{v_\parallel-(\omega-\omega_c)/k} + 2\pi i Q\left(\frac{\omega-\omega_c}{k}\right) . \qquad (2.31)$$

Сопоставляя выражения (2.31), (2.30) и (2.29), легко убедиться, что

$$\lim_{b\to-0} I_2(\omega) = \lim_{b\to+0} I_1(\omega) .$$

Поскольку равенство $I_2(\mathrm{Re}\,[\omega]) = I_1(\mathrm{Re}\,[\omega])$ выполняется на действительной оси, то получаем доказательство, что введённая в (2.31) функция $I_2(\omega)$ является аналитическим продолжением интересующей нас функции $I_1(\omega)$ в нижнюю полуплоскость (согласно принципу непрерывности).

Пусть функция $Q(v_\parallel)$ задана численно. Выделим явно действительную и мнимую часть частоты $\omega = a + ib$ и тождественно преобразуем интеграл (2.28) следующим образом:

$$\int_{-\infty}^{\infty}\frac{Q(v_\parallel)dv_\parallel}{v_\parallel-(\omega-\omega_c)/k} =$$

$$= \int_{-\infty}^{\infty}\frac{Q(v_\parallel)(v_\parallel-v_{\text{R}})dv_\parallel}{(v_\parallel-v_{\text{R}})^2+b^2/k^2} + i\frac{b}{k}\int_{-\infty}^{\infty}\frac{Q(v_\parallel)dv_\parallel}{(v_\parallel-v_{\text{R}})^2+b^2/k^2} , \qquad (2.32)$$

где введено обозначение для резонансной скорости

$$v_{\text{R}} = \frac{a-\omega_c}{k} . \qquad (2.33)$$

Разобъём каждую из обеих областей интегрирования в (2.32) на три интервала

$$(-\infty,\infty)=([v_{\text{R}}-A,v_{\text{R}}-\delta v),[v_{\text{R}}-\delta v,v_{\text{R}}+\delta v],(v_{\text{R}}+\delta v,v_{\text{R}}+A])\ .$$

В данном разбиении величина A выбирается достаточно большой, такой, чтобы функция $Q(v_{\parallel})$ обращалась в ноль слева ($v_{\parallel}<v_{\text{R}}-A$) и справа ($v_{\parallel}>v_{\text{R}}+A$) от экспериментального интервала (табличное задание функции по спутниковым данным, как и численный счёт всегда предполагают конечность интервала). Выберем δv таким, чтобы вследствие малости промежутка $[v_{\text{R}}-\delta v,v_{\text{R}}+\delta v]$ можно было пренебречь изменением функции $Q(v_{\parallel})$ (т.е. $Q(v_{\parallel})\to Q\,(v_{\text{R}})$). В результате интегрирования по данному интервалу первое слагаемое в (2.32) исчезает (отрезок симметричен и подынтегральное выражение нечётное), а второе слагаемое сводится к выражению

$$i\frac{b}{k}\int_{v_{\text{R}}-\delta v}^{v_{\text{R}}+\delta v}\frac{Q(v_{\parallel})dv_{\parallel}}{(v_{\parallel}-v_{\text{R}})^2+b^2/k^2}=2iQ(v_{\text{R}})\text{arctg}\left(\frac{k\delta v}{b}\right).\qquad(2.34)$$

В итоге получаем следующее выражение для интересующего нас интеграла:

$$\int_{-\infty}^{\infty}\frac{Q(v_{\parallel})dv_{\parallel}}{v_{\parallel}-(\omega-\omega_c)/k}=$$

$$=\left(\int_{v_{\text{R}}-A}^{v_{\text{R}}-\delta v}+\int_{v_{\text{R}}+\delta v}^{v_{\text{R}}+A}\right)\frac{Q(v_{\parallel})(v_{\parallel}-v_{\text{R}}+ib/k)dv_{\parallel}}{(v_{\parallel}-v_{\text{R}})^2+b^2/k^2}+2iQ(v_{\text{R}})\text{arctg}\left(\frac{k\delta v}{b}\right)\ .\quad(2.35)$$

В некоторых случаях бывает полезен следующий подход. Разобьём единую функцию распределения на сумму “холодной” и “горячей” компонент, отметив соответствующие величины верхними индексами $^{(c)}$ и $^{(h)}$. Такое разбиение часто бывает применимо (и удобно) для теоретического описания свойств магнитосферной плазмы, когда дисперсия волн в основном определяется более плотной холодной компонентой, а затухание или усиление волн в основном определяется менее плотной горячей компонентой плазмы. Чтобы записать дисперсионное уравнение (2.26), преобразуем выражение (2.25) для величины $D(\omega;k)$. Для этого вначале запишем разбиение

$$f_0(v_\perp,v_{\parallel})=f_0^{(c)}(v_\perp,v_{\parallel})+f_0^{(h)}(v_\perp,v_{\parallel})\equiv\frac{n^{(c)}}{\pi v_\perp}\delta(v_\perp)\delta(v_{\parallel})+f_0^{(h)}(v_\perp,v_{\parallel})\ ,\qquad(2.36)$$

но при этом не будем предполагать плотность $n^{(h)}$ горячей компоненты, которая определяется как $\int f_0^{(h)}(v_\perp,v_{\parallel})d^3\mathbf{v}$, малой по сравнению с плотностью холодной

компоненты $n^{(c)}$. Отметим, что величина плазменной частоты ω_p^2, входящая в выражение (2.25), пропорциональна сумме обеих плотностей $n^{(c)} + n^{(h)}$. Из разбиения (2.36) и определений (2.18) получаем

$$f_{0\|}^{(c)}(v_\|) = n^{(c)}\delta(v_\|) \ , \quad g^{(c)}(v_\|) = 0 \ , \tag{2.37}$$

следовательно, величина $Q^{(c)}(v_\|)$ из (2.27), относящаяся к холодной компоненте распределения, преобразуется в

$$Q^{(c)}(v_\|) = -\frac{\omega_c}{k} n^{(c)}\delta(v_\|) \ . \tag{2.38}$$

Вклад холодной компоненты электронного распределения в выражение (2.25) можно аналитически учесть в общем виде. В результате получаем следующее дисперсионное уравнение:

$$1 - \frac{\omega^2 - \omega_p^2}{k^2c^2} + \frac{(\omega_p^{(c)})^2}{k^2c^2}\frac{\omega_c}{\omega - \omega_c} + \frac{4\pi e^2}{mk^2c^2}\int_{-\infty}^{\infty} \frac{Q^{(h)}dv_\|}{v_\| - (\omega - \omega_c)/k} = 0 \ . \tag{2.39}$$

Из данного уравнения видно, что в интересующем нас интеграле (2.35) достаточно учесть лишь энергичную составляющую. Если ею пренебречь ($\omega_p \to \omega_p^{(c)}$), то (2.39) переходит в

$$N^2 \equiv \frac{k^2c^2}{\omega^2} = 1 + \frac{\omega_p^2}{\omega(\omega_c - \omega)} \ . \tag{2.40}$$

(Это N^2 для свистовых волн при $\mathbf{k} \parallel \mathbf{B}_0$.)

Вернёмся опять к общему случаю. Упрощённый ранее интеграл (2.35) для (2.25) или (2.39) корректно выведен для верхней полуплоскости. Однако, в зависимости от того, будет это инкремент или декремент, корни уравнений (2.25) или (2.39) могут оказаться и в нижней полуплоскости. Следовательно, требуется получить общее выражение для (2.35), применимое при всех комплексных ω. Воспользуемся аналитическим продолжением (2.31). В результате приходим к следующей форме, применимой во всей комплексной плоскости и пригодной для численного счёта:

$$\int_{-\infty}^{\infty} \frac{Q(v_\|)dv_\|}{v_\| - (\omega - \omega_c)/k} = \left(\int_{v_\mathrm{R}-A}^{v_\mathrm{R}-\delta v} + \int_{v_\mathrm{R}+\delta v}^{v_\mathrm{R}+A}\right) \frac{Q(v_\|)(v_\| - v_\mathrm{R} + ib/k)dv_\|}{(v_\| - v_\mathrm{R})^2 + b^2/k^2} + \tag{2.41}$$

$$+2iQ(v_\mathrm{R})\mathrm{arctg}\left(\frac{k\delta v}{b}\right) + \pi i Q\left(v_\mathrm{R} + i\frac{b}{k}\right)\left[1 - \mathrm{sign}\left(\frac{1}{b}\right)\right] \ .$$

Отсюда непосредственно видно, что данный интеграл (2.41) в пределе $b \to +0$ переходит в выражение, которое даёт формула Сохоцкого, что соответствует известному правилу обхода полюса Ландау.

Практическое применение формулы (2.41) для численных расчётов инкремента требует пояснений. Записанный в формуле интервал интегрирования симметричен относительно ненулевой резонансной скорости $v_{\text{R}} < 0$ (за пределами этого промежутка $Q(v_{\parallel}) \equiv 0$). Однако, на практике $Q(v_{\parallel})$, как аналитическая, так и, например, определяемая из спутниковых данных, симметрична, как правило, относительно $v_0 \approx 0$. При этом $Q(v_{\parallel}) \equiv 0$ за пределами $(-v_m, +v_m) \in (v_{\text{R}} - A, v_{\text{R}} + A)$. Поскольку математический вывод (2.41) опирался на строгое равенство нулю интеграла от нечётной функции

$$\left(\int_{v_{\text{R}}-A_1}^{v_{\text{R}}-\delta v_1} + \int_{v_{\text{R}}+\delta v_1}^{v_{\text{R}}+A_1} \right) \frac{Q(v_{\text{R}})(v_{\parallel} - v_{\text{R}}) dv_{\parallel}}{(v_{\parallel} - v_{\text{R}})^2 + b^2/k^2}$$

по любому интервалу, который симметричен относительно резонансной скорости v_{R}, т.е. при произвольных $A_1, \delta v_1, b$, то области $(-v_m, v_{\text{R}} - \delta v)$ и $(v_{\text{R}} + \delta v, +v_m)$ (хотя они и разные) при численном счёте должны проходиться с одинаковым маленьким шагом, а не разбиваться на равное количество шагов. Из самого вывода формулы (2.41) также следует, что величина δv должна выбираться достаточно маленькой, чтобы можно было считать $Q(v_{\parallel})$ постоянной на интервале $(v_{\text{R}} - \delta v, v_{\text{R}} + \delta v)$. Если $Q(v_{\parallel})$ определяется дискретно с интервалом Δv, то δv должна выбираться намного меньшей, чтобы результат расчёта был независим от δv.

В случае $\gamma < 0$ предложенный метод решения опирается на возможность аналитического представления $Q(v_{\parallel})$ в нижней полуплоскости. Наконец, представим метод решения дисперсионного уравнения, не использующий аналитическое представление функции $Q(v_{\parallel})$, который применим также и в случае численного (табличного) задания функции распределения, например, полученной из спутниковых данных по дифференциальным потокам частиц. В общем случае достаточно получить аналитическое представление итогового интеграла (2.41) во всей плоскости ω, а не его части – $Q(v_{\parallel})$. Обратим внимание, что сам интеграл (2.41) — аналитическая функция ω в верхней полуплоскости (включая действительную ось). Это свойство не зависит от аналитических свойств

$Q(v_\parallel)$. Поэтому алгоритм решения состоит в следующем. Сначала ищем интеграл (2.41) на действительной оси:

$$\lim_{\varepsilon\to 0}\int_{-\infty}^{\infty}\frac{Q(v_\parallel)dv_\parallel}{v_\parallel-(a+i\varepsilon-\omega_c)/k}=P.V.\int_{-\infty}^{\infty}\frac{Q(v_\parallel)dv_\parallel}{v_\parallel-v_{\text{R}}}+i\pi Q(v_{\text{R}})\equiv I(a;k)\ . \quad (2.42)$$

При этом величина $I(a;k)$ оказывается комплексной функцией действительной переменной a и действительного параметра k. Найденный интеграл продолжим в комплексную плоскость путём замены a на комплексную величину ω. После такого численного расчёта, используя функцию polyfit (в среде MATLAB), можно представить $I(a;k)$ в виде аналитической функции. Очевидно,что при $\gamma>0$ оба способа приводят к одинаковым результатам при решении дисперсионного уравнения. В следующем параграфе оба эти способа будут применяться для вычисления инкрементов, используя спутниковые данные по дифференциальным потокам электронов.

2.3 Расчёт инкремента свистовых волн на основе данных спутников Van Allen Probe A и MMS

Инкремент волны зависит от деталей реальной функции распределения электронов, которая может быть восстановлена из измерений дифференциальных потоков энергичных частиц. Например, регистрация потоков энергичных электронов как функции энергии и питч-угла α осуществлялась на спутниках Van Allen Probes A, B и MMS. Функция распределения энергичных электронов связана с этими потоками следующим соотношением [135]:

$$f_{\text{СГС}}=1.62\cdot 10^{-37}\frac{J}{W}\ . \quad (2.43)$$

В этом соотношении функция распределения электронов $f_{\text{СГС}}$ получается записанной в системе единиц СГС, если поток электронов J и их энергия W подставляются соответственно в $1/(\text{см}^2\cdot\text{с}\cdot\text{ср}\cdot\text{кэВ})$ и кэВ. Данная взаимосвязь (2.43) носит универсальный характер, т. е. не связана с тем, в каких переменных выражена сама искомая функция распределения. При этом, по определению, всегда выполняется следующее условие нормировки (записано в системе единиц

СГС): $\int f d^3\mathbf{v} = n$, где $d\mathbf{v}$ – элемент объёма в пространстве скоростей, n – локальная плотность частиц. Искомую функцию распределения можно записать через любые переменные. Для того, чтобы воспользоваться соотношениями, выведенными в предыдущем параграфе, необходимо выразить функцию распределения (2.43) в переменных $(v_\parallel, v_\perp)$ (у нас нет измеренных данных на равномерной сетке в переменных $(v_\parallel, v_\perp)$). Следовательно, нам нужно выразить энергию и питч-угол (поток J зависит от этих величин) через переменные $(v_\parallel, v_\perp)$. Спутниковые данные имеют следующую структуру: 1) отсутствуют данные для малых питч-углов; 2) данные по энергии начинаются от некоторого конечного ненулевого значения и ограничены некоторым конечным максимальным значением. После перехода к переменным $v_\parallel$ и $v_\perp$ и интерполяции интегрирование выполняется по $v_\perp$ от минимальных до максимальных значений при каждом фиксированном $v_\parallel$ (см. Рисунок 2.1), чтобы получить $f_{0\parallel}(v_\parallel)$ и $g(v_\parallel)$, нужные для дисперсионного уравнения. После этого можно воспользоваться подходом, развитым в предыдущем параграфе.

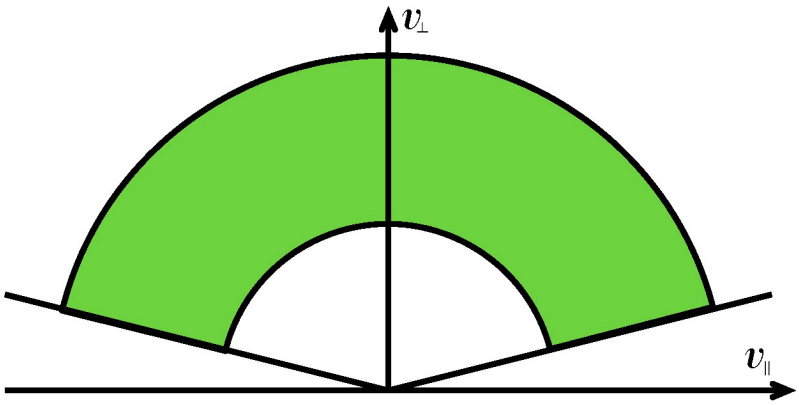


Рисунок 2.1 – Схема области скоростей, доступной экспериментально

Вычислим предложенным методом инкремент свистовых волн, используя данные по плотности холодной составляющей и распределению энергичных электронов, полученные спутником Van Allen Probe A 12 декабря 2017 года в 11:25:34 UT. Расположение спутника в указанное время: магнитная широта $-0.28°$, $L = 3.21$. Для холодной компоненты $n^{(c)} = 1383$ см$^{-3}$. В следующих 5 энергетических каналах надёжно регистрировались энергичных электроны: 33, 54, 80, 108 и 143 кэВ, на девяти питч-углах 24.5, 40.9, 57.3, 73.6, 90.0, 106.4, 122.7, 139.1 и 155.5 градусов. Измерения потоков энергичных частиц на спутниках Van Allen Probes проводились с временным разрешением ~ 10 с прибором MagEIS

(The Magnetic Electron Ion Spectrometer) [147]. Восстановленная по измеренным

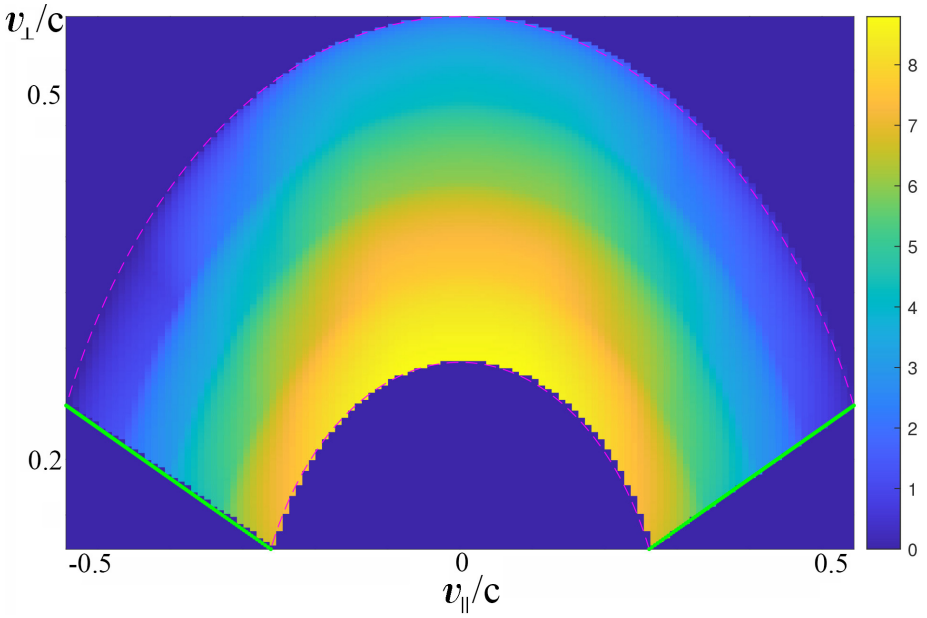


Рисунок 2.2 – Двумерная функция распределения, восстановленная по спутниковым данным

дифференциальным потокам двумерная функция распределения для указанного момента времени и положения спутника Van Allen Probe A изображена на Рисунке 2.2. Цветовая гамма показывает количество энергичных частиц с данными характеристиками. С помощью полученной функции распределения вычисляем из (2.18) одномерные функции $f_{0\parallel}(v_\parallel)$ и $g(v_\parallel)$, которые изображены на Рисунке 2.3.

В используемых спутниковых данных электронная плотность N_e определена дополнительно и существенно превышает плотность энергичных электронов. В подобном случае частоту волны и инкремент следует находить из уравнения (2.39), где, хотя ω_p и учитывает горячую составляющую, но $\omega_p^2 \simeq (\omega_p^{(c)})^2$.

Дисперсионное соотношение (2.39) определяет действительную часть ω и инкремент как функции волнового числа k. В анализируемом случае дисперсия детерминируется холодной составляющей плазмы (так как концентрация холодных электронов намного превышает концентрацию энергичных частиц). Поэтому действительная часть ω и k связаны взаимно однозначной зависимостью. В результате инкремент может быть представлен, как функция ω: разрешая численно соотношение (2.39), получаем данную взаимосвязь. Она изображена на Рисунке 2.4 сплошной линией.

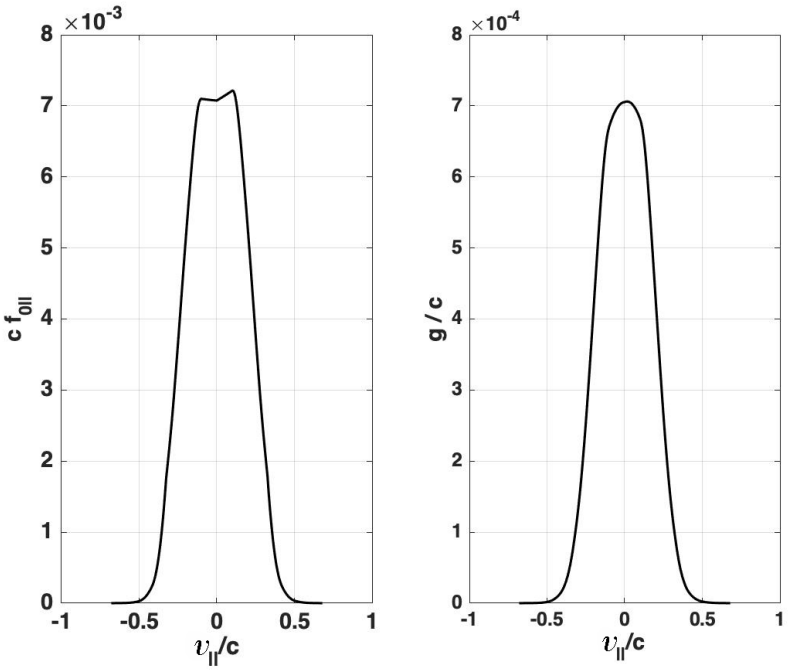


Рисунок 2.3 – Зависимости одномерной функции распределения $f_{0\parallel}(v_\parallel)$ и функции $g(v_\parallel)$ из (2.18) от нормированной $v_\parallel$. Для удобства представления на графиках показаны величины $cf_{0\parallel}(v_\parallel)$ и $g(v_\parallel)/c$ одинаковой размерности с $Q(v_\parallel)$

Хорошо известна другая формула (см. [24]) для линейного инкремента волны, применимая в случае подобного деления на $n^{(c)}$ и $n^{(h)}$:

$$\gamma = \frac{4\pi^3 e^2 \omega(\omega_c - \omega)}{mk^2c^2\omega_c} \int_0^\infty dv_\perp v_\perp^3 \left(\frac{\partial f_0}{\partial v_\parallel} + \frac{\omega_c}{kv_\perp} \frac{\partial f_0}{\partial v_\perp} \right)_{v_\parallel = (\omega - \omega_c)/k} . \qquad (2.44)$$

При получении формулы (2.44) считалось, что $N = kc/\omega$ есть известная функция частоты, а также что существует выражение для плотности энергии волны, детерминируемое дисперсионным уравнением. На Рисунке 2.4 штриховой линией изображена зависимость безразмерного инкремента от безразмерной частоты, найденная из (2.44) и функции распределения, восстановленной из спутниковых данных.

Таким образом, оба метода расчёта приводят к сопоставимым инкрементам, если $n^{(c)} \gg n^{(h)}$, т.е. дисперсионные свойства детерминируются плотной холодной составляющей плазмы, а инкремент детерминируется функцией распределения “горячих” электронов.

Однако, описанный в данной главе метод работает также и в том случае, если в распределении частиц нельзя выделить плотную холодную и разрежен-

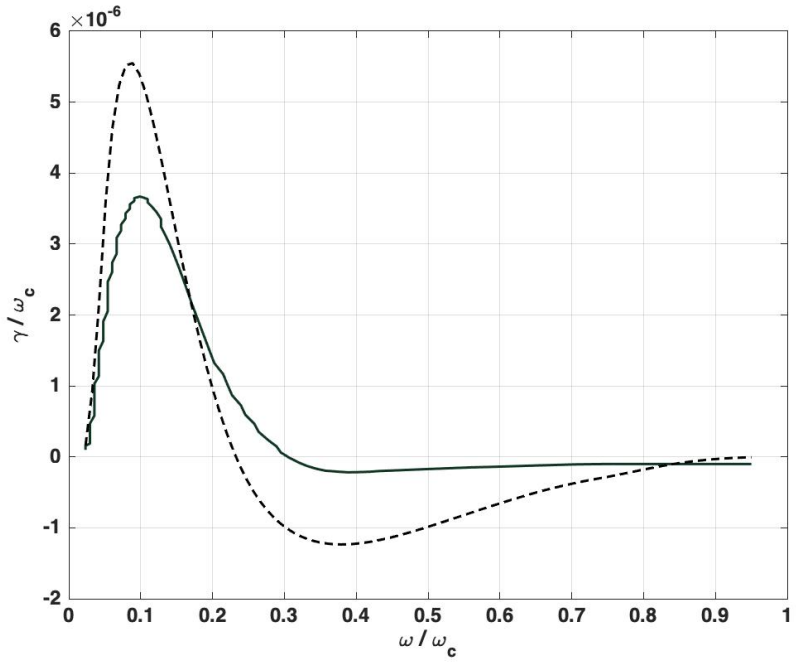


Рисунок 2.4 – Зависимость безразмерного инкремента от безразмерной частоты по данным спутника Van Allen Probe A изображена сплошной линией; зависимость безразмерного инкремента от безразмерной частоты по тем же данным, найденная по формуле (2.44), показана штриховой линией

ную горячую составляющие. В общем случае из одного комплексного дисперсионного соотношения (2.25) необходимо одновременно искать зависимости как реальной части ω, так и инкремента от волнового числа. Алгоритм нахождения интеграла из (2.25) подробно изложен в параграфе 2.2, а его применение будет продемонстрировано ниже.

Далее анализируются данные по потокам электронов, которые зарегистрированы на одном из спутников MMS [23] 19 июня 2017 года, в 03:57:38.625. В это время спутник проходил хвост магнитосферы Земли при $R = 17\ R_з$. Спутник зарегистрировал $\nu_c \sim 0.515$ кГц. Вычисленная по измеренной функции распределения $n^{(h)} = 0.0887$ см$^{-3}$, что отвечает $\nu_p = 2.6736$ кГц. Заметим, что неравенство $\nu_p \gg \nu_c$ не гарантирует применимость дисперсионного соотношения (2.40), верного для свистов в холодной плазме. Спутниковые данные включают достоверные измерения потоков электронов с временным разрешением ~ 30 мс. Диапазон энергий: 96 эВ – 21 кэВ равномерно расположен на логарифмической шкале (21 канал); диапазон питч-углов: 5° – 175° с шагом 10°. Данные по потокам электронов получены в “burst” моде (включение изме-

рений на малое Δt) — при пересечении спутником плазменных границ и неоднородностей (магнитопаузы, диполизационных фронтов, быстрых плазменных потоков). Значения плотности (и соответствующей ν_p) полностью отвечают измеренным потокам энергичных электронов (электроны < 96 эВ не регистрировались). Поэтому величина $n^{(c)}$ не известна. Это затрудняет расчёт инкремента в указанный ранее момент пролёта спутником определённой точки хвоста магнитосферы. Однако, цель данной главы состоит в демонстрации предложенного общего метода решения дисперсионного уравнения, когда прежние методы не работают. Поэтому получим несколько решений для разных значений $n^{(c)}$.

Пусть вначале $n^{(c)} = 0$. Используя (2.43), получаем фунцию распределения горячих частиц, переписав которую в переменных $(v_\parallel, v_\perp)$, можно рассчитать одномерные функции $f_{0\parallel}(v_\parallel)$, $g(v_\parallel)$ из (2.18) и функцию $Q(v_\parallel, k)$ из (2.27), которые нам нужны для решения дисперсионного уравнения. Полученные функции $f_{0\parallel}(v_\parallel)$, $g(v_\parallel)$ и $Q(v_\parallel, k)$ для $kc/\omega_c = 7.7$ изображены на Рисунке 2.5.

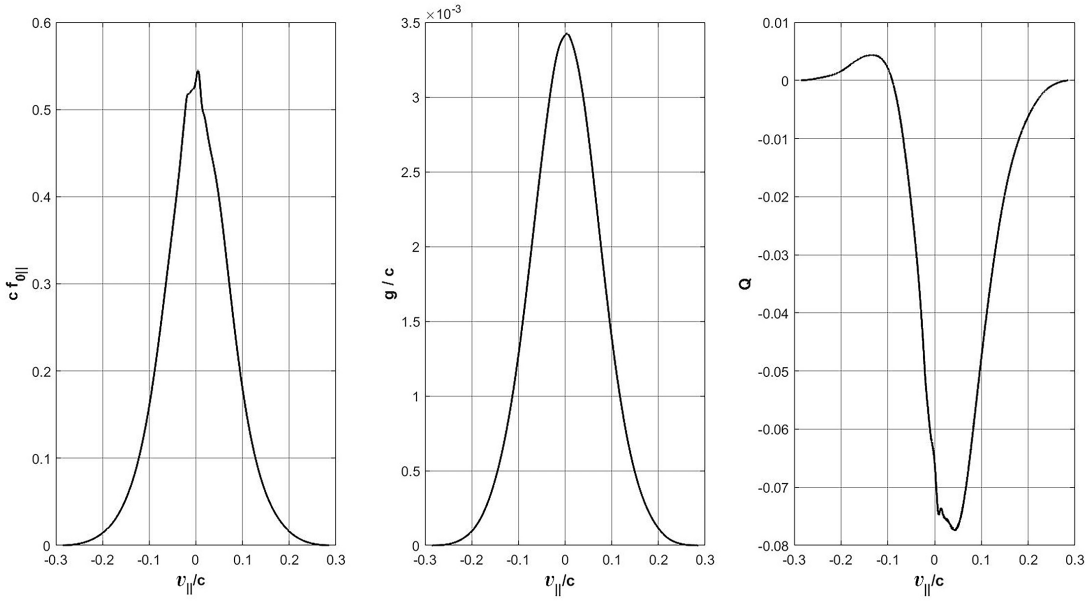


Рисунок 2.5 – Одномерные функции $cf_{0\parallel}(v_\parallel)$ и $g(v_\parallel)/c$, определяемые формулами (2.18), и функция $Q(v_\parallel, k)$ из (2.27) при $kc/\omega_c = 7.7$ по данным спутника MMS 19.06.2017, 03:57:38.625 UT

На Рисунках 2.6 и 2.7 представлены результаты расчётов дисперсионных характеристик и декрементов волн из (2.25) для случая $n^{(c)} = 0$. Так, на Рисунке 2.6 изображены действительная часть частоты (левый график) и соот-

ветствующий декремент (правый график) как функции волнового числа (оно всегда действительное). Как видно из рисунка, одно значение k соответствует двум разным ω, что доказывает существование в этом случае двух волновых мод. Более того, даже для одной моды (на одной непрерывной ветви колебаний) наблюдается немонотонная зависимость ω от k. В результате, одна и та же ω может соответствовать двум разным значениям k. Этот факт приводит к тому, что независимо от выбранной волновой моды декремент при $n^{(c)} = 0$ оказывается не представим в виде однозначной функции от ω (несмотря на то, что частота и декремент сами будут однозначными функциями k — это признак волновой моды). Из правого графика следует, что высокочастотная мода оказалась сильно затухающей. Аналогично, низкочастотная ветвь затухает в области больших k (особенно там, где ω уменьшается с увеличением k). Обратим внимание, что частоты и декременты и первой моды (сплошные линии) и второй моды (штриховые линии) являются однозначными функциями k (в соответствующих областях существования). Таким образом, дисперсионные свойства и затухание волн заметно различаются в случае горячей плазмы и холодной плазмы с небольшим количеством энергичных электронов (например, Рисунок 2.9). Это связано с тем, что в горячей плазме реальная и мнимая часть частоты подчиняются одному комплексному трансцендентному дисперсионному уравнению (2.26). Известно, что “в горячей плазме появляется ряд новых ветвей колебаний магнитоактивной плазмы, слабо и сильно затухающих, длинно- и коротковолновых, причём все они отсутствуют в холодной плазме” [27].

Рисунок 2.7 демонстрирует зависимость декремента от частоты по тем же данным. Здесь зависимость $\gamma(\omega)$ для каждой волновой моды оказывается неоднозначной, что обусловлено немонотонной связью $\omega(k)$. Отметим, что необходимость монотонной зависимости $\omega(k)$ для одной и той же волновой моды не детерминируется никакими общими принципами.

Анализ результатов, рассчитанных для семи измерений в ближайшие предыдущие и последующие моменты времени (интервал 38.505–42.000 с), подтвердил сохранение описанной качественной картины (при небольших количественных вариациях). Значит, малые вариации функции распределения (включая некоторые неточности измерений) не меняют существенно результаты.

Локальные особенности распределения частиц могут влиять на устойчи-

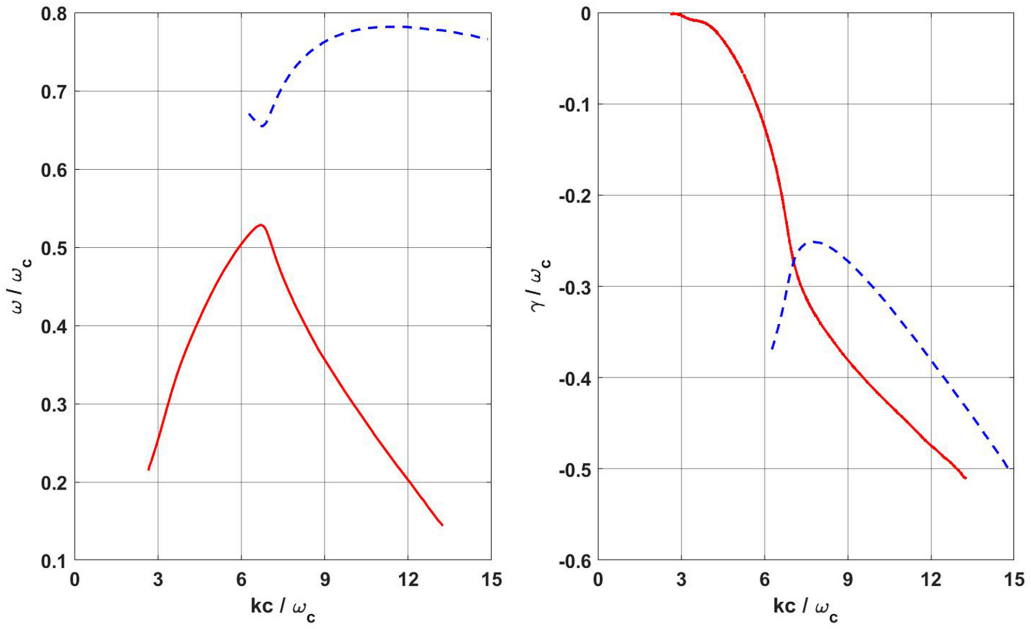


Рисунок 2.6 – Зависимости безразмерных частот обеих ветвей колебаний (левый график) и безразмерных декрементов (правый график) от безразмерного волнового вектора по измерениям спутника MMS; величины, принадлежащие низкочастотной и высокочастотной ветвям, изображены соответственно сплошной и штриховой линиями

вость плазмы. Однако неоднозначная зависимость $\gamma(\omega)$ не детерминируется особенностями функции распределения горячих электронов (см. Рисунок 2.5): она определяется только отсутствием холодной составляющей плазмы. Это доказывается тем фактом, что если добавить в распределение холодные частицы, то немонотонность зависимости $\omega(k)$ пропадёт при той же самой функции распределения горячих электронов. При $n^{(c)} = 0$ обе — реальная и мнимая — части D из дисперсионного уравнения (2.26), (2.25) зависят от интеграла (2.42). Тогда дисперсионное уравнение зависит не столько от функции распределения на действительной оси $v_{\parallel}$, а определяется аналитическим продолжением интеграла (2.42) в комплексную плоскость. В результате известные рассуждения об особенностях функции распределения, которые приводят к неустойчивости, оказываются ограниченными. Если величина $n^{(c)}$ достаточно велика, а инкремент достаточно мал, то область неустойчивости соответствует таким k и ω, что величина Q оказывается положительной в той области скоростей, где находится резонансная скорость. Это связано с тем, что в данном случае мнимая часть D пропорциональна $Q(v_{\mathrm{R}})$.

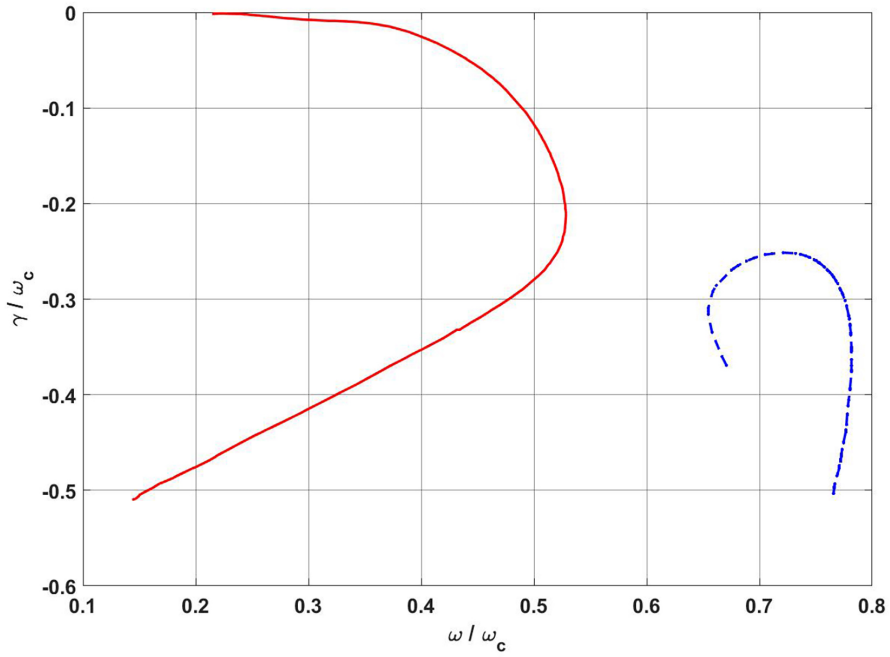


Рисунок 2.7 – Декременты двух волновых мод как функции частоты, соответствующие Рисунку 2.6; неоднозначная зависимость $\gamma(\omega)$ для обеих ветвей связана с немонотонной зависимостью $\omega(k)$

Необходимо сделать замечание о зависимости итоговых результатов от неточности измерений. Обратим внимание, что функции $f_{0\parallel}$ и g из дисперсионного соотношения представляют собой взвешенные интегралы по $v_\perp$ от зарегистрированной функции распределения. Так как функция распределения регистрируется спутником в переменных энергия (W) – питч-угол (α), то интегрирование в (2.18) по $v_\perp$ отвечает интегралу по кривой на плоскости (W, α). Значит, оно уже означает определённое усреднение (см. графики $f_{0\parallel}$ и g на Рисунке 2.5). Таким образом, небольшие ошибки измерений заметно нивелируются и слабо влияют на итоговый результат. Как уже ранее отмечалось, результаты расчётов в ближайшие моменты (секунды) тоже это подтверждают (подчеркнём, что усреднение потоков по t не проводилось).

С увеличением $n^{(c)}$ картина изменяется: начиная с некоторого $n^{(c)}$ вторая мода отсутствует. При этом реальная часть ω и k становятся взаимно однозначными функциями, в результате инкремент становится однозначной функцией частоты. Так, для функции распределения, имевшей место 19.06.2017 в момент времени 03:57:38.625 UT, взаимообусловленные немонотонность зависимости $\omega(k)$ и неоднозначность зависимости $\gamma(\omega)$ исчезают при $n^{(c)}/n^{(h)} = 0.7$.

Это явно видно из Рисунка 2.8. Похожие значения $n^{(c)}/n^{(h)}$, характерные для исчезновения второй моды, получаются и для соседних моментов времени (при этом зависимость $\omega(k)$ переходит в монотонно возрастающую; $\gamma(\omega)$ оказывается однозначной функцией).

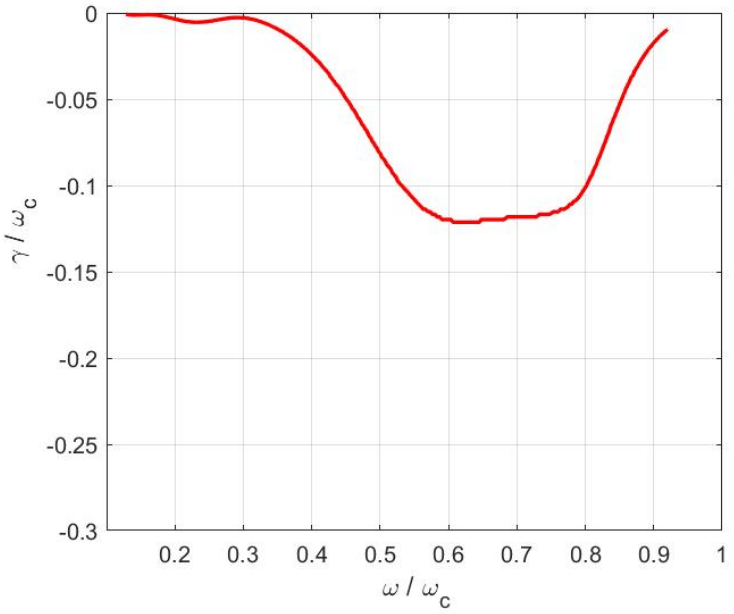


Рисунок 2.8 – Однозначная зависимость безразмерного декремента от безразмерной частоты $\gamma(\omega)$ при $n^{(c)}/n^{(h)} = 0.7$

Результаты вычислений для ещё больших отношений $n^{(c)}/n^{(h)} = 3$ и $n^{(c)}/n^{(h)} = 5$ приведены на Рисунке 2.9 сплошной и штриховой линиями, соответственно. Видно, что в данном случае существует неустойчивый диапазон частот, причём, с увеличением $n^{(c)}$ максимум инкремента смещается в сторону низких частот и по модулю немного уменьшается. Обратим внимание на следующий факт: в том случае, когда плотность холодной составляющей плазмы на несколько порядков превышает плотность горячей составляющей, что характерно для внутренней магнитосферы, максимум относительного инкремента (декремента) оказывается на несколько порядков меньше, чем для случая, когда холодная составляющая плазмы отсутствует, или её плотность соизмерима с плотностью горячей составляющей, что наблюдается в хвосте магнитосферы.

Напомним, что в случае, когда $n^{(c)} \gg n^{(h)}$, $\gamma \ll \omega$, зависимость инкремента γ от плотности холодной составляющей $n^{(c)}$ хорошо известна. Для широкого

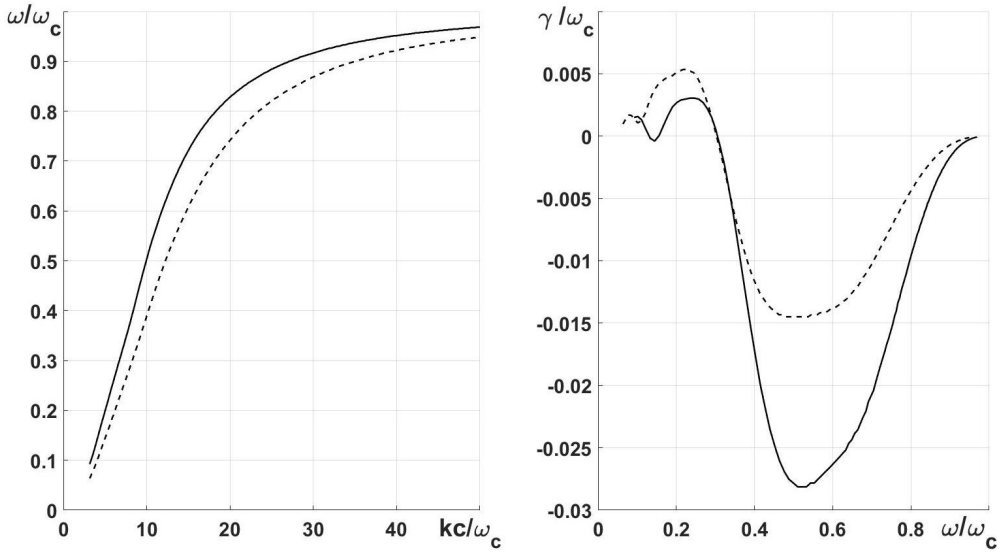


Рисунок 2.9 – Безразмерная частота волны как функция безразмерного волнового числа (левый график) и безразмерный инкремент как функция безразмерной частоты (правый график); сплошная линия отвечает отношению $n^{(c)}/n^{(h)} = 3$, а штриховая линия соответствует отношению $n^{(c)}/n^{(h)} = 5$

класса функций распределения инкремент пропорционален экспоненте

$$\exp\left(-\frac{v_{\text{R}}^2}{v_{T_\parallel}^2}\right) \equiv \exp\left(-\frac{c^2}{v_{T_\parallel}^2}\frac{(\omega_c-\omega)^3}{\omega_p^2\omega}\right) \ , \quad \omega_p^2 \propto n^{(c)} \ ,$$

где $v_{T_\parallel}$ – продольная тепловая скорость, при этом предэкспоненциальный множитель пропорционален величине $\left(n^{(c)}\right)^{-3/2}$ (см., например, формулу (3.2.6) из [59]). Экспонента растёт с ростом $n^{(c)}$, а предэкспоненциальный множитель, наоборот, уменьшается, так что итоговый результат зависит от конкуренции этих двух множителей. Для горячей плазмы обычно $v_{\text{R}}^2 \lesssim v_{T_\parallel}^2$, следовательно, определяющим влиянием является убывание предэкспоненциального множителя, что приводит к уменьшению инкремента с увеличением плотности холодной компоненты плазмы.

Обсудим возможность применения результатов данной главы для интерпретации спутниковых наблюдений. Повышенная волновая активность (с большой интенсивностью), в основном, регистрируется во время геомагнитных возмущений и связана с нестационарным переходным процессом, для описания начальной стадии которого обычно применяют линейное приближение. Очевидно, что знания линейного инкремента недостаточно для определения амплитуды регистрируемых волн, так как они существенно зависят от начального возмуще-

ния, пространственного профиля инкремента и других факторов. Однако, если найдена зависимость $\gamma(\omega)$, то разумно предположить, что максимум спектральной интенсивности регистрируемых волн будет на той же частоте, что и максимум инкремента, и более того, форма зависимости спектральной интенсивности будет отражать частотную зависимость инкремента (вернее, интегрального коэффициента усиления), так как неустойчивость свистовых волн в магнитосфере обычно имеет конвективный характер. Если же волны регистрируются спутником вблизи области их возбуждения, то можно сравнить наблюдаемый спектр с инкрементом, вычисляемым по локальной функции распределения энергичных электронов, которая однозначно связана с дифференциальными потоками электронов, регистрируемыми на том же спутнике. Тогда соответствие между наблюдаемыми спектрами волн, зарегистрированными потоками электронов и вычисленными инкрементами могло бы служить подтверждением правильности расчётов.

2.4 Выводы к Главе 2

В настоящей главе изложен метод решения дисперсионного уравнения для свистовых волн, распространяющихся вдоль внешнего магнитного поля, в случае, когда функция распределения восстанавливается численно по спутниковым измерениям дифференциальных потоков частиц. Задачу удалось свести к одномерной в пространстве скоростей, чтобы дисперсионное уравнение совпадало по форме с уравнением, выведенным в [97]. В отличие от подхода [97] предложенный подход не ограничен условием малости инкремента по сравнению с частотой, а также допускает численное задание функции распределения. Различие, позволяющее устранить ограничение на малость инкремента, заключается с математической точки зрения в том, что вместо смещения контура интегрирования в комплексную плоскость для аналитического продолжения интеграла по скорости в дисперсионном уравнении, применяется принцип непрерывности. Примечательно, что интегрирование по скорости проводится по действительной оси, т.е. там, где и определена функция распределения.

Применение данного подхода было продемонстрировано для двух случаев

расчёта инкремента свистовых волн с использованием спутниковых измерений внешнего магнитного поля, параметров плазмы и дифференциальных потоков электронов различных энергий и питч-углов. Первый пример связан с измерениями спутника Van Allen Probe A в экваториальной области внутренней магнитосферы на $L = 3.21$. В этом случае результаты предложенного подхода подобны результатам, получаемым по формуле (2.44), когда действует предположение о “холодной” дисперсии и малом инкременте. Другой пример связан с вычислением инкремента на основе данных, полученных одним из спутников MMS в хвосте магнитосферы на расстоянии около 17 $R_з$. В этом случае результат расчёта существенно зависит от плотности “холодной” составляющей плазмы (не извлекаемой из имеющихся данных).

Глава 3. Дисперсионные характеристики низкочастотных электронных волн в магнитоактивной плазме произвольной плотности

Настоящая глава посвящена исследованию волн с $\omega \ll \omega_c$ в холодной бесстолкновительной магнитоактивной плазме при произвольном соотношении между ω_p и ω_c. Будет представлено общее дисперсионное уравнение для частоты волны как функции волнового вектора $\mathbf{k}$ и отношения ω_p/ω_c. Эта взаимосвязь представляет собой бикубическое уравнение относительно ω. На основе данного уравнения исследованы области существования различных волновых мод в зависимости от параметра p, их групповая скорость, поляризация и плотность энергии [148]. Основное внимание уделено изучению низкочастотных свистовых волн в разреженной плазме ($\omega_p < \omega_c$), так как среди распространяющихся волновых мод, которые существуют в указанной области параметров, свистовые волны имеют наибольший показатель преломления и играют важную роль в процессах резонансного взаимодействия волн и частиц.

Основные цели данной главы следующие:

— вывести и проанализировать дисперсионное уравнение для частоты волны как функции волнового вектора и параметров плазмы в диапазоне частот $\omega_{\text{LH}} \ll \omega \ll \omega_c$ при произвольном соотношении между ω_p и ω_c, в том числе при $\omega_p < \omega_c$;

— получить аналитическое выражение для угла Жандрэна и определить область его существования;

— рассчитать значения угла Стори для свистовых волн в разреженной магнитоактивной плазме при различных значениях параметров плазмы;

— исследовать поляризацию электрического и магнитного поля и найти плотность энергии волны.

3.1 Основные уравнения

Если считать волновой вектор $\mathbf{k}$ заданным, то в общем случае уравнение (1.8) оказывается уравнением 5-й степени относительно ω^2 [27], т. е. не может быть разрешено аналитически. В нашем же случае, т. е. в рассматриваемом диапазоне частот $\omega \ll \omega_c$, выражения компонент тензора диэлектрической проницаемости (1.11) переходят в следующие:

$$\varepsilon_1 = 1 + \frac{\omega_p^2}{\omega_c^2}\,, \quad \varepsilon_2 = -\frac{\omega_p^2}{\omega\omega_c}\,, \quad \varepsilon_3 = 1 - \frac{\omega_p^2}{\omega^2}\,. \tag{3.1}$$

Компоненты волнового вектора обозначим как $k_z = k_\parallel$ и $k_x = k_\perp$.

Используем безразмерное отношение $p = \omega_p/\omega_c$ и введем безразмерную частоту $F = \omega/\omega_p$ и квадраты безразмерных компонент волнового вектора: перпендикулярной составляющей $q_1 = k_\perp^2 c^2/\omega_p^2$ и продольной составляющей $q_2 = k_\parallel^2 c^2/\omega_p^2$. В новых переменных уравнение (1.8) имеет вид бикубического уравнения для безразмерной частоты F

$$\begin{aligned}\Phi \equiv F^6\left(1+p^2\right)^2 - F^4\left[\left(1+p^2\right)^2 + p^2 + 2\left(q_1+q_2\right)\left(1+p^2\right) + q_1p^2\left(1+p^2\right)\right] + \\ + F^2\left[\left(q_1+q_2\right)^2 + p^2q_1\left(q_1+q_2\right) + \left(q_1+q_2\right)\left(1+2p^2\right) + q_2 + p^2\right] - \\ - q_2\left(q_1+q_2\right) = 0.\end{aligned} \tag{3.2}$$

Уравнение (3.2) справедливо в диапазоне безразмерных частот $F \ll 1/p$ (в размерных переменных это соответствует $\omega \ll \omega_c$) при совершенно произвольном отношении $p = \omega_p/\omega_c$. При больших значениях параметра $p \gg 1$ в исследуемый интервал частот попадает только свистовая мода, а её дисперсионные свойства и поляризация для плотной плазмы подробно изучены. Поэтому основные результаты в данной главе будут относиться к случаю разреженной плазмы $p < 1$. При выполнении количественных расчётов и представлении результатов в виде графиков будут применяться введённые безразмерные величины. При этом аналитические выражения будут представлены, как это принято, в обычных размерных переменных (в формулах будет присутствовать важный безразмерный параметр p).

Приравнивая $A = 0$ в (1.10), находим резонансную частоту свистовых волн (когда $N \to \infty$):

$$\omega_{res} = \sqrt{\frac{\omega_p^2 \cos^2\theta}{1 + p^2 \sin^2\theta}} \,, \tag{3.3}$$

а приравнивая $C = 0$ в (1.10), находим частоты отсечек ω_1 и ω_2 (с каждой из них начинается частотный диапазон своей распространяющейся моды $N_1^2 > 0$ и $N_2^2 > 0$):

$$\omega_1 = \omega_p \frac{p}{1 + p^2} \,, \quad \omega_2 = \omega_p \,. \tag{3.4}$$

Полученное выражение для частоты отсечки ω_1 справедливо при $\omega_1 \ll \omega_c$, что возможно только при $p^2 \ll 1$. Заметим, что в рассматриваемый нами частотный диапазон $\omega_{\text{LH}} \ll \omega \ll \omega_c$ попадают не все возможные резонансные частоты и частоты отсечки. Более того, из (3.3) видно, что условие $\omega \gg \omega_{\text{LH}}$ приводит к ограничению на угол распространения свистовой волны:

$$\frac{\omega |\cos\theta|}{\sqrt{1 + p^2 \sin^2\theta}} \gg \omega_{\text{LH}} \,,$$

т.е. угол распространения θ нельзя брать очень близким к $\pi/2$.

Сделаем замечание, касающееся области частот, в которой будут проводиться численные расчеты и представляться графические результаты (в терминах безразмерной частоты F). В безразмерных переменных в электрон-протонной плазме значение нижнегибридной частоты $F_{\text{LH}} = 1/(43\sqrt{1 + p^2})$. Поэтому в качестве нижней границы частотного диапазона выбираем величину $2F_{\text{LH}}$. В качестве же верхней границы частотного диапазона (области применимости нашего рассмотрения) возьмём величину $F_{\max} = 1/2p$, т. е. предельная частота $\omega_{\max} = \omega_c/2$. Видно, что минимальная и максимальная частоты в расчётах зависят от параметра p. Таким образом, определены границы области частот, в которой будут представлены результаты численных расчётов (в том числе графические).

Заметим, что в области применимости уравнения (3.2), описанной выше, т.е. $2\omega_{\text{LH}} < \omega < \omega_c/2$, все три частоты ω_{res}, ω_1 и ω_2 оказываются меньше выбранного верхнего предела $\omega_c/2$ при $p < 1/2$. При малых углах волновой нормали θ оказывается $\omega_{res} > \omega_1$. Следовательно, в этом случае в диапазоне (ω_1, ω_{res}) существуют две распространяющиеся моды: свистовая и МН-мода (иначе именуе-

мая Z-модой). Таким образом, важной отличительной особенностью разреженной плазмы в указанном выше частотном диапазоне является наличие этих двух распространяющихся мод. Напомним, что в случае $p > 1$ в свистовом диапазоне может распространяться только свистовая мода. Далее, между резонансной частотой свистовой волны и частотой отсечки МН-моды существует интервал, где в приближении холодной плазмы вовсе отсутствуют волновые моды. Однако в случае $\omega_{res} < \omega_1$ (например, при больших θ) в разреженной плазме область частот между ω_{res} и ω_1 также не содержит волновых мод (аналогично случаю плотной плазмы). Если же параметр p достаточно мал, то частота ω_2 также попадает в область применимости нашего уравнения (3.2), следовательно, при частотах $\omega_2 < \omega \lesssim \omega_c/2$ (верхняя граница – область применимости (3.2)), кроме МН-моды может существовать О-мода. Все названные особенности распространения волн, включая их поляризационные свойства, будут исследованы далее в этой главе, опираясь на решения уравнения (3.2).

3.2 Дисперсионные свойства низкочастотных электронных волн

Нахождение дисперсионных соотношений для распространяющихся мод представляет собой фундаментальную задачу теории электромагнитных волн в бесстолкновительной магнитоактивной плазме. Данная проблема исследовалась во многих работах (см. [27; 28] и имеющиеся там ссылки). К классическим результатам относятся построение квадрата показателя преломления N как функции ω при фиксированном угле распространения θ и зависимости ω от модуля $\mathbf{k}$ при фиксированном θ, например, при продольном и поперечном распространении, когда существуют явные выражения для N^2. Упомянутые результаты схематически содержатся, например, в [27; 28].

Однако для ряда задач распространения волн, их нелинейного взаимодействия, а также резонансного взаимодействия с частицами требуется иметь не графические, а явные численные дисперсионные уравнения, т. е. зависимости ω от $\mathbf{k}$ и параметров плазмы. Далее изложен алгоритм нахождения таких дисперсионных уравнений и приводится их трёхмерное графическое представление.

Уравнение (3.2) даёт 3 решения относительно переменной F^2, которые

отвечают трём значениям ω^2 при произвольных значениях волнового вектора $(k_\perp, k_\parallel)$, соответствующих безразмерным величинам (q_1, q_2). Команда *roots* в среде MATLAB может отыскать все 3 решения уравнения (3.2). Сортировка этих решений по соответствующим модам, которая и составляет суть построения численных дисперсионных уравнений, зависит от соотношения между частотами ω_1 и ω_{res} (т.е. зависит от p и θ). Так, если $\omega_1 < \omega_{res}$, то все частоты $\omega_{\text{LH}} < \omega < \omega_1$ относятся к свистовой моде. Частоты в диапазоне $\omega_1 < \omega < \omega_{res}$ относятся либо к свистовой моде, если соответствующий $N \equiv kc/\omega > 1$, либо к МН-моде, если $kc/\omega < 1$. Все частоты в диапазоне $\omega_{res} < \omega < \omega_p$ относятся к МН-моде. Частоты в диапазоне $\omega_p < \omega < \omega_{\max}$ принадлежат либо МН-моде, если показатель преломления $kc/\omega > 1$, либо О-моде, если $kc/\omega < 1$. При выполнении условия $\omega_1 > \omega_{res}$ все частоты в диапазоне $\omega_{\text{LH}} < \omega < \omega_{res}$ относятся к свистовой моде, частоты в диапазоне $\omega_1 < \omega < \omega_p$ относятся к МН-моде, а частоты в диапазоне $\omega_p < \omega < \omega_{\max}$ принадлежат МН-моде, если $kc/\omega > 1$, и О-моде, если $kc/\omega < 1$. Распределённые таким способом частоты, являющиеся решениями уравнения (3.2), составляют три матрицы частот на плоскости $(k_\perp, k_\parallel)$, которые определяют в численном виде 3 дисперсионных соотношения для трёх волновых мод.

Рисунок 3.1 демонстрирует найденные из таких дисперсионных уравнений изолинии постоянной безразмерной частоты для трёх волновых мод на плоскости $(k_\perp c/\omega_p,\ k_\parallel c/\omega_p)$, где $k_\perp$ и $k_\parallel$ – соответственно значения поперечной и продольной компонент волнового вектора. Данный рисунок соответствует значению параметра $p = 0.3$, для которого (в условиях применимости уравнения (3.2)) существуют три волновые моды, а именно свисты в интервале частот от $2\omega_{\text{LH}}$ до $\omega = \omega_p$, МН-мода в области частот от ω_2 до максимальной частоты применимости уравнения (3.2) (здесь выбрано $\omega_c/2$) и обыкновенная волна (О-мода) в области частот $\omega_p < \omega < \omega_c/2$.

Изолинии постоянной частоты для случая $p = 0.7$ изображены на Рисунке 3.2. При данном значении параметра p имеются всего две волновые моды в условиях применимости уравнения (3.2). Поскольку с увеличением величины p от 0 до 1 частота отсечки МН-моды увеличивается, то диапазон частот $\omega_1 < \omega < \omega_p$, в котором сосуществуют свистовая и МН-моды, сокращается с возрастанием p: при $p = 0.3$ частота отсечки МН-моды была $\omega_1 = 0.275\omega_p$, а при $p = 0.7$

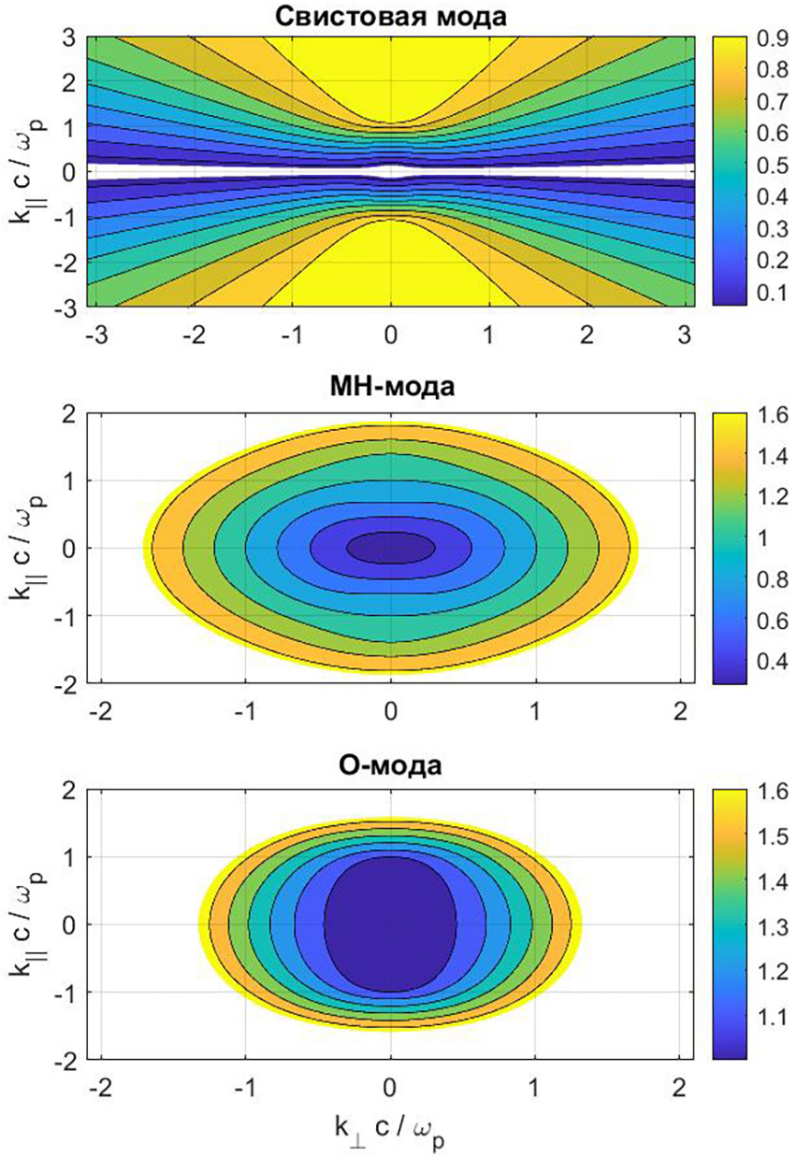


Рисунок 3.1 – Изолинии постоянной частоты $F(k_\perp c/\omega_p, k_\parallel c/\omega_p)$, параметр $p = 0.3$: верхний рисунок – свистовая мода, средний рисунок – МН-мода, нижний рисунок – О-мода

частота отсечки стала $\omega_1 = 0.47\omega_p$. Отметим, что этот диапазон зависит и от величины p, и от угла распространения θ свистовой волны, причём указанным выше наибольшим диапазонам отвечает $\theta = 0$.

На Рисунке 3.3 для тех же значений $p = 0.3$ и $p = 0.7$ изображены зависимости безразмерных частот распространяющихся мод от безразмерной параллельной составляющей волнового вектора при фиксированной перпендикулярной составляющей (левые графики) и зависимости от безразмерной перпендикулярной составляющей при фиксированной параллельной составляющей волнового вектора (правые графики). Конкретные зафиксированные значения

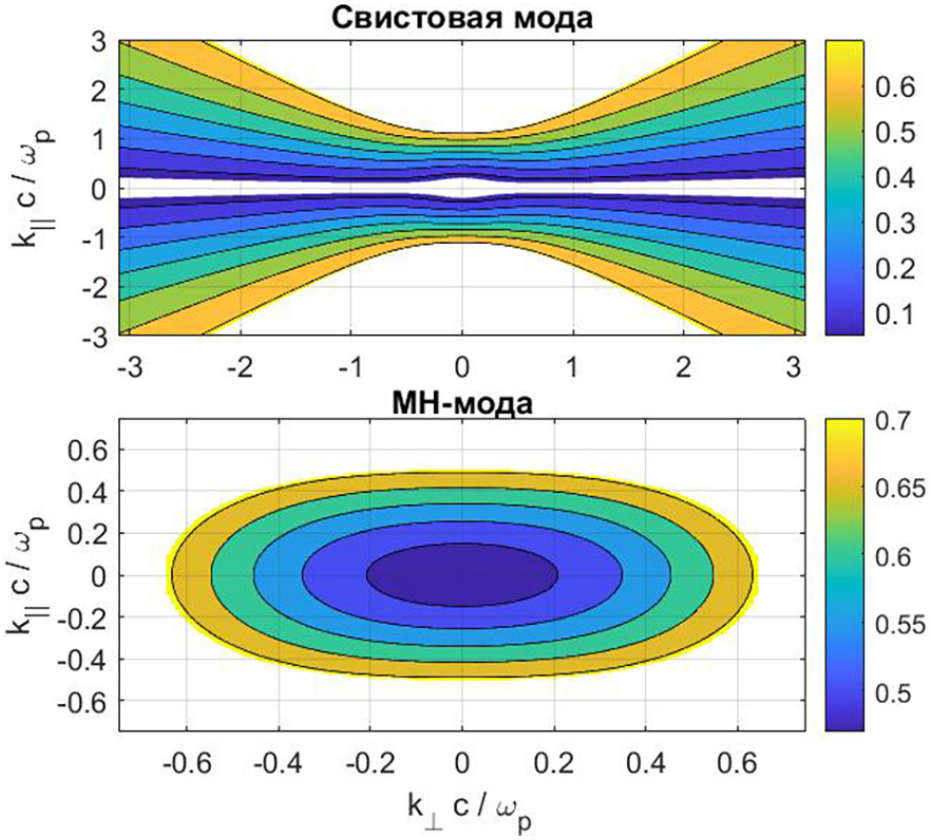


Рисунок 3.2 – Изолинии постоянной частоты $F(k_\perp c/\omega_p, k_\parallel c/\omega_p)$ при $p = 0.7$: верхний график – свистовая мода, нижний график – МН-мода

p и $k_\perp c/\omega_p$ или $k_\parallel c/\omega_p$ приведены на графиках. Малиновая линия соответствует свистовой моде, зелёная линия соответствует МН-моде, а синяя линия отвечает О-моде. Если значения $k_\perp$ или $k_\parallel$ фиксированы, то частоты отсечек МН- и О-моды будут выше значений ω_1 и ω_2, которые являются частотами отсечек при фиксированном θ и соответствуют значениям $\mathbf{k} \to 0$.

В случае разреженной плазмы $p = 0.3$ и двух фиксированных углов распространения $\theta = 45°$ и $\theta = 0°$ для полноты картины на Рисунке 3.4 изображена хорошо известная зависимость показателя преломления от частоты для трёх волновых мод [27; 28]. Верхняя панель демонстрирует тот факт, что в отличие от плотной плазмы области существования свистовой и МН-моды по частоте для разреженной плазмы перекрываются. Нижняя панель изображает зависимость показателя преломления волновых мод от частоты при продольном распространении. Для данного особого случая $\theta = 0°$ видно, что свистовая мода продолжается МН-модой, а МН-мода продолжается О-модой после $\omega = \omega_p$. В самой точке $\omega = \omega_p$ показатель преломления МН-моды терпит разрыв. Дело

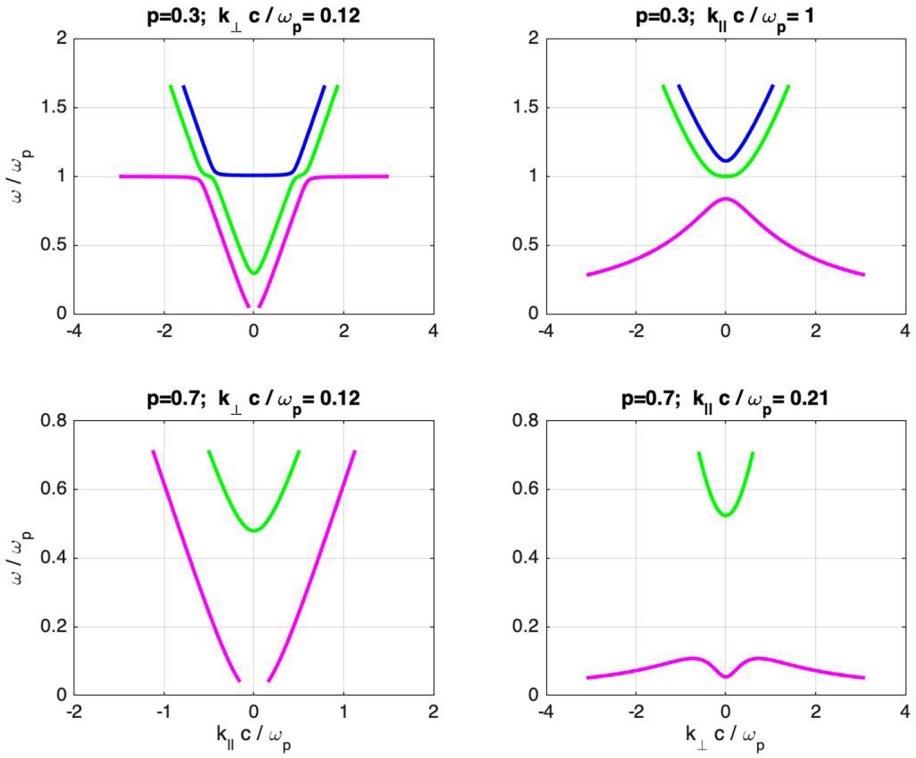


Рисунок 3.3 – Зависимость частот распространяющихся мод от параллельной составляющей $k_{\|}$ при фиксированной перпендикулярной составляющей $k_{\perp}$ (левые графики) и зависимость частот распространяющихся мод от перпендикулярной составляющей $k_{\perp}$ при фиксированной параллельной $k_{\|}$ (правые графики) при $p = 0.3$ и $p = 0.7$

в том, что в точке $\theta = 0°$, $\omega = \omega_p$ все коэффициенты A, B, C уравнения для показателя преломления (1.8) обращаются в ноль (т.е. точка является вырожденной). С другой стороны, при $\theta = 0°$, то есть когда $q_1 = 0$ частота $\omega = \omega_p$ оказывается решением уравнения (3.2) при произвольных значениях p и q_2.

Займёмся далее анализом дисперсионных и поляризационных свойств свистовых волн. Эти характеристики для плотной плазмы (при $p \gg 1$) хорошо известны, поэтому основные результаты в диссертации при описании свистовых волн касаются случая разреженной $p < 1$ плазмы. Так, для случая $p = 0.5$ на Рисунке 3.5 изображены изолинии постоянной нормированной частоты F на плоскости безразмерных компонент $(k_{\perp}c/\omega_p, k_{\|}c/\omega_p)$, которые называют поверхностью показателя преломления [29]. При этом направление групповой скорости волны совпадает с нормалью к такой поверхности [29]. Данный рисунок показывает, что для угла $\theta = 0°$ (при этом $k_{\perp} = 0$) групповая скорость волны всегда совпадает с направлением внешнего магнитного поля (с осью z). Напом-

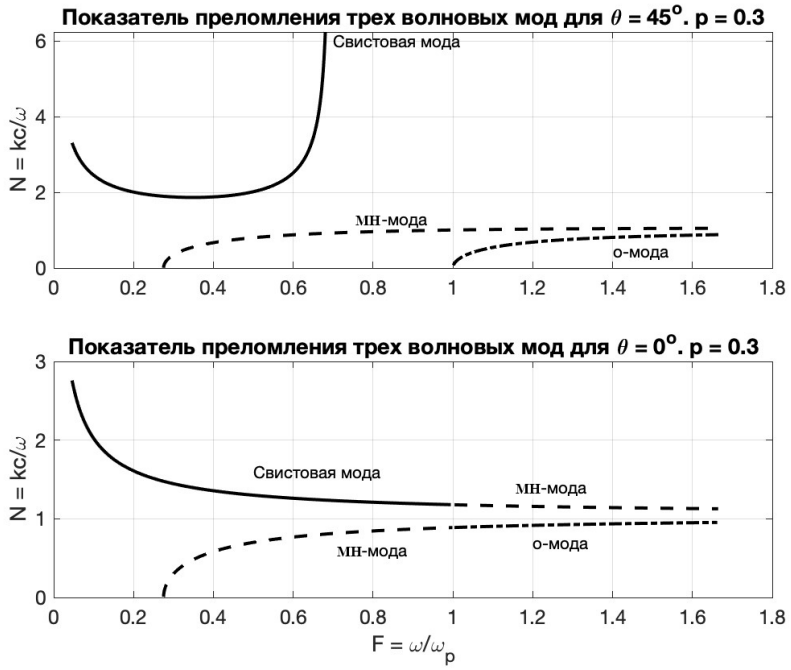


Рисунок 3.4 – Зависимость показателя преломления трёх волновых мод от безразмерной частоты при следующих углах распространения: $\theta = 45°$ – верхний график, и $\theta = 0°$ – нижний график

ним некоторые важные характеристики свистовых волн, которые легко понять из представленного рисунка. Так, угол Жандрэна ($0 < \theta_{\text{G}} < \pi/2$) — это угол между $\mathbf{k}$ и $\mathbf{B}_0$, при котором групповая скорость волны $\mathbf{v}_g$ коллинеарна вектору $\mathbf{B}_0$, а угол Стори ($0 < \alpha_s < \theta_{\text{G}}$) — это угол наибольшего отклонения $\mathbf{v}_g$ от направления вектора $\mathbf{B}_0$ в области очень низких частот. Как следует из теории свистовых волн, для плотной плазмы ($p > 1$) угол Жандрэна существует только для частот $\omega < \omega_c/2$ и определяется следующим выражением: $\theta_{\text{G}} = \arccos(2\omega/\omega_c)$.

Чтобы получить выражение для угла Жандрэна при произвольном p (в том числе для разреженной плазмы – при $p < 1$) и значениях частот $\omega \ll \omega_c$ (именно при этом условии из (3.2) выводились все результаты), сначала находим перпендикулярную составляющую групповой скорости как производную неявной функции от выражения (3.2) и приравниваем её к нулю:

$$v_{g\perp} \equiv \frac{\partial \omega}{\partial k_\perp} = -\frac{\partial \Phi/\partial k_\perp}{\partial \Phi/\partial \omega} = 0. \tag{3.5}$$

Потом решаем систему уравнений (3.5) и (3.2) относительно величин k^2 и $\cos^2\theta$. Из двух решений этой системы уравнений свистовой моде (частотам $\omega < \omega_p$)

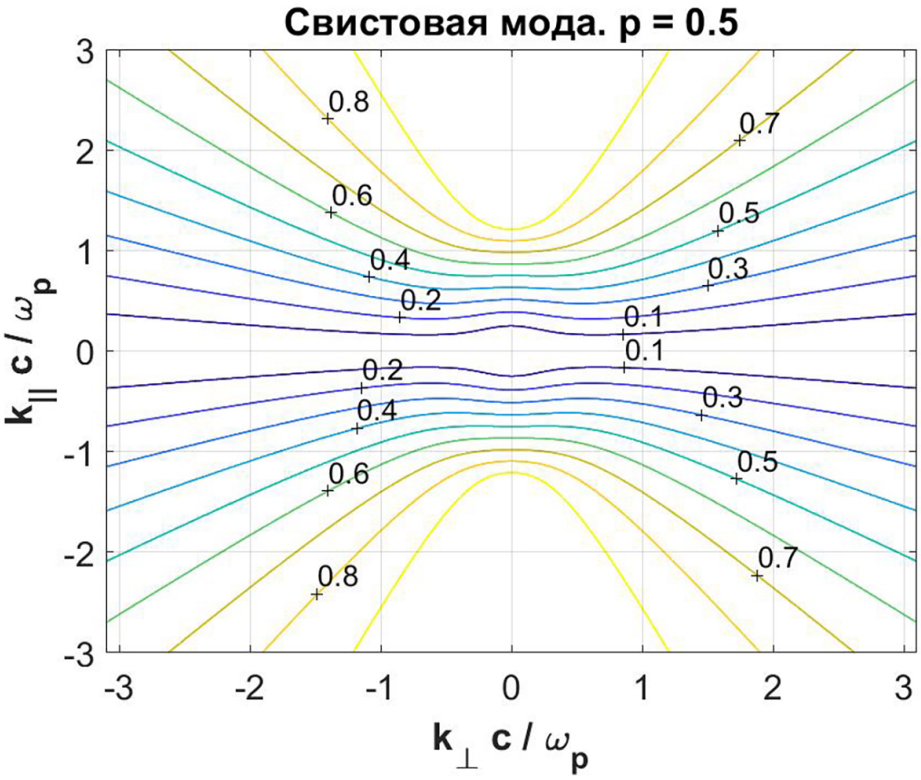


Рисунок 3.5 – Контуры постоянной безразмерной частоты F на плоскости $(k_\perp c/\omega_p, k_\parallel c/\omega_p)$ при $p = 0.5$

отвечает следующее выражение для квадрата косинуса угла Жандрэна:

$$\cos^2\theta_{\text{G}} = \frac{F^2}{(1+p^2F^2)\left(F^2p^2 - p^2 + F^4\left(1+p^2-p^6\right) + F^6p^2\left(1+p^2\right)^3\right)} \times$$
$$\times \left[\left(1+p^2\right)\left(F^2\left(1+4p^2\right) + 2F^4p^4 + F^6p^4\left(1+p^2\right)^2 - 2p^2\right) -\right.$$
$$\left. - \left(1+2p^2 - F^2\left(2+3p^2+p^4\right)\right)\sqrt{\left(1-F^2\right)\left(p^2+p^4\right)\left(1+F^2p^2+F^4p^4\right)}\right], \quad (3.6)$$

где для записи использована безразмерная частота F, которая использовалась и в дисперсионном уравнении (3.2). Так как полученная формула (3.6) имеет несколько громоздкий вид, выпишем для свистовых волн также два асимптотических выражения для косинуса угла Жандрэна, отвечающих следующим двум предельным случаям:

$$\cos\theta_{\text{G}} = \begin{cases} \left(1 + \dfrac{\omega_p^3}{\omega^2\omega_c}\right)^{-1/2}, & p \ll 1\,, \omega \ll \omega_p\,, \\ \dfrac{2\omega}{\omega_c}\,, & p \gg 1\,,\ \omega \ll \omega_c\,. \end{cases} \quad (3.7)$$

На Рисунке 3.6 представлены зависимости $\cos\theta_{\text{G}}$ от нормированной частоты F для значений $p = 0.1, 0.7$ и 7 (т.е. и для разреженной, и плотной плазмы), вычисленные по формуле (3.6). Вычисленные с помощью (3.7) асимптотиче-

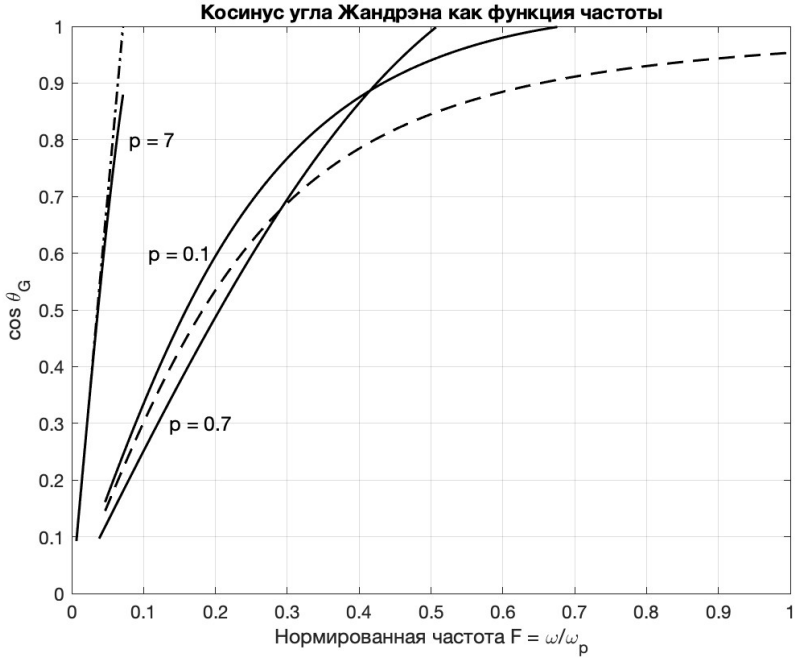


Рисунок 3.6 – Зависимости косинуса угла Жандрэна от безразмерной частоты при $p = 0.1, 0.7$ и 7 показаны сплошными линиями, а асимптотические зависимости для случая $p \ll 1$ и $p \gg 1$ изображены соответственно штриховой и штрихпунктирной линиями

ские зависимости при $p \ll 1$ и $p \gg 1$ изображены соответственно штриховой и штрихпунктирной линиями. Из графика видно, что с увеличением величины p уменьшается область частот, где существует угол Жандрэна. Так, например, при малой величине параметра $p = 0.1$ угол Жандрэна существует от малых частот и до частоты $\omega = 0.7\omega_p$, а при большем значении параметра $p = 0.7$ область существования угла Жандрэна ограничена сверху частотой $\omega \simeq 0.5\omega_p$. При фиксированном значении параметра p величина $\cos\theta_{\text{G}}$ растёт с увеличением частоты, значит, угол Жандрэна при этом уменьшается. Следовательно, если приравнять единице косинус угла Жандрэна, то можно найти верхний предел по частоте, который ограничивает сверху область существования угла Жандрэна. Предельная частота даётся следующей формулой:

$$\omega^2_{\max} = \frac{4 + 3p^2 - p\sqrt{8 + 5p^2}}{2\left(4 + 4p^2 + p^4\right)}\omega_p^2. \tag{3.8}$$

Рисунок 3.7 демонстрирует зависимость максимальной (предельной) безразмерной частоты от параметра p. Штриховой линией изображён график $F = 1/2p$, которая отвечает максимальной частоте, ограничивающей область существования угла Жандрэна в плотной плазме (при $p \gg 1$). Значение частоты $F = 1/2p$ лежит на границе применимости проведённого в данной главе анализа, поэтому асимптотика выражения (3.8) при больших p немного отличается от $1/2p$.

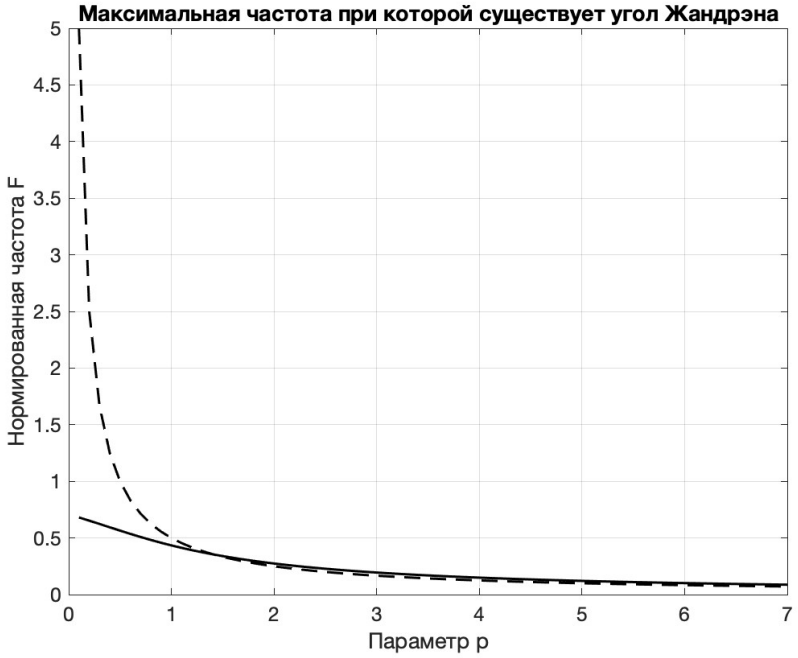


Рисунок 3.7 – Зависимость предельной нормированной частоты, до которой существует угол Жандрэна, от параметра p изображена сплошной линией, а штриховая линия отмечает предельную частоту, до которой существует угол Жандрэна в плотной плазме

Стори нашёл предельный угол отклонения групповой скорости от направления $\mathbf{B}_0$ для низкочастотных свистовых волн в плотной плазме ($p \gg 1$). Он оказался равным 19.47° [61]. Из анализа Рисунка 3.5 при $\omega_p < \omega_c$ ($p < 1$) можно сделать вывод, что наличие угла Жандрэна — это необходимое и достаточное условие существования угла Стори $0 < \alpha_s < \theta_{\text{G}}$ ($\alpha_s \neq 90°$). Действительно, при больших $k_\perp$ все изолинии частоты загибаются вверх, следовательно, если существует угол Жандрэна, т.е. минимум на какой-то выбранной линии, то между ним и максимумом при $\theta = 0$ (перпендикуляры к линии в этих точках параллельны $\mathbf{B}_0$) всегда существует промежуточная точка, для которой угол отклонения перпендикуляра к линии от вертикали будет наибольшим.

На Рисунке 3.8 показан 3D-график максимума отклонения групповой скорости от $\mathbf{B}_0$ в зависимости от нормированной частоты и параметра p. Данная зависимость не может быть выражена в аналитическом виде, но численный счёт для абсолютного максимума этого угла при $\omega_{\text{LH}} \ll \omega < 0.8\omega_p$ и $p < 0.9$ даёт величину 18.16°. Данная величина соответствует углу Стори для разреженной $p < 1$ плазмы.

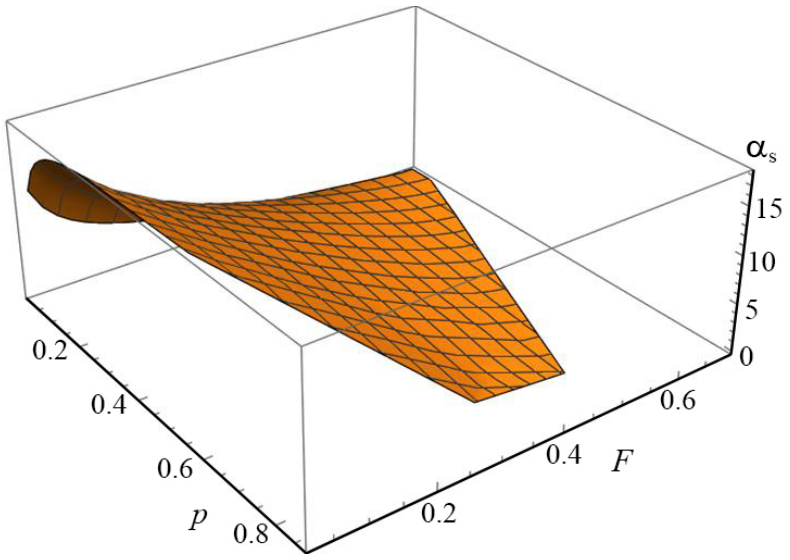


Рисунок 3.8 – 3D-график угла Стори в градусах как функция нормированной частоты F и параметра p

Перейдём далее к анализу поляризации низкочастотных волн в плазме произвольной плотности (прежде всего, нас интересует случай разреженной плазмы $p < 1$). Электрическое и магнитное поле волны можно записать в следующем виде:

$$\boldsymbol{\mathcal{E}} = \text{Re}\{E\boldsymbol{a}\exp[i(\mathbf{kr} - \omega t)]\}\ , \quad \boldsymbol{\mathcal{B}} = \text{Re}\{B\mathbf{b}\exp[i(\mathbf{kr} - \omega t)]\}\ , \qquad (3.9)$$

здесь для электрического и магнитного поля волны соответственно: E, B – это комплексные амплитуды, а $\boldsymbol{a}, \mathbf{b}$ – это комплексные вектора поляризации [28] (их определение см. в (1.22) и в (1.23)). В рассматриваемой геометрии (ось z направлена вдоль внешнего магнитного поля $\mathbf{B}_0$, а волновой вектор $\mathbf{k}$ лежит в плоскости (x, z)) для электрического поля волны одна из полуосей эллипса поляризации будет располагаться в плоскости (x, z), а вторая будет направлена вдоль y. Аналогичная ситуация будет и для магнитного поля волны. Непосредственно из (1.22) следует, что знаки поляризации и величины $-ia_y$ совпадают. В

итоге, выражения для поляризации электрического и магнитного поля волны, L_E и L_B, имеют следующий вид:

$$L_E = \min\left(\sqrt{|a_y|^2/(1+a_z^2)}, \sqrt{(1+a_z^2)/|a_y|^2}\right)\mathrm{sign}(-ia_y), \tag{3.10}$$

$$L_B = \min\left(\sqrt{(|b_x|^2+|b_z|^2)/b_y^2}, \sqrt{b_y^2/(|b_x|^2+|b_z|^2)}\right)\mathrm{sign}(-ia_y). \tag{3.11}$$

Как следует из анализа поляризационных свойств, знак поляризации определяется не только волновой модой, но и в пределах одной и той же моды может зависеть от $\mathbf{k}$, что наблюдается, например, для МН-моды. В качестве примера на Рисунке 3.9 изображена поляризация электрического и магнитного поля в разреженной плазме (при $p = 0.3$) для трёх волновых мод. Из Рисунка 3.9 видно, что свистовая волна в разреженной плазме (как и в плотной плазме) обладает правой поляризацией независимо от величины волнового вектора, обыкновенная волна обладает левой поляризацией, а поляризация МН-моды зависит от $\mathbf{k}$ и может быть и левой, и правой. Рисунок 3.10 содержит сопоставление возможных поляризаций магнитного поля свистовой моды в разреженной и плотной плазме. Из рисунка следует, что при $p = 0.5$ поляризация магнитного поля может изменяться в пределах от 0.45 до 1, а в плотной плазме поляризация близка к круговой (т.е. находится очень близко к 1) во всей области возможных $\mathbf{k}$. Таким образом, одним из индикаторов разреженной плазмы ($p < 1$) может выступать заметное отличие поляризации магнитного поля свистовой волны от круговой. Очевидно, что данное отличие наблюдается только при ненулевых углах волновой нормали, так как в магнитоактивной плазме в случае чисто продольного распространения поляризация электромагнитных волн всегда является круговой [27; 28].

При анализе процесса генерации волн и резонансного взаимодействия волн с энергичными электронами важная физическая величина — плотность энергии волны U [102], которая учитывает как энергию электромагнитного поля, так и кинетическую энергию колебательного движения нерезонансных электронов. Общее выражение для U приведено ранее в (1.25). Величина амплитуды электрического поля волны E — это, по сути, амплитуда компоненты электрического поля волны, лежащей в плоскости $(\mathbf{B}_0, \mathbf{k})$ и перпендикулярной вектору $\mathbf{B}_0$. Поскольку общее аналитическое выражение для плотности энергии свистовой моды, верное для всех углов распространения и частот в области

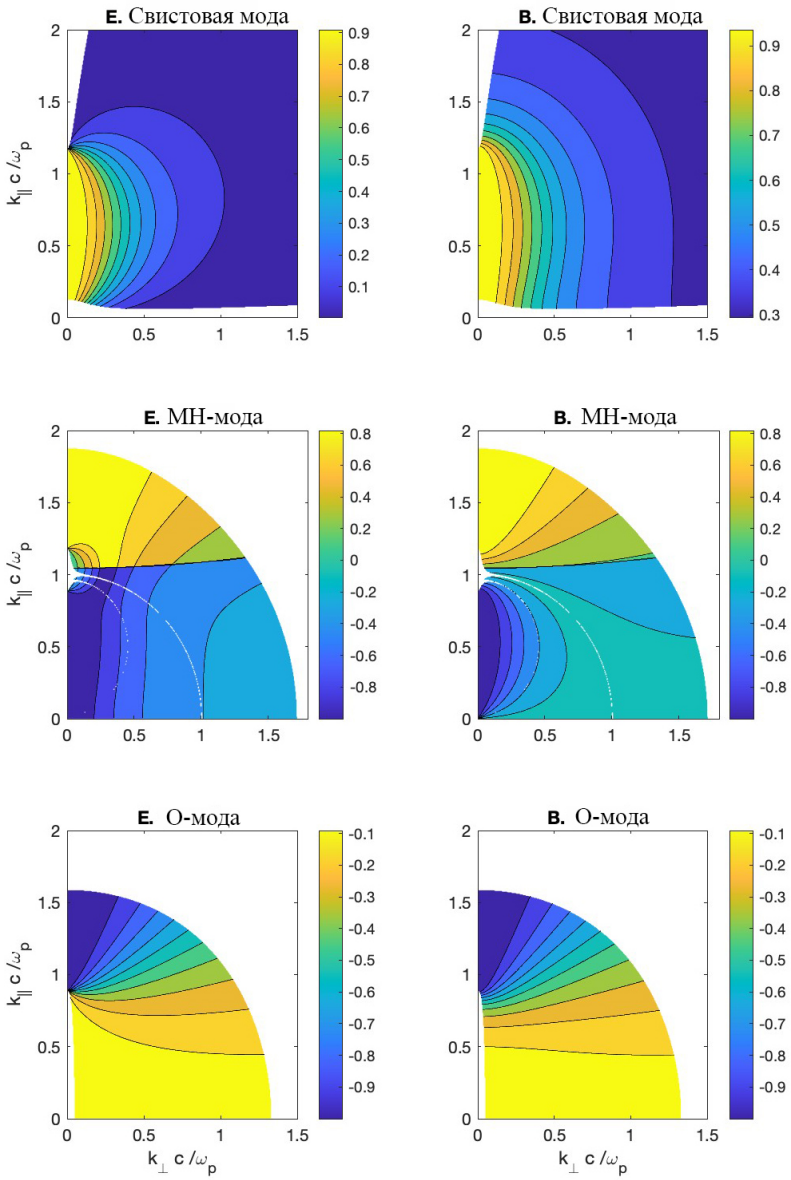


Рисунок 3.9 – Поляризация электрического поля (левые панели) и магнитного поля (правые панели) для трёх волновых мод для значения параметра $p = 0.3$

$\omega_{\text{LH}} \ll \omega \ll \omega_c$, получается слишком громоздким, его графическое представление приведено на Рисунке 3.11 для трёх значений параметра p: $p = 0.3$, $p = 1$ и $p = 2$. Здесь в виде "цветовой" шкалы показан логарифм U, нормированной на $|E|^2/8\pi$, в зависимости от угла θ в градусах и безразмерной частоты F.

В качестве примера можно привести аналитическое выражение для плотности энергии волны в случае продольного распространения. В этом случае поляризация волны будет круговая (правая или левая), а показатель преломления определяется формулой $N^2 = \varepsilon_1 \pm \varepsilon_2$ [27; 28]. При этом знак поляризации одно-

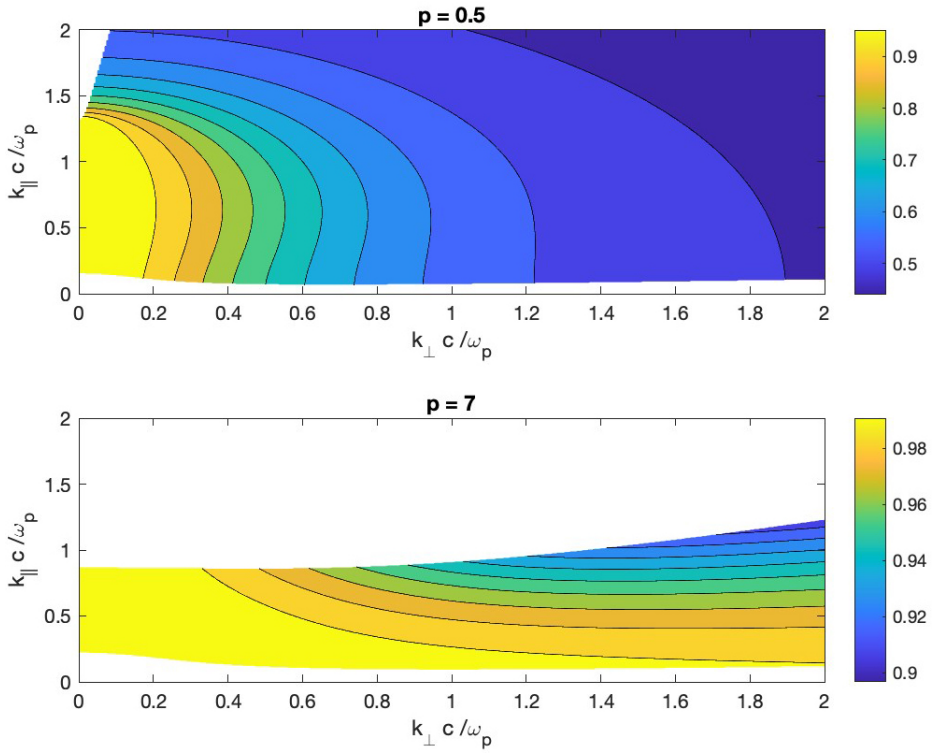


Рисунок 3.10 – Сравнение поляризации магнитного поля свистовой волны для $p = 0.5$ (разреженной плазмы) и для $p = 7$ (плотной плазмы)

значно связан со знаком в данном выражении для N^2. Так, если $N^2 = \varepsilon_1 - \varepsilon_2$, то поляризация такой волновой моды будет правой, а та волновая мода, для которой $N^2 = \varepsilon_1 + \varepsilon_2$, обладает левой поляризацией. Из (1.25) получаем

$$U = \frac{|E|^2}{8\pi}\left[2(1+p^2) \pm \frac{\omega_p^2}{\omega\omega_c}\right] \equiv \frac{|B|^2}{8\pi N^2}\left[2(1+p^2) \pm \frac{\omega_p^2}{\omega\omega_c}\right]. \qquad (3.12)$$

где знак плюс отвечает волнам с правой поляризацией, а знак минус соответствует волнам с левой поляризацией. Тогда для правополяризованной свистовой волны плотность энергии будет следующей:

$$U = \frac{|B|^2}{8\pi}\left[1 + \frac{\omega(p^2+1)}{\omega(p^2+1) + p\omega_p}\right]. \qquad (3.13)$$

Напомним, что формула (3.13) выведена при условии $\omega \ll \omega_c$. Для случая плотной плазмы $p \gg 1$ формула (3.13) переходит в известное выражение для плотности энергии низкочастотной свистовой волны при продольном распространении [59]:

$$U = \frac{|B|^2}{8\pi}\frac{\omega_c}{\omega_c - \omega}.$$

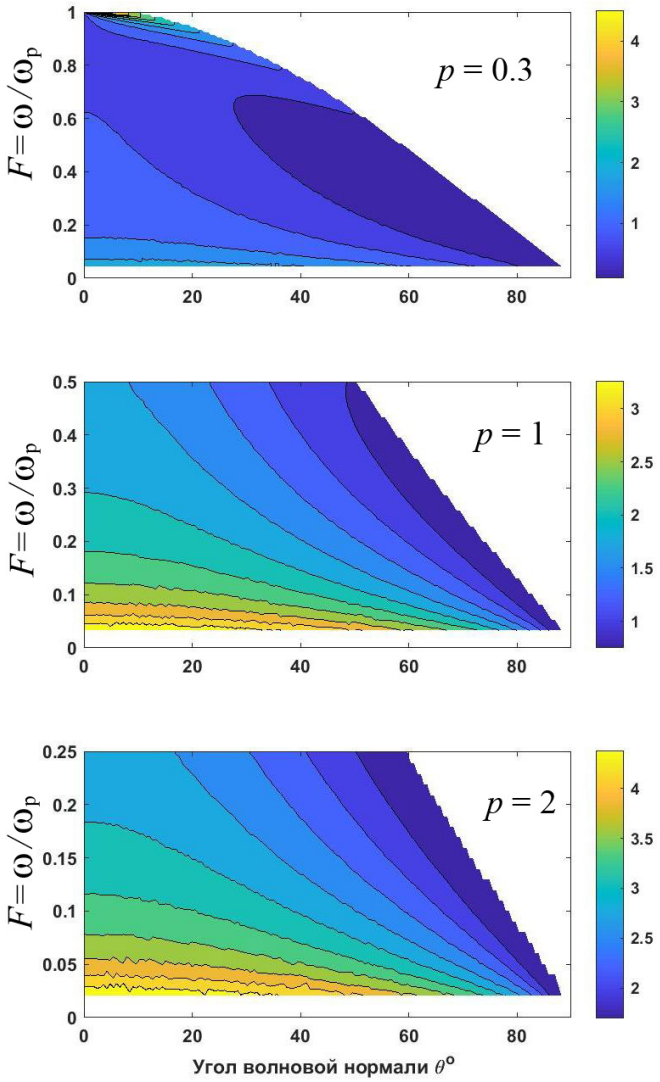


Рисунок 3.11 – Зависимость логарифма нормированной плотности энергии свистовой волны от угла волновой нормали в градусах и нормированной частоты для трёх значений параметра p

Ещё в одном предельном случае можно найти явное аналитическое выражение для U — это случай очень низкочастотных свистов в сильно разреженной плазме, т. е. если выполнены следующие условия:

$$\omega \lesssim \frac{\omega_p^2}{\omega_c} \ll \omega_p.$$

Вычисления приводят к следующему результату:

$$U = \frac{|E|^2}{8\pi}\left[1 + \frac{2\omega_p^4 \cos^2\theta\left(1 + \cos^2\theta + \sqrt{\frac{4\omega_p^4}{\omega^2\omega_c^2}\cos^2\theta + \sin^4\theta}\right)}{\omega^2\omega_c^2\left(\sin^2\theta + \sqrt{\frac{4\omega_p^4}{\omega^2\omega_c^2}\cos^2\theta + \sin^4\theta}\right)^2}\right]. \qquad (3.14)$$

В случае продольного распространения ($\theta = 0$) данное выражение с точностью до первого порядка по p переходит в выражение (3.12). Заметим, что при $\omega_p \ll \omega_c$ нижнегибридная частота близка к протонной плазменной частоте ω_{pi}, поэтому условие $\omega \ll \omega_p$ совместимо с условием применимости проведённого рассмотрения $\omega \gg \omega_{\text{LH}}$.

3.3 Выводы к Главе 3

Для случая холодной магнитоактивной плазмы биквадратное уравнение, определяющее величину N^2 в зависимости от частоты и угла волновой нормали, является одним из основных уравнений линейной теории волновых явлений. Тем не менее, решение данного уравнения (1.12) представляет собой не совсем дисперсионное уравнение (не соответствует самому этому понятию), так как оно не даёт в явном виде зависимость ω от $\mathbf{k}$ при заданных значениях параметров плазмы. Дисперсионное уравнение известно только в нескольких частных случаях: для волн с частотами много ниже протонной гирочастоты (для электрон – протонной плазмы) и для свистов в плотной плазме (при $\omega_p \gg \omega_c$) [27; 28]. Поляризационные характеристики волновых мод в зависимости от волнового вектора тоже не найдены; известны лишь их зависимости от ω и θ. С другой стороны, дисперсионное уравнение $\omega = \omega(\mathbf{k}, \mathbf{r})$ от независимой переменной $\mathbf{k}$ представляет интерес, например, для получения в явном виде уравнений геометрической оптики

$$\frac{d\mathbf{r}}{dt} = \frac{\partial\omega}{\partial\mathbf{k}} \equiv \mathbf{v}_g \ , \quad \frac{d\mathbf{k}}{dt} = -\frac{\partial\omega}{\partial\mathbf{r}} \ , \tag{3.15}$$

где $\mathbf{v}_g$ – групповая скорость волн.

В данной главе выведено бикубическое уравнение для ω как функции $\mathbf{k}$ и представлен алгоритм, позволяющий соотнести 3 его решения к соответствующим волновым модам. Формируемые таким способом численные дисперсионные уравнения для трёх волновых мод (3 матрицы на плоскости $(k_\perp, k_\parallel)$) справедливы при $\omega \ll \omega_c$ и произвольном соотношении между ω_p и ω_c. Также в данной главе описаны поляризационные свойства волн для различных значений параметра p. При этом основной акцент в данной главе сделан на изучении диспер-

сионных и поляризационных свойств низкочастотных ($\omega \ll \omega_c$) свистовых волн для случая разреженной плазмы ($\omega_p < \omega_c$). Для угла Жандрэна (угла волновой нормали $\theta \neq 0$, при котором $\mathbf{v}_g$ направлена вдоль $\mathbf{B}_0$) получено его аналитическое выражение; определена максимальная частота волны, до которой существует угол Жандрэна. Показано, что в разреженной плазме действует аналог теоремы Стори: для частот, для которых существует угол Жандрэна (для θ в пределах от 0° до угла Жандрэна), максимальный угол отклонения групповой скорости от направления $\mathbf{B}_0$ не может превышать определённого значения (это значение найдено численно).

Глава 4. Генерация медленных необыкновенных волн в неоднородной плазме (магнитосфере)

В Главах 4 и 5 символом p (в том числе с различными индексами) будут обозначаться величины, связанные с импульсом (а отношение ω_p/ω_c будет писаться в явном виде). Данная Глава 4 посвящена теоретическому анализу процесса генерации медленных необыкновенных (МН) волн в магнитосфере Земли, в том числе возбуждению верхнегибридных волн, которые принадлежат этой моде колебаний. В настоящей диссертации исследуется механизм возбуждения, связанный с электронной циклотронной неустойчивостью, но верхнегибридные волны могут также возбуждаться и в результате параметрической неустойчивости [149]; последний механизм наиболее важен для нагревных экспериментов, подробно исследованных в [150]. Однако, эти вопросы лежат вне рамок данной диссертации, поскольку тематика диссертации, в основном, связана с вопросами, характерными для магнитосферных приложений. В первом параграфе суммируются основные свойства МН волн. Основные цели второго параграфа следующие:

- вычислить инкремент неустойчивости квази-электростатических МН волн, считая, что функция распределения энергичных электронов имеет вид κ-функции с конусом потерь;

- исследовать зависимость полученного инкремента от параметров функции распределения горячих частиц плазмы и от плотности холодных частиц [151].

В последующих параграфах данной главы излагается более общий подход к вычислению инкремента (декремента) МН волн [152]. Цель этого описания следующая:

- подробно изучить механизм генерации медленных необыкновенных волн, в частности, получить с учётом релятивистских эффектов выражение для инкремента, справедливое при любом угле распространения и для любой связи между частотой волны и электронной гирочастотой.

4.1 Некоторые характеристики медленных необыкновенных волн

При описании МН волн можно пренебречь вкладом ионов в компоненты тензора диэлектрической проницаемости. Известно [27], что топология зависимости показателя преломления от частоты ω и угла волновой нормали θ зависит от отношения электронной плазменной частоты и электронной гирочастоты ω_p/ω_c. Область существования МН волн по частоте: от частоты отсечки $\omega_{\text{оз}}$ (см. (1.18)), где по определению показатель преломления $N = 0$, и до резонансной частоты ω_{r1} (см. (1.19)), на которой показатель преломления становится бесконечным. Предельные значения резонансной частоты определяются выражениями (1.20). Из данных соотношений следует, что частоты ω МН волн существенно превышают частоту нижнего гибридного резонанса ω_{LH}. Для случая $\omega_p \gg \omega_c$, когда $\omega \sim \omega_p$, а $\omega_{\text{LH}} \sim \omega_c(m/m_i)^{1/2}$ (m, m_i - масса электронов и ионов, соответственно) это утверждение очевидно. В противоположном случае $\omega_c \gg \omega_p$, частота МН волны $\omega > \omega_p(\omega_p/\omega_c)$, в то время, как $\omega_{\text{LH}} \sim \omega_p(m/m_i)^{1/2}$. При $(m/m_i)^{1/2} \ll \omega_p/\omega_c \ll 1$ утверждение выше по-прежнему остаётся в силе. Поэтому дисперсионные свойства, а также затухание (усиление) МН волн определяются, главным образом, электронами. В этом смысле МН волны являются электронными волнами. Легко заметить, что при $\theta = 0$ резонансная частота $\omega_{r1} = \max(\omega_p, \omega_c)$, а при угле волновой нормали $\theta = \pi/2$ резонансная частота $\omega_{r1} = \omega_{\text{UH}}$. Для каждого угла распространения частоты МН волн лежат между $\omega_{\text{оз}}$ и $\omega_{r1}(\theta)$. Поскольку максимум $\omega_{r1}(\theta)$, достигаемый при $\theta = \pi/2$, равен ω_{UH}, и поскольку частота волны всегда ниже резонансной частоты, МН волны с частотами $\omega \simeq \omega_{\text{UH}}$ существуют только при θ-углах, близких к $\pi/2$. Поскольку эти волны близки к резонансу показателя преломления волны, $N \to \infty$, то они являются квазиэлектростатическими.

Для выбора правильного корня (1.12), соответствующего МН-моде, используем резонансные частоты ω_{r1} и ω_{r2} из (1.19) и частоту отсечки $\omega_{\text{оз}}$ из (1.18). МН-мода существует для всех углов волновой нормали θ в зависящем от θ диапазоне частот от $\omega_{\text{оз}}$ до ω_{r1}. Правило выбора значения N^2 для МН-моды из (1.12) следующее:
Если $\omega_{\text{оз}} > \omega_{r2}$, то $N^2 = \max(N_1^2, N_2^2)$. Если $\omega_{\text{оз}} < \omega_{r2}$, то выбор следующий:

для $\omega_{оз} < \omega < \omega_{r2},\ N^2 = \min(N_1^2, N_2^2)$, и для $\omega_{r2} < \omega < \omega_{r1},\ N^2 = \max(N_1^2, N_2^2)$. При этом больше или меньше величина $\omega_{оз}$, чем величина ω_{r2}, зависит от угла волновой нормали θ и от отношения ω_p/ω_c. Так, для $\omega_p/\omega_c > \sqrt{2}$ будет $\omega_{оз} > \omega_{r2}$ для всех углов волновой нормали, а для $\omega_p/\omega_c < \sqrt{2},\ \ \omega_{оз} < \omega_{r2}$ будет при достаточно малом θ.

Проиллюстрируем некоторые общие свойства МН волн для случаев $\omega_p > \omega_c$ и $\omega_p < \omega_c$. На Рисунке 4.1 представлен показатель преломления на плоскости (θ, ω) для МН волн при двух значениях ω_p/ω_c. Поскольку N изменяется от 0 до ∞ (что является уникальным свойством МН-моды), то вместо N будет показана величина $\log_{10}(1+N)$, которая совпадает с N, когда $N \ll 1$, и логарифмически возрастает, когда $N \to \infty$. Это позволяет изобразить значение N на всей плоскости (θ, ω) на одном графике. Выражение для плотности энер-

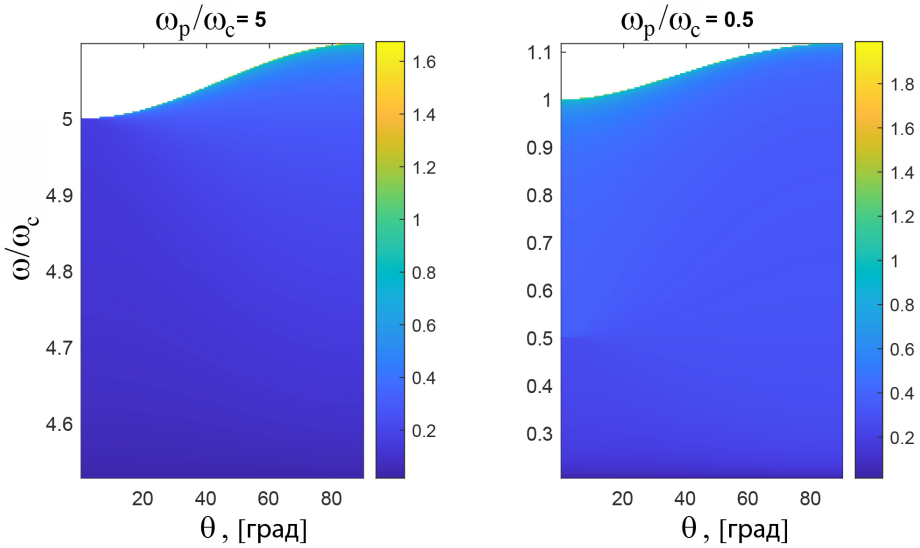


Рисунок 4.1 – Представление показателя преломления МН-моды для двух значений ω_p/ω_c; отображаемая величина равна $\log_{10}(1+N)$

гии волн имеет вид (1.27), где N^2 – квадрат показателя преломления, численное определение которого описано выше, а график показан на Рисунке 4.1. Для квазиэлектростатических МН волн выражение (1.27) превращается в выражение, приведенное в работе [151].

Обратим внимание на некоторые особенности МН волн. Так, например, из четырёх волновых мод, способных распространяться в холодной магнитоактивной плазме, только у МН волн показатель преломления может быть как меньше, так и значительно больше единицы. Независимо от отношения ω_p/ω_c

и угла распространения θ, электронная плазменная частота всегда попадает в область существования МН волн, и при $\omega = \omega_p$ показатель преломления всегда $N = 1$ [128]. Так как ω_p – это частота отсечки О-моды, то всегда существует область частот, в которой сосуществуют МН-мода и О-мода, что является важным условием для возможной трансформации данных волн в неоднородной плазме [153].

Ещё одна отличительная черта МН волн следующая: при $\omega_p/\omega_c < 1$ поляризация МН волн зависит от ω и θ (может оказаться левой или правой). При выполнении условия $\omega_p/\omega_c > 1$ поляризация МН волн будет левой, независимо от ω и θ. Поляризация МН-моды изображена на Рисунке 4.2 для двух фиксированных значений ω_p/ω_c. Положительные и отрицательные значения отмечают соответственно правую и левую поляризацию, а отображаемая на рисунке величина — эллиптичность (эллиптичность изменяется по модулю от 0 для линейной поляризации до 1 для круговой поляризации). Из рисунка виден хорошо известный факт: при продольном распространении (при $\theta = 0$) поляризация волны всегда оказывается круговой. Из рисунка далее видно, что при $\omega_p/\omega_c > 1$ поляризация является левой, а при $\omega_p/\omega_c < 1$ волны обладают левой поляризацией при $\omega < \omega_p$ и правой поляризацией при $\omega > \omega_p$. Этот скачок поляризации напрямую связан со скачком N при $\omega = \omega_p$ и $\theta = 0$.

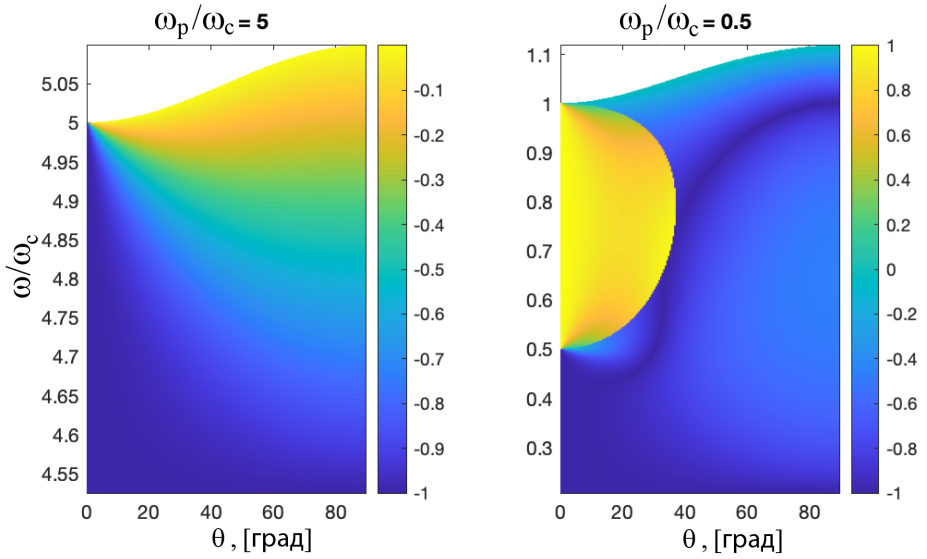


Рисунок 4.2 – Поляризация МН-моды для двух значений ω_p/ω_c. При $\omega_p/\omega_c > 1$ поляризация всегда левая, а при $\omega_p/\omega_c < 1$ направление поляризации зависит от частоты волны и угла волновой нормали

Зная показатель преломления на плоскости (θ, ω), можно рассчитать и представить величину групповой скорости v_g, используя формулу (1.24). Величина групповой скорости, нормированная на скорость света c, для МН волн на плоскости (θ, ω) показана цветовой гаммой на двух верхних графиках Рисунка 4.3 для двух значений ω_p/ω_c. В обоих случаях наименьшие значения v_g достигаются вблизи частот отсечки, соответствующих $N \to 0$, и вблизи резонансных частот, соответствующих $N \to \infty$. Обратим внимание на локальный минимум групповой скорости в случае $\omega_p/\omega_c = 0.5$, который достигается при $\omega = \omega_p$ и малых углах волновой нормали.

Представление о направлении групповой скорости можно получить из четырёх нижних графиков Рисунка 4.3, которые представляют собой контуры постоянной частоты на плоскости $(k_\perp, k_\parallel)$. По аналогии с поверхностью показателя преломления [29; 154], его можно назвать *"поверхностью волнового вектора"*. Поскольку показатель преломления N и величина волнового вектора k связаны соотношением $N = kc/\omega$, и поскольку в обоих случаях речь идёт о поверхностях, связанных с постоянной частотой, эти две поверхности топологически эквивалентны. Как известно, групповая скорость ортогональна поверхности показателя преломления. То же самое справедливо и для поверхностей волнового вектора, показанных на Рисунке 4.3. Безразмерные величины $K_\perp, K_\parallel$, обозначающие оси на рисунке, равны $(N\omega/\omega_c)\sin\theta$ и $(N\omega/\omega_c)\cos\theta$ соответственно. Два средних графика соответствуют более низким частотам от $\omega_{\text{оз}}$ до $\max(\omega_p, \omega_c)$, а два нижних графика отвечают более высоким частотам, от $\max(\omega_p, \omega_c)$ до $\omega_{\text{uн}}$. Последний диапазон включает резонансные частоты. Ортогональность групповой скорости поверхности волнового вектора не определяет направление групповой скорости однозначно. На более низких частотах направление групповой скорости совпадает с направлением внешней нормали. Чтобы понять направление групповой скорости на более высоких частотах, были приведены графики для соседних частот как на графиках низких, так и на графиках высоких частот. Таким образом, на более высоких частотах перпендикулярная составляющая групповой скорости имеет тот же знак, что и $k_\perp$, тогда как параллельная составляющая групповой скорости имеет знак, противоположный знаку $k_\parallel$.

Перейдём теперь непосредственно к описанию возможного (модельного)

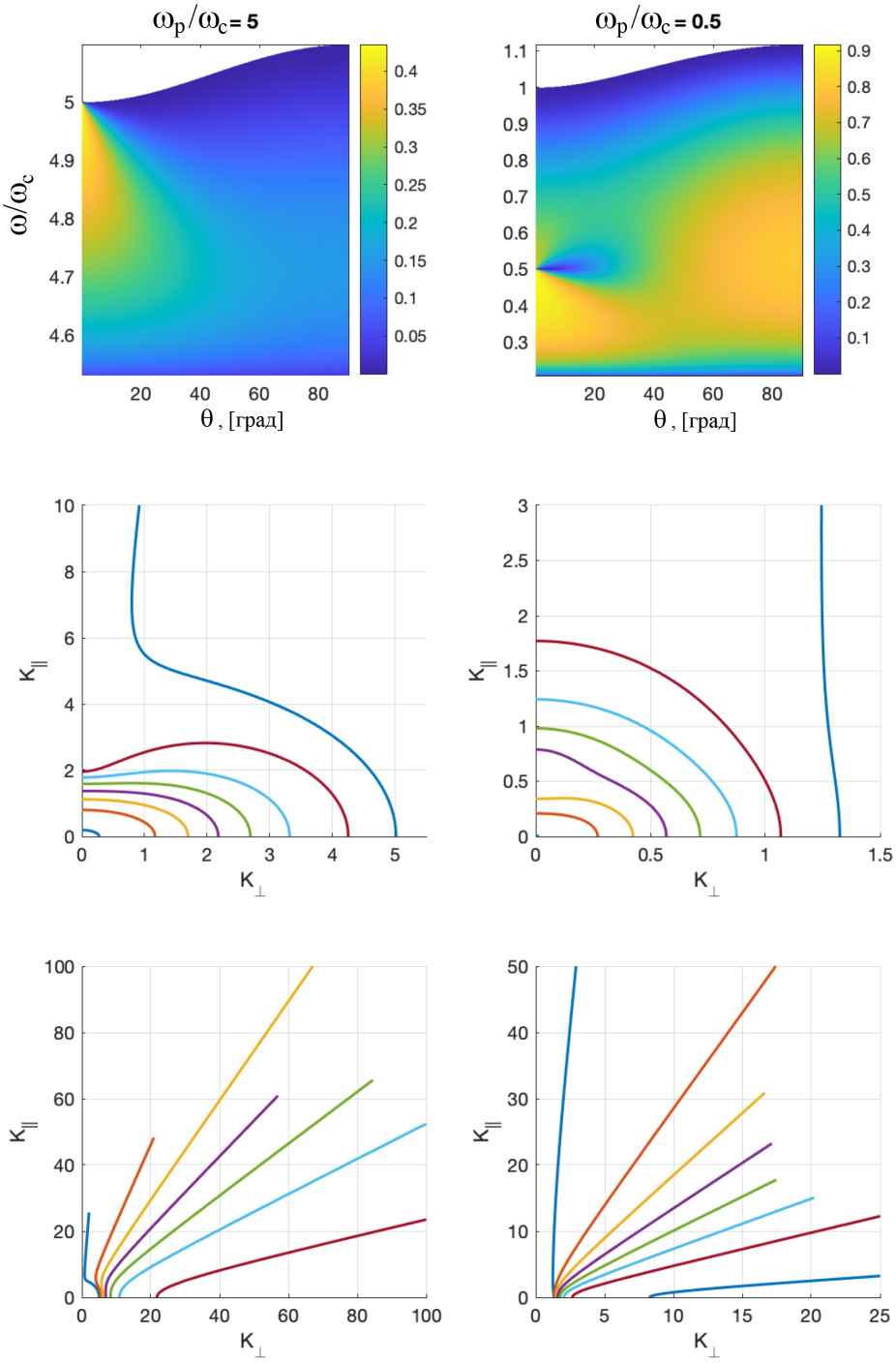


Рисунок 4.3 – Величина нормированной групповой скорости на плоскости (θ, ω) для двух значений ω_p/ω_c, указанных на рисунке (верхние графики), и поверхности волновых векторов (средние и нижние графики). Каждая кривая на графиках второго и третьего рядов соответствует определённой частоте. Графики среднего ряда соответствуют более низким частотам от $\omega_{\text{оз}}$ до $\max(\omega_p, \omega_c)$; графики нижнего ряда соответствуют более высоким частотам от $\max(\omega_p, \omega_c)$ до $\omega_{\text{ин}}$

распределения электронов в магнитосфере Земли и процесса генерации МН волн.

4.2 Генерация квази-электростатических медленных необыкновенных волн каппа-распределением с конусом потерь

Среди существующих моделей для описания распределения электронов в магнитосфере Земли часто используется распределение в виде каппа-функции.

В однородной среде κ-распределение электронов с конусом потерь записывается в виде

$$f(\mathbf{p}) = \frac{n_0}{\pi^{3/2} p_{\parallel \mathrm{т}} p_{\perp \mathrm{т}}^2} \frac{\Gamma(\kappa + l + 1)}{\kappa^{l+3/2} \Gamma(l+1)\Gamma(\kappa - 1/2)} \times$$

$$\times \left(\frac{p_\perp}{p_{\perp \mathrm{т}}}\right)^{2l} \left(1 + \frac{p_\parallel^2}{\kappa p_{\parallel \mathrm{т}}^2} + \frac{p_\perp^2}{\kappa p_{\perp \mathrm{т}}^2}\right)^{-(\kappa+l+1)}, \qquad (4.1)$$

где $\Gamma(z)$ – Гамма-функция, κ – основной параметр каппа-распределения, l – параметр конуса потерь, $\mathbf{p}$ – релятивистский импульс частицы, имеющий компоненты $p_\parallel$ и $p_\perp$ соответственно параллельно и перпендикулярно внешнему магнитному полю, $p_{\parallel \mathrm{т}}, p_{\perp \mathrm{т}}$ – соответствующие характерные "тепловые" значения. Как обычно, функция распределения (4.1) нормирована следующим образом:

$$\int f(\mathbf{P}) d^3\mathbf{P} = n \,, \qquad (4.2)$$

где n – плотность частиц (не зависящая от координат в однородном случае). Записанное выражение (4.1) представляет собой непосредственное обобщение на релятивистский случай функции распределения из статьи [155].

Далее обобщим (4.1) для неоднородной среды. При этом используем тот факт, что в этом случае невозмущенная функция распределения может зависеть только от интегралов движения. Выберем в качестве независимых переменных следующие интегралы движения: модуль релятивистского импульса p, с которым связан релятивистский γ-фактор

$$\gamma = \sqrt{1 + \frac{p^2}{m^2 c^2}} \,,$$

и магнитный момент электрона (поперечный адиабатический инвариант) μ:

$$\mu = \frac{p_\perp^2}{2m\omega_c} \,, \tag{4.3}$$

где $\omega_c = |e|B_0/mc$, B_0 – модуль внешнего магнитного поля. Тогда формула (4.1) приобретает вид:

$$f_0(p,\mu) = C\left(\frac{\mu}{\mu_\text{т}}\right)^l \left(1 + \frac{p^2}{\kappa p_\text{т}^2} - A_\text{т}\frac{\mu}{\kappa\mu_\text{т}}\right)^{-(\kappa+l+1)} \,, \tag{4.4}$$

где

$$p_\text{т}^2 \equiv p_{\parallel\text{т}}^2 \,, \quad \mu_\text{т} = \frac{p_{\perp\text{т}}^2}{2m\omega_{ceq}} \,, \quad A_\text{т} = \frac{p_{\perp\text{т}}^2}{p_{\parallel\text{т}}^2} - 1 \,,$$

и ω_{ceq} – экваториальная циклотронная частота. Величина $A_\text{т}$ описывает анизотропию распределения по $p_{\perp\text{т}}$ и $p_{\parallel\text{т}}$ — разное спадание функции распределения с увеличением $p_\perp$ и $p_\parallel$. Если переходить к бимаксвелловскому распределению ($\kappa \to \infty$), то величины $p_{\perp\text{т}}^2$ и $p_{\parallel\text{т}}^2$ становятся пропорциональными соответственно поперечной и продольной температуре. Как следует из самого выражения, величина $A_\text{т}$ находится в пределах от -1 до $+\infty$. В частности, при $p_{\perp\text{т}}^2 = p_{\parallel\text{т}}^2$, анизотропия $A_\text{т} = 0$. Если $p_{\perp\text{т}}^2 > p_{\parallel\text{т}}^2$, то будет $A_\text{т} > 0$, а такая ситуация типична для пробочных магнитных конфигураций, в том числе, магнитосферы Земли. В случае же $p_{\perp\text{т}}^2 < p_{\parallel\text{т}}^2$ будет $-1 < A_\text{т} < 0$. Для полноты картины последний случай также будет изучен. Нормировочную постоянную C можно записать через плотность частиц на экваторе n_{eq} и постоянные параметры κ-распределения:

$$C = \frac{n_{eq}(L)}{2\pi^{3/2} m\omega_{ceq} p_\text{т}\mu_\text{т}} \frac{\Gamma(\kappa+l+1)}{\kappa^{l+3/2}\Gamma(l+1)\Gamma(\kappa-1/2)} \,. \tag{4.5}$$

Для функции распределения (4.4) локальная плотность электронов $\tilde{n}(z)$ оказывается связанной с введённой экваториальной плотностью n_{eq}:

$$\tilde{n}(z) = n_{eq}\left(\frac{\omega_{ceq}}{\omega_c}\right)^l \left[1 + A_\text{т}\left(1 - \frac{\omega_{ceq}}{\omega_c}\right)\right]^{-l-1} \,, \tag{4.6}$$

здесь z – координата вдоль выбранной силовой линии.

Перейдём теперь к исследованию процесса генерации волн. Получим выражение для локального линейного инкремента квази-электростатической МН волны, которая распространяется под углом θ по отношению к $\mathbf{B}_0$. В работе [111] было доказано, что локальный инкремент свистовой волны в неоднородном случае в пределе малых амплитуд (это аналогично линейному приближению) будет совпадать с линейным инкрементом для некоторой однородной

плазмы, если параметры такой среды будут совпадать с локальными параметрами неоднородной плазмы. При этом названные параметры включают как параметры самой плазмы (ω_p, ω_c), так и параметры свистовой волны (ω, θ). Расчёт для МН волны в неоднородном случае будет аналогичным.

Согласно общему подходу линейный инкремент волны определяется следующим образом:

$$\gamma_{\text{L}} = -\frac{< \mathbf{j}_{\text{Lres}} \mathcal{E} >}{2U} , \tag{4.7}$$

где $\mathbf{j}_{\text{Lres}}$ – ток резонансных частиц в линейном приближении, U – плотность энергии волны (1.27), угловые скобки $< ... >$ означают усреднение по периоду волны. Далее будем обозначать линейный инкремент символом γ_{L} (чтобы отличить от релятивистского γ-фактора).

Для того, чтобы вычислить величину $\mathbf{j}_{\text{Lres}}$, необходимо найти линейное возмущение функции распределения резонансных частиц, а для этого надо решить уравнения движения электронов в поле МН волны и внешнем магнитном поле (в линейном приближении). Выпишем данные уравнения движения:

$$\frac{d\mathbf{r}}{dt} = \frac{\mathbf{p}}{m\gamma} , \quad \frac{d\mathbf{p}}{dt} = -e\boldsymbol{\mathcal{E}} - \frac{e}{mc\gamma}[\mathbf{p} \times \mathbf{B}_0] . \tag{4.8}$$

В случае распространения в неоднородной плазме квази-электростатической волны её электрическое поле можно записать в следующем виде:

$$\boldsymbol{\mathcal{E}} = -\nabla\Phi , \quad \Phi = \frac{E_0}{k} \sin\left(\int^z k_{\parallel}(z')dz' + k_{\perp}x - \omega t \right) , \tag{4.9}$$

где Φ – скалярный потенциал электрического поля, E_0 – амплитуда электрического поля квази-электростатической МН волны. Обе величины $k_{\parallel}$ и $k_{\perp}$ являются функциями координаты z, совпадающей по направлению с направлением внешнего магнитного поля $\mathbf{B}_0$. Отметим, что уравнения движения (4.8) могут быть записаны также и в гамильтоновой форме с использованием канонических переменных $(p_{\parallel}, z), (\mu, \varphi)$ со следующим гамильтонианом:

$$H = mc^2\sqrt{1 + \frac{p_{\parallel}^2 + 2\mu m\omega_c}{m^2c^2}} - \frac{eE_0}{k} \sin\left(\int^z k_{\parallel}(z')dz' + \rho\sin\varphi - \omega t \right) \equiv$$

$$\equiv mc^2\sqrt{1 + \frac{p_{\parallel}^2 + 2\mu m\omega_c}{m^2c^2}} - \frac{eE_0}{k} \sum_{n=-\infty}^{\infty} J_n(\rho) \sin\left(\int^z k_{\parallel}(z')dz' + n\varphi - \omega t \right) , \tag{4.10}$$

где $\rho = k_\perp(2\mu/m\omega_c)^{1/2}$ – безразмерный ларморовский радиус, φ – гирофаза частицы. Введём следующее обозначение ζ для полной фазы волны:

$$\zeta = \int^z k_\parallel(z')dz' + k_\perp x - \omega t \equiv \int^z k_\parallel(z')dz' + \rho\sin\varphi - \omega t\ . \tag{4.11}$$

Суммирование по всем n в (4.10) соответствует суммированию по всем циклотронным резонансам. Отметим, что квадратный корень в гамильтониане представляет собой релятивистский γ-фактор, записанный через канонические переменные. Запишем определение для фазы n-го члена в неоднородном случае:

$$\xi_n = \int^z k_\parallel(z')dz' + n\varphi - \omega t.$$

Находим $d\xi_n/dt = 0$ вдоль невозмущенной траектории электрона. В результате получаем следующие резонансные условия для n-го циклотронного резонанса в релятивистском случае:

$$p_\parallel = p_{rn} \equiv \frac{m(\omega\gamma - n\omega_c)}{k_\parallel}\ . \tag{4.12}$$

Перепишем выражение (4.7) следующим образом:

$$\gamma_{\text{L}} = -\frac{eE_0}{2kU}\frac{1}{2\pi}\int d\zeta \int dp_\parallel p dp d\varphi \delta f_{\text{L}} \cos\zeta \left(\frac{k_\perp p_\perp}{m\gamma}\cos\varphi + \frac{k_\parallel p_\parallel}{m\gamma}\right)\ , \tag{4.13}$$

где в явном виде записано усреднение по полной фазе волны ζ. Поскольку в качестве независимых переменных в (4.13) были выбраны абсолютное значение импульса p и $p_\parallel$, то величину $p_\perp$ необходимо считать функцией $p, p_\parallel$, т.е. $p_\perp = \sqrt{p^2 - p_\parallel^2}$. Здесь интегрирование по $dp_\parallel dp$ осуществляется только по той области $(p, p_\parallel)$, которая ограничена линиями $p_\parallel = \pm p$. Величина δf_{L} в формуле (4.13) — это разность возмущённой и невозмущённой функции распределения.

При нахождении линейного инкремента необходимо полагать амплитуду волны достаточно малой, чтобы можно было применять приближение изолированных резонансов [119]. Тогда для описания поведения электронов, взаимодействующих с волной на n-ом циклотронном резонансе, достаточно в гамильтониане сохранить только медленно меняющееся слагаемое, содержащее $J_n(\rho)\sin\left(\int^z k_\parallel(z')dz' + n\varphi - \omega t\right)$. Так как $dH/dt \simeq d(mc^2\gamma)/dt$ для резонансных частиц, и время t с гирофазой φ входят в гамильтониан только в виде

комбинации $n\varphi - \omega t$, следовательно, величина

$$mc^2\gamma n - \mu\omega = \text{const}$$

является интегралом движения, из которого получаем:

$$d\mu = \frac{np}{m\gamma\omega}dp\ . \tag{4.14}$$

Уравнение для магнитного момента μ в том же приближении изолированных резонансов принимает вид

$$\frac{d\mu}{dt} \equiv -\frac{\partial H_n}{\partial\varphi} = \frac{eE_0 n}{k}J_n(\rho)\cos\xi_n\ ,\ \ \xi_n = \int^z k_\parallel(z')dz' + n\varphi - \omega t\ , \tag{4.15}$$

откуда получаем (см. (4.14)):

$$\frac{dp}{dt} = \frac{eE_0 m\omega\gamma}{pk}J_n(\rho)\cos\xi_n\ . \tag{4.16}$$

Рассмотрим вклад, который вносят в инкремент электроны, взаимодействующие с волной на n-ом циклотронном резонансе. Функция распределения будет зависеть от фазы только через переменную ξ_n. Переходя в выражении (4.13) от интегрирования по $d\zeta d\varphi$ к интегрированию по другим переменным $d\xi_n d\varphi$, запишем:

$$\gamma_{\text{L}n} = -\frac{eE_0}{2kU}\times$$
$$\times\int pdpdp_\parallel d\xi_n\delta f_n\frac{1}{2\pi}\int d\varphi\cos[\xi_n - (n\varphi - \rho\sin\varphi)]\left(\frac{k_\perp p_\perp}{m\gamma}\cos\varphi + \frac{k_\parallel p_\parallel}{m\gamma}\right). \tag{4.17}$$

Проинтегрировав по $d\varphi$ с учётом резонансных условий (4.12), получаем

$$\gamma_{\text{L}n} = -\frac{eE_0\omega}{2kU}\int pdpdp_\parallel d\xi_n\delta f_n J_n(\rho)\cos\xi_n\ . \tag{4.18}$$

Далее необходимо вычислить δf_n. Полагаем, что f_0 зависит от μ и p, производные от которых по времени подчиняются уравнениям (4.15), (4.16), а дифференциалы связаны между собой выражением (4.14). Следовательно, чтобы найти линейный инкремент, будет достаточно решить в таком же приближении уравнение (4.16). Значит, в правую часть уравнения (4.16) необходимо подставить невозмущенную траекторию $\xi_n(t)$ (траекторию в отсутствие поля волны).

Чтобы определить невозмущенную траекторию $\xi_n(t)$ при $E_0 = 0$, получаем из (4.10) следующую систему уравнений:

$$\frac{dz}{dt} = \frac{p_\parallel}{m\gamma} , \quad \frac{dp_\parallel}{dt} = -\frac{\mu}{\gamma}\frac{d\omega_c}{dz} , \quad \frac{d\varphi}{dt} = \frac{\omega_c}{\gamma} , \quad \frac{d\mu}{dt} = 0 , \tag{4.19}$$

из которой следует уравнение для переменной ξ_n:

$$\frac{d\xi_n}{dt} = \frac{k_\parallel}{m\gamma}(p_\parallel - p_{rn}) \equiv u_n , \tag{4.20}$$

где p_{rn} определено в (4.12). Разница $(p_\parallel - p_{rn})$, как и $d\xi_n/dt$, оказывается малой величиной для резонансных частиц. Отметим, что резонансный продольный импульс p_{rn} — это функция величин p, n, z. Выведем далее уравнение для $d\xi_n/dt$ (обозначенной в (4.20) как u_n) вдоль невозмущенной траектории электрона. Продифференцируем выражение (4.20) с учётом (4.19). В этих выкладках величину $k_\parallel/m\gamma$ можно полагать константой, так как величина $(p_\parallel - p_{rn})$ уже сама мала. В результате для u_n имеем следующее уравнение:

$$\frac{du_n}{dt} = -a_n , \quad a_n = \frac{k_\parallel}{m\gamma^2}\left(\mu\frac{d\omega_c}{dz} + \frac{1}{2m}\frac{\partial p_{rn}^2}{\partial z}\right) . \tag{4.21}$$

Таким образом, если пренебречь полем волны, то изменение u_n происходит вследствие неоднородности среды и зависит от параметра неоднородности a_n из (4.21). Так как из-за неоднородности плазмы и внешнего магнитного поля электрон быстро покидает резонанс, то a_n можно полагать константой, когда решаются уравнения движения в резонансной области. Далее при расчётах будем полагать $a_n > 0$ (в случае $a_n < 0$ замена результатов очевидна). Индекс n не пишем для краткости.

Выпишем элементарное решение уравнений (4.20), (4.21):

$$u = u_0 - at , \quad \xi = \xi_0 + u_0 t - \frac{at^2}{2} . \tag{4.22}$$

Подставляя решение ξ из (4.22) в (4.16) и интегрируя по t, получаем следующее решение:

$$p - p_0 = \frac{eE_0 m\omega\gamma}{pk} J_n(\rho_r) \int_{t_0}^{t} \cos\left(\xi_0 + u_0 t' - \frac{at'^2}{2}\right) dt' =$$

$$= \frac{eE_0 m\omega\gamma}{pk} J_n(\rho_r)\sqrt{\frac{\pi}{a}}\left\{\cos\left(\frac{u^2}{2a} + \xi\right)\left[C\left(\frac{u_0}{\sqrt{2a}}\right) - C\left(\frac{u}{\sqrt{2a}}\right)\right] +\right.$$

$$+\sin\left(\frac{u^2}{2a}+\xi\right)\left[S\left(\frac{u_0}{\sqrt{2a}}\right)-S\left(\frac{u}{\sqrt{2a}}\right)\right]\Bigg\}\ , \tag{4.23}$$

где математические функции C, S – соответственно косинус- и синус-интегралы Френеля [156], при этом были учтены следующие соотношения:

$$u_0 - at = u\ , \quad \frac{u_0^2}{2a}+\xi_0 = \frac{u^2}{2a}+\xi\ .$$

Используя теорему Лиувиля о сохранении фазового объёма, а также соотношение (4.14), величина δf_n может быть записана в следующем виде:

$$\delta f_n = -\left(\frac{\partial f_0}{\partial p}+\frac{np}{m\gamma\omega}\frac{\partial f_0}{\partial \mu}\right)(p-p_0)\ , \tag{4.24}$$

где $p-p_0$ берётся из решения (4.23). Подставляя полученное выражение (4.24) в формулу (4.18) и переходя от интегрирования по $dp_\parallel$ к интегрированию по переменной du, окончательно имеем:

$$\gamma_{\text{L}n} = \frac{eE_0 m\omega}{2kk_\parallel U}\int pdp\gamma du d\xi_n\left(\frac{\partial f_0}{\partial p}+\frac{np}{m\gamma\omega}\frac{\partial f_0}{\partial \mu}\right)(p-p_0)J_n(\rho)\cos\xi_n\ . \tag{4.25}$$

Понятно, что основной вклад в интеграл по du вносит резонансная область значений u вблизи нуля, которым при выбранном знаке $a>0$ соответствуют величины $u_0 \gg \sqrt{a}$. Следовательно, вместо ρ в аргументе $J_n(\rho)$ можно подставить резонансную величину ρ_r, а вместо интегралов Френеля от аргумента $u_0/\sqrt{2a}$ можно подставить их асимптотики $C(u_0/\sqrt{2a}) = S(u_0/\sqrt{2a}) \to 1/2$. Члены же, включающие интегралы Френеля от $u/\sqrt{2a}$, вносят нулевой вклад вследствие нечётности интегралов Френеля. В результате расчёт сводится к простейшему интегрированию по $d\xi du$. Напомним, что в нерелятивистском случае резонансные условия детерминируют только продольную скорость частиц. В релятивистском же случае выражение (4.12) определяет на плоскости $(p_\parallel, p)$ некоторую линию, вблизи которой электроны взаимодействуют с МН волной на n-ом циклотронном резонансе.

Учитывая, что линейный инкремент определяется суммой вкладов от всех циклотронных резонансов (4.25), итоговое выражение для линейного инкремента квази-электростатической медленной необыкновенной волны, которая распространяется под произвольным углом к внешнему магнитному полю, прини-

мает следующий вид:

$$\gamma_{\text{L}} = \sum_{n=-\infty}^{\infty} \gamma_{\text{L}n} \ ,$$

$$\gamma_{\text{L}n} = \frac{(\pi e m \omega E_0)^2}{2|k_\parallel| k^2 U} \int_{p_{min}}^{\infty} dp \, \gamma^2 J_n^2 \left(k_\perp \sqrt{\frac{2\mu}{m\omega_c}} \right) \left(\frac{\partial f_0}{\partial p} + \frac{np}{m\omega\gamma} \frac{\partial f_0}{\partial \mu} \right) \Bigg|_{\mu=\mu_{rn}(p)} , \tag{4.26}$$

где U – плотность энергии квази-электростатической МН волны:

$$U = \frac{E_0^2}{8\pi} \left\{ \left[1 + \frac{\omega_p^2 \omega_c^2}{(\omega_c^2 - \omega^2)^2} \right] \sin^2\theta + \cos^2\theta \right\} \ , \tag{4.27}$$

$p_{min} = |p_{rn}|$, J_n – функция Бесселя первого рода порядка n, а запись $\mu = \mu_{rn}(p)$ означает, что после дифференцирования вместо μ во всех выражениях подставляется её резонансное значение $\mu_{rn}(p)$, которое даётся формулой

$$\mu_{rn}(p) = \frac{p^2 - p_{rn}^2}{2m\omega_c} \ , \tag{4.28}$$

где p_{rn} берётся из (4.12). Отметим, что для применимости полученного выражения для инкремента волны плотность “холодных” электронов должна быть существенно больше плотности горячих электронов n_{eq} и $\tilde{n}(z)$, т.е. входящая в формулу (4.27) плазменная частота ω_p определяется только плотностью “холодных” электронов. Заметим также, что хотя выражение (4.26) формально включает все возможные резонансы, но основной вклад будет лишь от конечного количества; данное количество и номера резонансов определяются параметрами волны, плазмы и функции распределения электронов.

Для удобства вычислений перейдём к безразмерным величинам согласно следующим выражениям:

$$P = \frac{p}{mc} \ , \ M = \frac{\mu\omega_{ceq}}{mc^2} \ , \ P_{\text{т}} = \frac{p_{\text{т}}}{mc} \ , \ M_{\text{т}} = \frac{\mu_{\text{т}}\omega_{ceq}}{mc^2} \ . \tag{4.29}$$

В данных обозначениях функция распределения электронов (4.4) и выражение $\gamma_{\text{L}n}$ для вклада в инкремент МН волны от n-ого циклотронного резонанса имеют следующий вид:

$$f_0(P, M) = \frac{n_{eq}}{2\pi^{3/2}(mc)^3 P_{\text{т}} M_{\text{т}}} \frac{\Gamma(\kappa + l + 1)}{\kappa^{l+3/2}\Gamma(l+1)\Gamma(\kappa - 1/2)} \times$$

$$\times \left(\frac{M}{M_{\text{т}}}\right)^{l} \left(1 + \frac{P^2}{\kappa P_{\text{т}}^2} - A_{\text{т}} \frac{M}{\kappa M_{\text{т}}}\right)^{-(\kappa+l+1)} , \qquad (4.30)$$

$$\gamma_{\text{L}n} = \frac{(\pi e m \omega E_0)^2}{2|k_{\parallel}|k^2 U} \int_{P_{min}}^{\infty} dP\, \gamma^2 J_n^2(\rho) \left(\frac{\partial f_0}{\partial P} + \frac{nP\omega_{ceq}}{\omega\gamma} \frac{\partial f_0}{\partial M}\right)\Bigg|_{M=M_{rn}(P)} , \qquad (4.31)$$

где

$$\rho = N \sin\theta \left(\frac{2M\omega^2}{\omega_c\, \omega_{ceq}}\right)^{1/2} , \quad N = \frac{kc}{\omega} , \quad M_{rn} = \mu_{rn} \frac{\omega_{ceq}}{mc^2} ,$$

а μ_{rn} определяется формулой (4.28). Теперь подставляем функцию (4.30) в выражение (4.31). В результате получаем следующее выражение для инкремента квази-электростатической МН волны в случае, если распределение энергичных электронов имеет вид κ-функции с конусом потерь:

$$\gamma_{\text{L}n} = \frac{\pi^{1/2}}{4} \frac{(eE_0 m\omega)^2}{|k_{\parallel}|k^2 U} \frac{n_{eq}}{(mc)^3 P_{\text{т}} M_{\text{т}}} \frac{\Gamma(\kappa+l+1)}{\kappa^{l+3/2}\Gamma(l+1)\Gamma(\kappa-1/2)} g_{\text{L}n} , \qquad (4.32)$$

$$g_{\text{L}n} = \int_{P_{min}}^{\infty} dP\, \gamma^2 J_n^2(\rho) \left(\frac{M_{rn}}{M_{\text{т}}}\right)^{l-1} \left(1 + \frac{P^2}{\kappa P_{\text{т}}^2} - \frac{M_{rn}}{\kappa M_{\text{т}}} A_{\text{т}}\right)^{-(\kappa+l+2)} \times$$

$$\times \left\{ -\frac{2P}{\kappa P_{\text{т}}^2} \frac{(\kappa+l+1)M_{rn}}{M_{\text{т}}} + \frac{nP\omega_{ceq}}{\omega\gamma} \left[\left(1 + \frac{P^2}{\kappa P_{\text{т}}^2} - A_{\text{т}} \frac{M_{rn}}{\kappa M_{\text{т}}}\right) \frac{l}{M_{\text{т}}} + \right.\right.$$

$$\left.\left. + \frac{A_{\text{т}}(\kappa+l+1)M_{rn}}{\kappa M_{\text{т}}^2} \right] \right\} .$$

При выводе формулы для инкремента МН волны предполагалось, что электрическое поле волны линейно поляризовано по $\mathbf{k}$, а влиянием магнитного поля волны можно пренебречь. Как будет показано далее, данное условие действительно оказывается выполненным для частот вблизи резонансной частоты $\omega \simeq \omega_{\text{r}1}(\theta)$, где $\omega_{\text{r}1}(\theta)$ даётся выражением (1.19). Как следует из (4.32), величина $\gamma_{\text{L}n}$ может оказаться положительной и дать вклад в итоговый инкремент лишь при позитивном значении величины в фигурных скобках. Однако данная величина оказывается немонотонной функцией анизотропии $A_{\text{т}}$. Следовательно, можно ожидать немонотонность инкремента МН волны в зависимости от $A_{\text{т}}$, что и подтвердили последующие расчёты (они будут приведены ниже).

Для численного определения области возможной генерации МН волн в магнитосфере Земли, наряду с использованием в качестве распределения энергичных частиц κ-функции с конусом потерь, будет использоваться дипольная

модель для аппроксимации $\mathbf{B}_0$, а также гиротропная модель плотности холодных электронов $n^{(c)} \propto B_0$, т.е.

$$\omega_p^2 = \frac{S^2}{27}\,\omega_{ceq}^0 \cdot \omega_c\ ,$$

где ω_{ceq}^0 – значение электронной циклотронной частоты на земной поверхности на экваторе, $S = \text{const}$. При сделанном выборе коэффициента пропорциональности между величинами ω_p^2 и ω_c на экваторе на L-оболочке $L = 3$ будет $\omega_p/\omega_c = S$. Понятно, что в используемой гиротропной модели ω_p/ω_c увеличивается с уменьшением ω_c и уменьшается с увеличением ω_c. Так, например, отношение ω_p/ω_c уменьшается вдоль одной и той же силовой линии при перемещении от экватора к полюсу, а при постоянной магнитной широте увеличивается с увеличением L. На Рисунках 4.4 и 4.5 соответственно для двух L-оболочек изображены зависимости инкремента МН волн от ν (в допустимых интервалах частот) и θ для трёх значений широты λ. Соответствующие значения отношения ω_p/ω_c указаны на каждом графике. При вычислении применялись следующие параметры функции распределения горячих электронов и холодной составляющей плазмы:

$$\kappa = 2\ ,\ \ l = 1\ ,\ \ p_{\text{т}} = 0.45 \cdot mc\ ,\ \ A_{\text{т}} = 1\ ,\ \ n_{eq}^{(h)} = 0.01 \cdot n_{eq}^{(c)}\ ,\ \ S = 3\ .$$

В области выше малиновой линии поляризация МН волны почти линейная, что и использовалось в процессе расчёта инкремента. При этом максимум инкремента оказался именно в данной области, что оправдывает сделанное упрощение. Отметим, что условие линейной поляризации волны оказывается связанным с неравенством $N^2 \gg 1$, так как известно, что в пределе $N^2 \to \infty$, поляризация волны будет линейной. На Рисунке 4.4 показаны результаты расчёта инкремента МН волн на L-оболочке $L = 3$ для следующих трёх широт: $\lambda = 0$ (левый график), $\lambda = 30^\circ$ (средний график) и $\lambda = 45^\circ$ (правый график). При этом на каждом графике приведены значения ν и θ, соответствующие максимальному инкременту МН волн на всей плоскости, и величина этого максимума (в данной точке). Рисунок 4.5 демонстрирует результаты расчёта инкремента МН волн для L-оболочки $L = 4.5$ и трёх значений широт $\lambda = 0^\circ,\ 30^\circ$ и 55° соответственно на левом, центральном и правом графиках. Поскольку при всех заданных параметрах функции распределения энергичных электронов инкремент

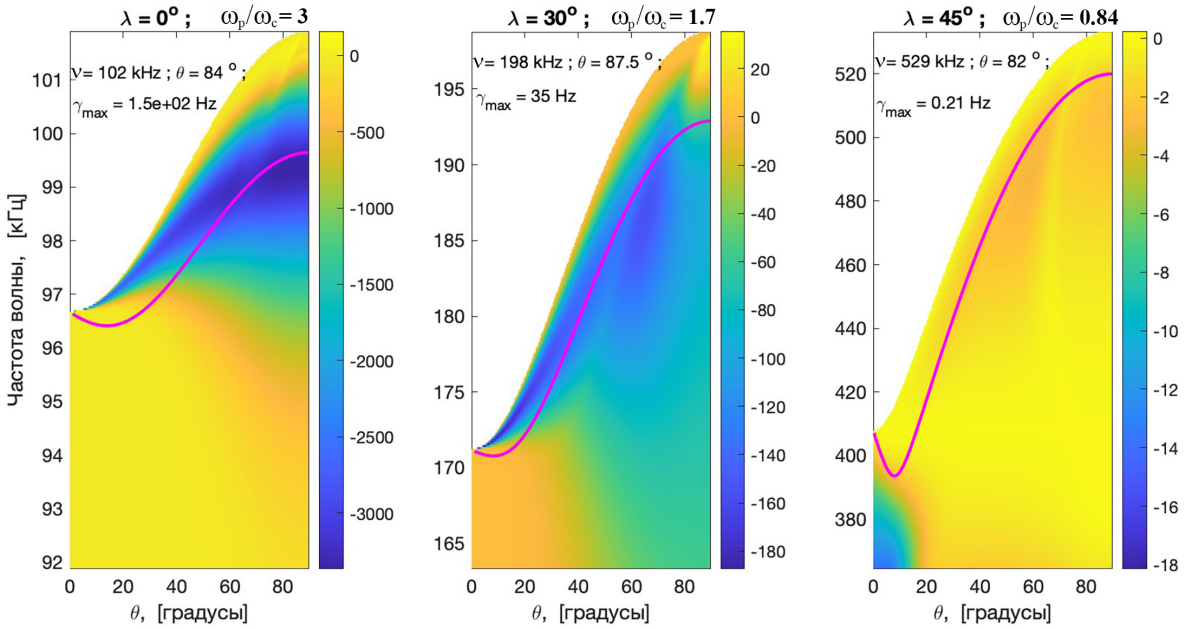


Рисунок 4.4 – Зависимость инкремента МН волны от частоты и угла распространения на L-оболочке $L = 3$ для значений широты $\lambda = 0°,\ 30°$ и $45°$

МН волн на обеих L-оболочках оказался максимальным на экваторе, то последующие результаты исследования инкремента от параметров холодной плазмы и функции распределения энергичных электронов будут приведены для широты $\lambda = 0$. Поскольку вычисление продольной резонансной энергии для многих циклотронных резонансов, которые вносят заметный вклад в инкремент МН волн, даёт величины, превышающие 1.5 МэВ (при выбранных плазменных параметрах), то учёт релятивистских эффектов является актуальным и необходимым. Так, в статье [117] обосновывалась необходимость учёта релятивистских эффектов при вычислении инкремента МН волн, распространяющихся в магнитосфере Земли.

На Рисунке 4.6 приведена зависимость инкремента МН волн от тепловой энергии горячих электронов T, через которую параметр функции распределения $P_т^2$ из (4.30) записывается как $P_т^2 = (1 + T/512)^2 - 1$, здесь T – энергия в кэВ. Изображённая на Рисунке 4.6 величина — это наибольшее значение инкремента (по всем доступным ν и θ) в зависимости от тепловой энергии T. По сути, это инкремент такой волны, которая при всех заданных характеристиках плазмы и функции распределения энергичных электронов будет возбуждаться в первую очередь (замечание касается всех последующих зависимостей инкремента, которые приводятся далее в этом параграфе). Правая шкала отмечает

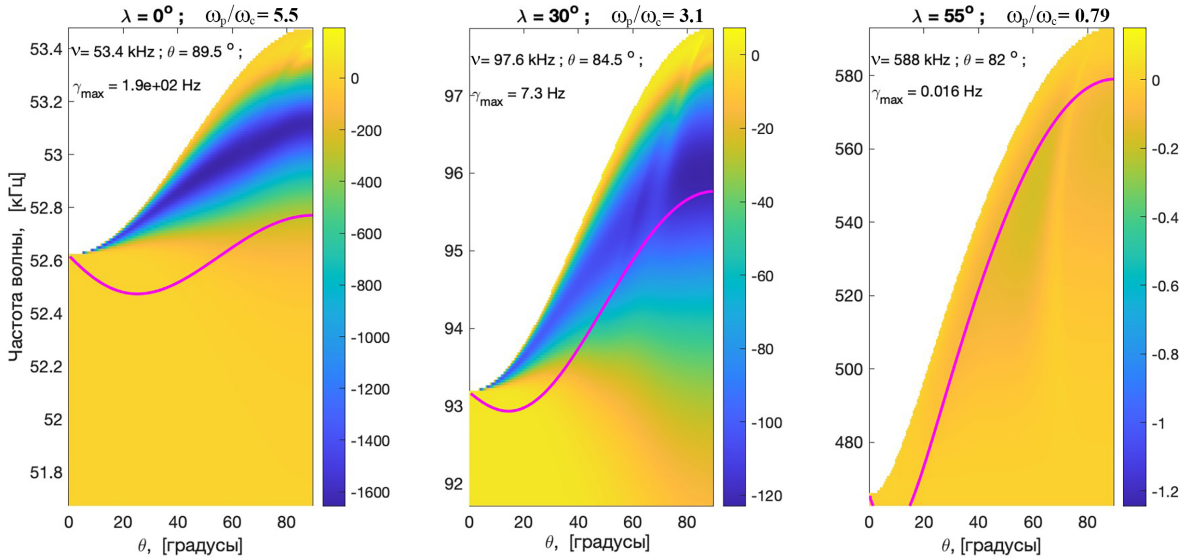


Рисунок 4.5 – Зависимость инкремента МН волны от частоты и угла распространения на L-оболочке $L = 4.5$ для значений широты $\lambda = 0°,\ 30°$ и $55°$

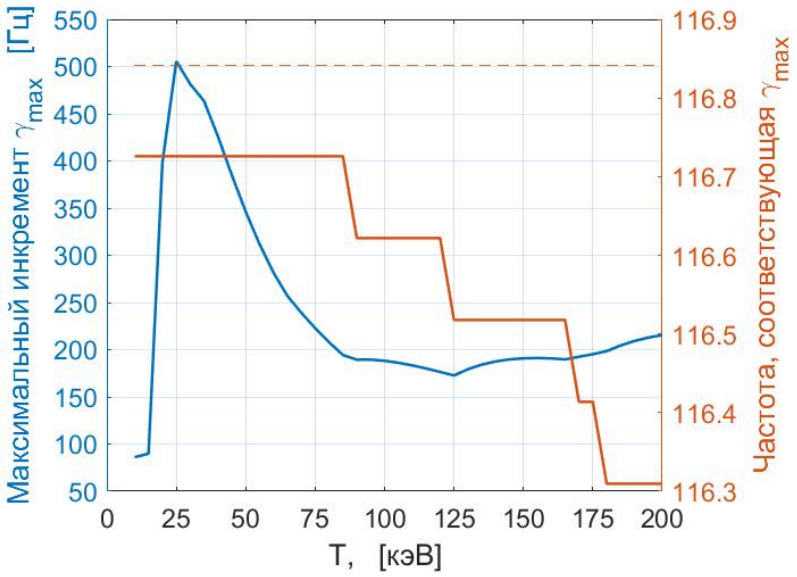


Рисунок 4.6 – Зависимость максимального инкремента волны от тепловой энергии T на $L = 3.5$, $\lambda = 0$ для следующих параметров функции распределения:
$\kappa = 2$; $l = 1$; $A_{\text{т}} = 1$; $n_{eq}^{(h)} = 0.01 \cdot n_{eq}^{(c)}$; $S = 4.5$; $\omega_p/\omega_c = 5.67$

частоты, на которых инкремент достигает соответствующих наибольших значений. Штриховой линией изображена частота верхнего гибридного резонанса ν_{UH}. Для $\theta = 90°$ это будет резонансная частота МН волн. Так как резонансная частота при $\theta < 90°$ будет меньше, чем величина ν_{UH}, и частота МН волны

всегда меньше резонансной, следовательно, близость частоты, которая отвечает максимальному инкременту, к величине ν_{UH} означает, что максимальный инкремент наблюдается при θ вблизи 90°, что и подтвердили численные результаты. Наблюдаемая немонотонная зависимость максимального инкремента от тепловой энергии T объясняется тем, что при увеличении величины T включается большее количество резонансов, которые вносят заметный, но не знакоопределённый вклад в инкремент γ_{L}.

Рисунок 4.7 представляет зависимость максимального инкремента МН волны от параметра κ функции распределения на L-оболочке $L = 3.5$ (при $\lambda = 0$), а шкала справа отмечает соответствующий угол волновой нормали (другие параметры плазмы приведены в подписи к рисунку). Как следует из рисунка, максимальный инкремент монотонно увеличивается с увеличением величины κ. Далее, угол θ, соответствующий максимальному инкременту, порядка 90°, значит, отвечающая максимуму частота близка к резонансной ν_{UH}.

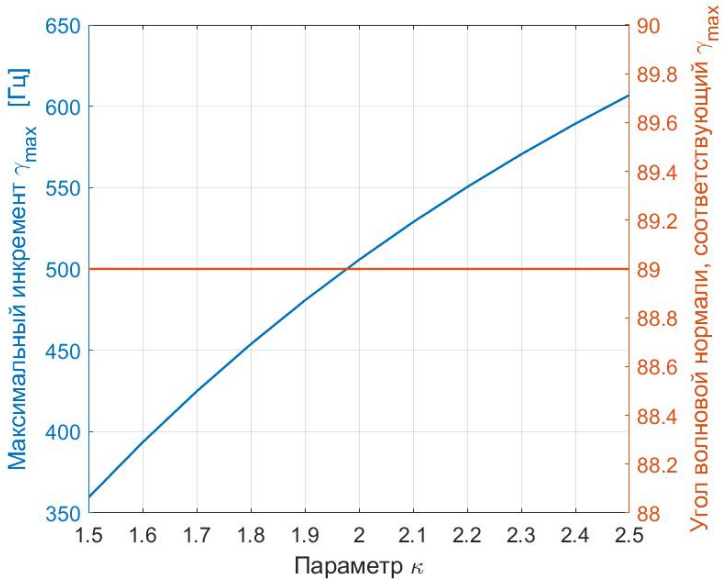


Рисунок 4.7 – Зависимость максимального инкремента волны от основного параметра κ на $L = 3.5$, $\lambda = 0$ для следующих параметров функции распределения:
$l = 1$; $A_{\text{т}} = 1$; $T = 25$ кэВ ; $n_{eq}^{(h)} = 0.01 \cdot n_{eq}^{(c)}$; $S = 4.5$; $\omega_p/\omega_c = 5.67$

Неустойчивость выбранной функции распределения (4.4) по отношению к генерации МН волн зависит от анизотропии и конуса потерь. Инкремент МН волн при отсутствии конуса потерь остаётся очень малой величиной, незави-

симо от величины анизотропии, а при наличии конуса потерь величина инкремента существенно изменяется в зависимости от величины анизотропии функции распределения. Результаты расчётов, демонстрирующих данные утверждения, представлены на Рисунках 4.8, 4.9. Показанные на рисунках зависимости получены для L-оболочки $L = 3$ и параметров функции распределения $T = 25$ кэВ, $\kappa = 2$. Из рисунков видно, что при фиксированной анизотро-

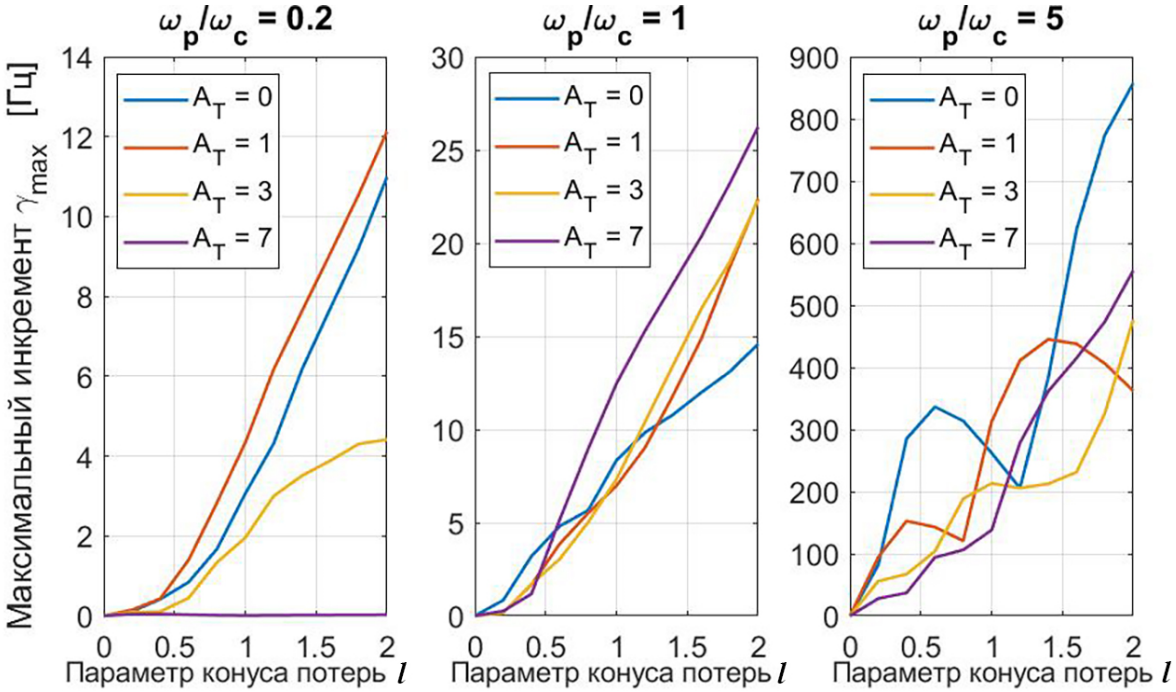


Рисунок 4.8 – Зависимость максимального инкремента МН волн от параметра конуса потерь l для четырёх неотрицательных значений анизотропии $A_т$ и трёх значений параметра ω_p/ω_c

пии $A_т$ максимальный инкремент, в основном (как тенденция), увеличивается с увеличением параметра конуса потерь l. В то же время, если зафиксировать величину параметра конуса потерь, то зависимость инкремента от анизотропии $A_т$ оказывается неоднозначной. Пусть величина анизотропии положительна (см. Рисунок 4.8). Тогда при малых значениях ω_p/ω_c инкремент МН волн при фиксированном значении параметра конуса потерь l сначала растёт с увеличением $A_т$, а при дальнейшем увеличении $A_т$ сильно падает (левый график). Далее, при $\omega_p/\omega_c = 1$ и достаточно больших значениях параметра конуса потерь инкремент МН волн растёт с увеличением анизотропии (средний график). Если же величина ω_p/ω_c большая, то величина инкремента МН волн начинает колебаться с изменением параметра конуса потерь; в этом случае зависимость

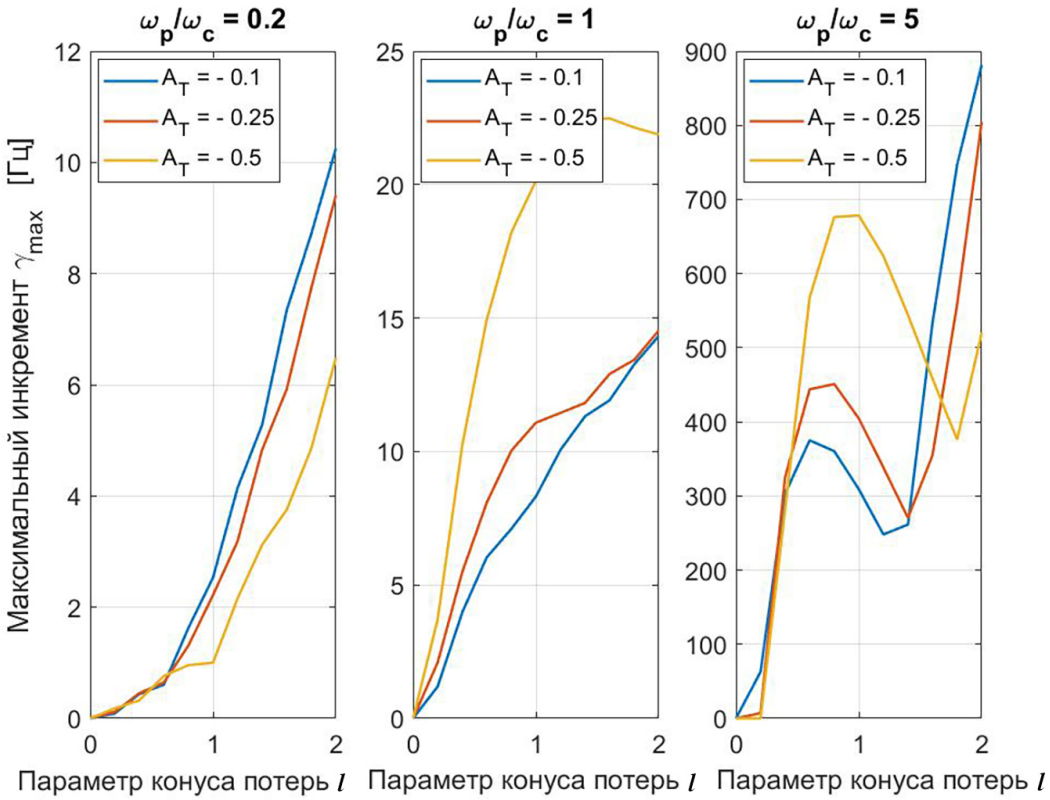


Рисунок 4.9 – Зависимость максимального инкремента МН волн от параметра конуса потерь l для трёх отрицательных значений анизотропии $A_т$ и трёх значений параметра ω_p/ω_c

инкремента МН волн от анизотропии при фиксированном l является неоднозначной (правый график). Пусть теперь анизотропия будет отрицательной (см. Рисунок 4.9). Тогда при малых ω_p/ω_c максимальный инкремент МН волн при фиксированном значении параметра конуса потерь l уменьшается с увеличением модуля анизотропии $|A_т|$ (левый график), а при $\omega_p/\omega_c = 1$ эта зависимость будет противоположной: максимальный инкремент растёт с увеличением модуля анизотропии (средний график). При больших же значениях ω_p/ω_c, аналогично случаю с $A_т > 0$, максимальный инкремент МН волн колеблется с ростом параметра конуса потерь l (правый график); в этом случае опять отсутствует однозначная зависимость инкремента от анизотропии (при фиксированном l).

Рисунок 4.10 демонстрирует зависимость максимального инкремента МН волны от анизотропии функции распределения $A_т$ для оболочки $L = 3$, широты $\lambda = 0$ и трёх значений отношения ω_p/ω_c. Расчёт выполнен при следующих значениях параметров функции распределения: $T = 25$ кэВ , $\kappa = 2$, $l = 1$. Чтобы понять, почему возникает немонотонная зависимость максимального инкремен-

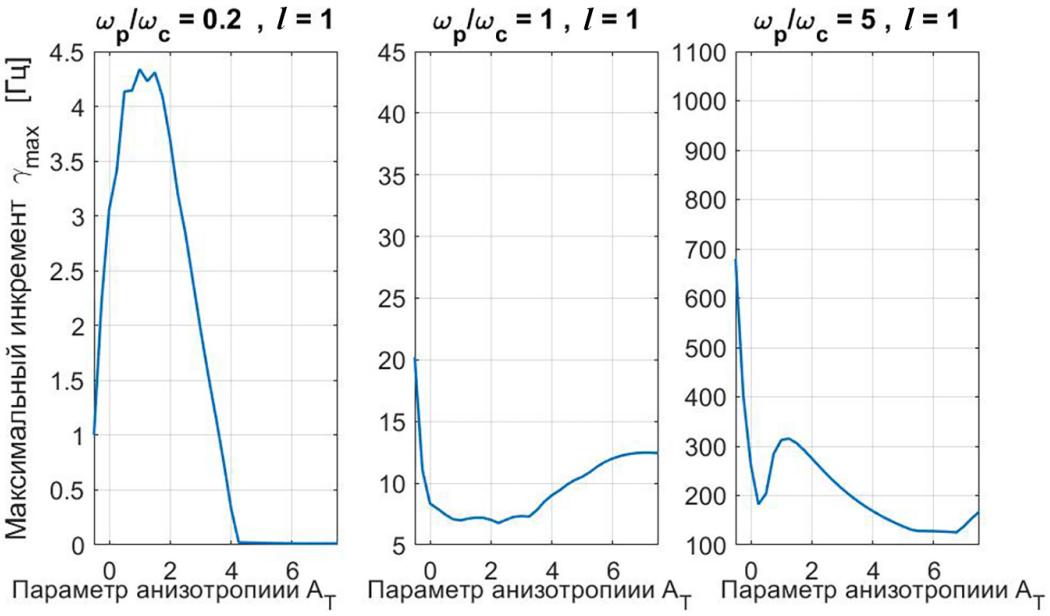


Рисунок 4.10 – Зависимость максимального инкремента МН волн от анизотропии $A_{\text{т}}$ для трёх значений параметра ω_p/ω_c

та МН волн от анизотропии распределения $A_{\text{т}}$ для κ-распределения электронов с конусом потерь, рассмотрим величину $g_{\text{L}n}$ в формуле (4.32), которая определяет вклад в инкремент от n-ого циклотронного резонанса. Из анализа величины $g_{\text{L}n}$ следует, что знакопеременным здесь будет выражение в фигурных скобках. При этом первый член в фигурных скобках (4.32) всегда отрицателен, а инкремент может возникнуть только если положительное выражение в квадратных скобках будет больше, чем первый отрицательный член. Как понятно из выражения (4.32), конкуренция всех по-разному меняющихся слагаемых и приводит к немонотонной зависимости максимального инкремента МН волн от анизотропии $A_{\text{т}}$.

При всех заданных характеристиках функции распределения горячих электронов следующие зависимости являются не самоочевидными: зависимость инкремента от L-оболочки на заданной широте (например, на экваторе) и зависимость инкремента от широты на заданной L-оболочке. Данные зависимости изображены соответственно на Рисунках 4.11 и 4.12. Как следует из обоих рисунков, максимумы инкремента МН волн соответствуют случаю, когда частота возбуждаемой волны близка к гармонике локальной циклотронной частоты: $\omega \simeq n\omega_c$. Тогда резонансный импульс, который отвечает n-ому циклотронному резонансу, будет иметь минимальную по модулю величину. Как показывает

анализ отдельных вкладов в инкремент от разных циклотронных резонансов, вклад именно n-ого циклотронного резонанса является преобладающим. Для промежуточных частот такого доминирующего резонанса не будет, в результате вклады от отдельных резонансов в значительной мере компенсируют друг друга, поскольку имеют разные знаки. Так, Рисунок 4.11 демонстрирует, что максимумы инкремента МН волн на оболочках $L \simeq 2, 2.5, 2.8$ и далее связаны с циклотронными резонансами $n = 3, 4, 5$ и так далее. Рисунок 4.12 показывает, что максимумы на широтах $\lambda \simeq 14°, 22°, 28°$ и далее связаны с циклотронными резонансами $n = 6, 5, 4$ и так далее. Необходимо подчеркнуть, что речь вовсе не идёт о возможности обнаружения на спутниках "полосатого" спектра излучений на гармониках электронной циклотронной частоты, а о том, что прямое следствие обнаруженного поведения инкремента МН волн состоит в наблюдении более интенсивного излучения на частоте, близкой к плазменной, когда спутник проходит области с $\omega_p \simeq n\omega_c$, так как при $\omega_p/\omega_c > 3$ частоты МН волн близки к плазменной ω_p.

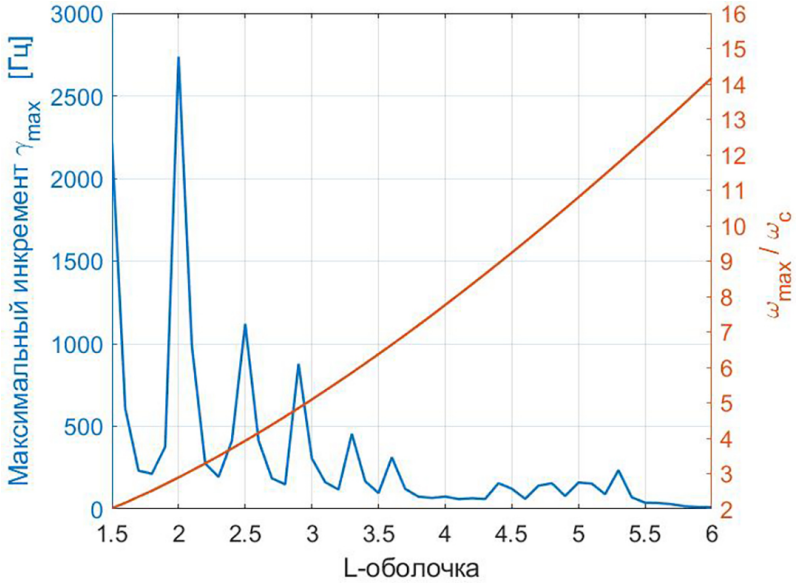


Рисунок 4.11 – Зависимость максимального инкремента МН волн на экваторе (левая шкала) и отношения частоты максимума инкремента к локальной циклотронной частоте (правая шкала) от L-оболочки для следующих параметров функции распределения:
$l = 1$; $A_т = 1$; $n_{eq}^{(h)} = 0.01 \cdot n_{eq}^{(c)}$; $S = 5$; $T = 25$ кэВ

В нерелятивистском случае, если частота волны совпадает с гармоникой гирочастоты, условия линейного резонанса приводят к нулевой продольной ско-

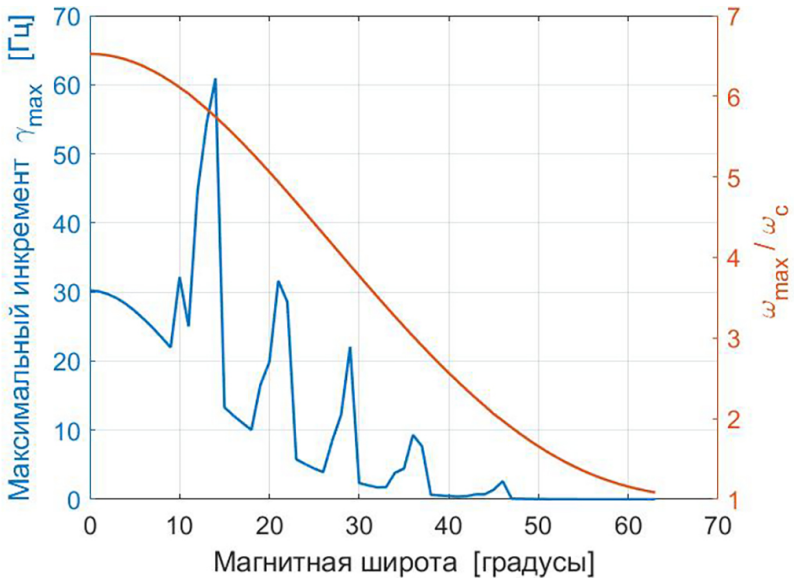


Рисунок 4.12 – Зависимость максимального инкремента (левая шкала) и отношения частоты максимума инкремента к локальной циклотронной частоте (правая шкала) от широты на $L = 5$ для следующих параметров функции распределения:
$l = 1$; $A_т = 1$; $n_{eq}^{(h)} = 0.01 \cdot n_{eq}^{(c)}$; $S = 3$; $\kappa = 1$; $T = 25$ кэВ

рости частицы. Поэтому в уравнении для гирофазы необходимо учитывать члены, пропорциональные волновому полю [157]. Это вырождение снимается в релятивистском случае, поскольку с учётом релятивистских эффектов условия резонанса содержат не только продольный импульс частицы, но и её полную энергию.

Линейный инкремент МН волн, выведенный в [151; 158] и представленный выше в данной главе, имеет особенность. Так, например, в выражении для инкремента величина $k_{||}$ возникает в знаменателе (4.32). Это, конечно, не означает, что при $k_{||} = 0$ инкремент становится бесконечным, поскольку в этом случае резонансный импульс стремится к бесконечности, и, следовательно, количество резонансных частиц стремится к нулю. Чтобы устранить эту неопределенность, выражение для инкремента волны можно просто переписать в других переменных. Далее будет изложен более общий подход, последовательно учитывающий релятивистские эффекты при резонансном взаимодействии медленных необыкновенных волн и частиц в плазме. Начнём с точных уравнений движения.

4.3 Уравнения движения релятивистских электронов в поле медленной необыкновенной волны

Релятивистские уравнения движения, справедливые для всех электронов (как резонансных, так и не резонансных), в поле МН волны и внешнем магнитном поле имеют следующий вид:

$$\frac{d\mathbf{r}}{dt} = \frac{\mathbf{p}}{m\gamma}, \quad \frac{d\mathbf{p}}{dt} = -e\left\{\mathbf{E} + \frac{1}{mc\gamma}[\mathbf{p} \times (\mathbf{B}_0 + \mathbf{B})]\right\}, \tag{4.33}$$

где $\mathbf{r}$ – координата частицы, $\mathbf{p}$ – её релятивистский импульс, e – заряд электрона (без знака), $\mathbf{B}$ – магнитное поле волны, $\gamma = \sqrt{1 + \mathbf{p}^2/m^2c^2}$ – релятивистский фактор и c – скорость света. В случае зависимости электрического поля от координат и времени вида (4.9) магнитное поле волны $\mathbf{B}$ однозначно определяется её электрическим полем из закона индукции Фарадея.

Уравнения движения частиц (4.33) в поле монохроматических волн, принадлежащих различным волновым модам, исследовались в большом числе работ, как в нерелятивистском, так и в релятивистском случае (см., например, [112; 159] и имеющиеся там ссылки.) Во многих работах эти уравнения исследовались в приближении заданного поля для анализа ускорения и питч-углового рассеяния частиц, в частности, в радиационных поясах Земли. В случае достаточно медленного изменения амплитуды волны решение уравнений движения частиц в приближении заданного поля позволяет также вычислить инкремент волны из закона сохранения энергии в системе волна-резонансные частицы (см., например, [111; 112]).

Уравнения движения (4.33) в переменных $(\mathbf{r}, \mathbf{p})$ не имеют гамильтонову форму, в отличие от уравнений, записанных в канонических переменных $(\mathbf{r}, \mathbf{P})$, где $\mathbf{P} = \mathbf{p} - (e/c)\mathbf{A}$ – обобщённый импульс, $\mathbf{A}$ – векторный потенциал электромагнитного поля. Использование уравнений в гамильтоновой форме даёт целый ряд преимуществ, в частности, упрощает поиск интегралов движения и переход к новым переменным с помощью канонических преобразований. Однако, если целью является вычисление инкремента (декремента), решение уравнений движения и, соответственно, отыскание функции распределения в переменных $(\mathbf{r}, \mathbf{p})$ может оказаться более удобным, поскольку именно в этих переменных

определяется плотность тока. Если же функция распределения известна в канонических переменных, возникает необходимость обоснования отождествления, в конечном счёте, канонического импульса $\mathbf{P}$ с обычным импульсом для резонансных частиц. Будем исходить из уравнений (4.33) и упростим их для резонансных частиц, что представляется не менее обоснованным, чем пренебрежение различием между каноническим и обычным импульсом для резонансных частиц.

Будем рассматривать случай однородной плазмы, когда внешнее магнитное поле $\mathbf{B}_0$ направлено вдоль оси z, а волновой вектор волны $\mathbf{k}$ лежит в плоскости (x, z), так что электромагнитное поле не зависит от координаты y. В этом случае система уравнений (4.33) имеет интеграл движения

$$x - \frac{p_y}{m\omega_c} = \text{const} \equiv x_0 \ , \tag{4.34}$$

где величина x_0 представляет собой x-координату ведущего центра частицы. Для частиц с фиксированным значением координаты ведущего центра x_0 фаза волны (4.9) принимает вид

$$\mathbf{kr} - \omega t = k_\parallel z + k_\perp (x - x_0) - \omega t + k_\perp x_0 \ , \tag{4.35}$$

где $k_\parallel$ и $k_\perp$ – продольная и поперечная (по отношению к внешнему магнитному полю) компоненты волнового вектора.

Перейдём от переменных x, p_x, p_y, z, p_z к новым переменным $x_0, \mu, \varphi, z, p_\parallel$ согласно соотношениям

$$x - x_0 = \sqrt{\frac{2\mu}{m\omega_c}} \sin\varphi, \ p_x = \sqrt{2m\omega_c\mu} \cos\varphi, \ p_y = \sqrt{2m\omega_c\mu} \sin\varphi, \ p_z = p_\parallel. \tag{4.36}$$

Из определения переменных (4.36) следует соотношение

$$\mu = (p_x^2 + p_y^2)/2m\omega_c \equiv p_\perp^2/2m\omega_c \ ,$$

так что введённая величина μ есть не что иное, как поперечный адиабатический инвариант, или магнитный момент. Величина φ представляет собой гирофазу частицы, а величины $p_\parallel$ и $p_\perp$ – продольную и поперечную компоненты импульса, соответственно. Переходя к новым переменным, после ряда стандартных, но громоздких преобразований получим следующую систему уравнений:

$$\frac{d\varphi}{dt} = \frac{\omega_c}{\gamma} + \frac{e|E|}{p_\perp} \sum_{n=-\infty}^{\infty} \left\{ \left[\frac{v_\perp k_\perp}{\omega} - \frac{n\omega_c}{\gamma v_\perp k_\perp} \left(1 - \frac{v_\parallel k_\parallel}{\omega} \right) \right] \frac{\varepsilon_2}{N^2 - \varepsilon_1} J_n(\rho) +
$$

$$+\left[\left(1-\frac{v_\parallel k_\parallel}{\omega}\right)+\frac{v_\parallel k_\perp}{\omega}a_z\right]J_n'(\rho)\Bigg\}\sin\xi_n\ , \tag{4.37}$$

$$\frac{d\mu}{dt}=-\frac{e|E|\gamma}{\omega_c}\sum_{n=-\infty}^{\infty}\Bigg\{\left[\left(1-\frac{v_\parallel k_\parallel}{\omega}\right)\frac{n\omega_c}{\gamma k_\perp}+\frac{v_\parallel n\omega_c}{\gamma\omega}a_z\right]J_n(\rho)-$$

$$-\ v_\perp\left(1-\frac{v_\parallel k_\parallel}{\omega}\right)\frac{\varepsilon_2}{N^2-\varepsilon_1}J_n'(\rho)\Bigg\}\cos\xi_n\ , \tag{4.38}$$

$$\frac{dz}{dt}=\frac{p_\parallel}{m\gamma}\ , \tag{4.39}$$

$$\frac{dp_\parallel}{dt}=-e|E|\sum_{n=-\infty}^{\infty}\Bigg\{\left[a_z\left(1-\frac{n\omega_c}{\gamma\omega}\right)+\frac{n\omega_c k_\parallel}{\gamma k_\perp\omega}\right]J_n(\rho)-$$

$$-\ \frac{v_\perp k_\parallel}{\omega}\frac{\varepsilon_2}{N^2-\varepsilon_1}J_n'(\rho)\Bigg\}\cos\xi_n\ , \tag{4.40}$$

где $|E|$ – амплитуда электрического поля волны, компоненты которого даются следующими выражениями:

$$E_x=|E|\cos\Psi,\ E_y=|E|\frac{\varepsilon_2}{N^2-\varepsilon_1}\sin\Psi,\ E_z=|E|a_z\cos\Psi,\ \Psi=\mathbf{kr}-\omega t, \tag{4.41}$$

а компоненты магнитного поля выражены через компоненты электрического поля с помощью закона индукции Фарадея:

$$B_x=-N\cos\theta E_y,\quad B_y=N\cos\theta E_x-N\sin\theta E_z,\quad B_z=N\sin\theta E_y. \tag{4.42}$$

В приведённых выше уравнениях и далее используется явное выражение для поляризационного коэффициента a_y, но оставляется коэффициент a_z в виде обозначения (см. (1.22)). Для более компактной записи уравнений, наряду с продольным и поперечным импульсом будем также использовать продольную и поперечную скорости частицы, связанные с соответствующими импульсами соотношениями $v_\parallel=p_\parallel/m\gamma, v_\perp=p_\perp/m\gamma$. Входящие в уравнения (4.37), (4.38) и (4.40) величины $J_n(\rho)$ и $J_n'(\rho)$ – это функции Бесселя первого рода порядка n и их производные по аргументу ρ, который представляет собой безразмерный ларморовский радиус:

$$\rho=k_\perp(2\mu/m\omega_c)^{1/2}. \tag{4.43}$$

Сумма по n, которая фигурирует в этих уравнениях, это сумма по всем циклотронным резонансам, которая возникает при непродольном распространении

волны, а фаза ξ_n — резонансная фаза, которая отвечает n-му циклотронному резонансу:

$$\xi_n = k_\parallel z + n\varphi - \omega t + k_\perp x_0 \ . \tag{4.44}$$

Из (4.38) и (4.40) следует уравнение для изменения кинетической энергии частицы $W = mc^2(\gamma - 1)$:

$$\frac{dW}{dt} = -e|E| \sum_{n=-\infty}^{\infty} \left[\left(v_\parallel a_z + \frac{n\omega_c}{\gamma k_\perp} \right) J_n(\rho) - v_\perp \frac{\varepsilon_2}{N^2 - \varepsilon_1} J_n'(\rho) \right] \cos \xi_n \ . \tag{4.45}$$

Ясно, что изменение энергии частицы будет существенным, когда в сумме в правой части (4.45) имеется медленно изменяющееся слагаемое. Очевидно, что условием этого является обращение в ноль полной производной по времени одной из фаз ξ_n вдоль траектории частицы. Вычисляя производную фазы ξ_n вдоль невозмущённой траектории частицы, то есть, в пренебрежении полем волны, получим

$$\frac{d\xi_n}{dt} = \frac{k_\parallel p_\parallel}{m\gamma} + \frac{n\omega_c}{\gamma} - \omega \ . \tag{4.46}$$

Приравнивая эту производную нулю, получаем релятивистские резонансные условия (4.12), отвечающие резонансному взаимодействию частицы с волной на n-ом циклотронном резонансе. В отличие от нерелятивистского случая, резонансные условия (4.12) определяют не продольный импульс частицы, а наклонную прямую на плоскости $(p_\parallel, \gamma)$ в области $\gamma > 1$.

При исследовании резонансного взаимодействия МН волн и частиц будем полагать $\omega_p \gg \omega_c$. Это неравенство выполняется во многих областях околоземного космического пространства, за исключением, возможно, авроральной области. В этом случае характерные частоты МН волн $\omega \sim \omega_p \sim \omega_{\text{uh}}$, так что можно считать, что $\omega \gg \omega_c$. Отметим, что при $\omega_p \gg \omega_c$ МН волны имеют левую поляризацию. Из резонансных условий (4.12) тогда следует, что взаимодействие на n-ом циклотронном резонансе должно быть наиболее эффективным при $\omega\gamma \sim n\omega_c$. Характерные энергии энергичных электронов в радиационных поясах Земли отвечают значениям $\gamma \lesssim 2$. Следовательно, в рассматриваемых условиях наиболее важную роль играет взаимодействие на высоких циклотронных резонансах $n \sim \omega_p/\omega_c$. Для высоких циклотронных резонансов в уравнении для гирофазы (4.37) можно пренебречь членом с полем даже при малых поперечных скоростях, поскольку при малых ρ и высоких номерах n функции

Бесселя, определяющие влияние поля волны на изменение гирофазы, экспоненциально малы. Поэтому в случае высоких циклотронных резонансов можно упростить уравнение (4.37) для гирофазы и записать его в виде

$$\frac{d\varphi}{dt} = \frac{\omega_c}{\gamma}. \tag{4.47}$$

В дальнейшем будем исследовать приведённые выше уравнения движения только для резонансных частиц в приближении изолированных резонансов, что справедливо, когда амплитуда волны достаточно мала. Критерий применимости приближения изолированных резонансов, который противоположен критерию Чирикова возникновения стохастичности [160], имеет вид $\omega_c\tau \gg \gamma$ (см. ниже). В этом приближении в суммах по циклотронным резонансам в уравнениях движения можно оставить одно медленно изменяющееся слагаемое. Кроме того, можно упростить правые части уравнений, используя соотношение

$$\frac{k_\parallel v_\parallel}{\omega} = 1 - \frac{n\omega_c}{\gamma\omega}\ , \tag{4.48}$$

которое эквивалентно резонансным условиям (4.12). В результате для частиц, взаимодействующих с волной на n-ом циклотронном резонансе, получим следующие уравнения:

$$\frac{d\varphi}{dt} = \frac{\omega_c}{\gamma}\ , \quad \frac{d\mu}{dt} = -\frac{e|E|cn}{\omega}V_n\cos\xi_n\ , \tag{4.49}$$

$$\frac{dz}{dt} = \frac{p_\parallel}{m\gamma}\ , \quad \frac{dp_\parallel}{dt} = -\frac{e|E|k_\parallel c}{\omega}V_n\cos\xi_n\ , \tag{4.50}$$

$$\frac{dW}{dt} = -e|E|cV_n\cos\xi_n\ , \tag{4.51}$$

где

$$V_n = \left(\frac{v_\parallel}{c}a_z + \frac{n\omega_c}{\gamma k_\perp c}\right)J_n(\rho) - \frac{v_\perp}{c}\frac{\varepsilon_2}{N^2-\varepsilon_1}J_n'(\rho). \tag{4.52}$$

Из (4.49)–(4.51) следуют три очевидных интеграла движения для резонансных частиц вблизи n-го резонанса:

$$p_\parallel - \frac{k_\parallel}{\omega}mc^2\gamma = \mathrm{C},\ \ nmc^2\gamma - \omega\mu = \mathrm{C}_1,\ \ k_\parallel\mu - np_\parallel = \mathrm{C}_2. \tag{4.53}$$

Нетрудно видеть, что любой из этих интегралов может быть получен из оставшихся двух. На самом деле, из этих трёх интегралов движения для резонансных

частиц только один интеграл является независимым. Это ясно уже из того, что из трёх величин γ, μ и $p_\parallel$ только две являются независимыми. Поэтому наличие двух независимых интегралов движения означало бы, что все три величины для резонансных частиц сохраняются, что, конечно, не так. В действительности, из любого из приведенных интегралов движения могут быть получены два остальных, используя резонансные условия и связь между величинами γ, μ и $p_\parallel$, а именно:

$$\gamma = \sqrt{1 + \frac{p_\parallel^2}{m^2c^2} + \frac{2\mu\omega_c}{mc^2}}, \tag{4.54}$$

что будет показано ниже.

Наличие независимого интеграла движения в приближении изолированных резонансов позволяет свести изначально двумерную систему уравнений (4.49), (4.50), описывающую движение частиц вблизи n-го резонанса, к одномерной. Для этого выберем фазу (4.44) в качестве одной из неизвестных функций времени, а её полную производную по времени

$$\frac{d\xi_n}{dt} \equiv u_n = \frac{k_\parallel p_\parallel}{m\gamma} + \frac{n\omega_c}{\gamma} - \omega \tag{4.55}$$

в качестве второй неизвестной функции. Вычисляя производную du_n/dt с помощью (4.49), (4.50), получим следующую систему уравнений для ξ_n, u_n:

$$\frac{d\xi_n}{dt} = u_n \ , \quad \frac{du_n}{dt} = -\frac{e|E|\omega}{mc\gamma}\left(\frac{k_\parallel^2 c^2}{\omega^2} - 1\right) V_n \cos\xi_n \ , \tag{4.56}$$

где V_n определено в (4.52). Из второго уравнения (4.56) и уравнения (4.45), с учётом очевидного соотношения $dW/d\gamma = mc^2$, следует, что величина

$$C_n = \gamma \exp\left(-\frac{u_n}{\omega(N_\parallel^2 - 1)}\right) \ , \tag{4.57}$$

где $N_\parallel^2 = k_\parallel^2 c^2/\omega^2$, также является интегралом движения для резонансных частиц. Отметим, что при $u_n = 0, C_n = \gamma$. Соотношение (4.55) совместно с (4.57) определяют γ и $p_\parallel$, а, следовательно, и μ, входящие в уравнение для u_n, как функции u_n и C_n. Поэтому, для частиц с фиксированным значением интеграла движения C_n система уравнений (4.56) является замкнутой. При этом правая часть уравнения для u_n оказывается очень сложной функцией u_n, что делает невозможным анализ системы (4.56) аналитическими методами. С принятой

точностью, однако, можно заменить в правой части уравнения для u_n величины $p_\parallel$, γ и μ их резонансными значениями, то есть значениями, вычисленными при $u_n = 0$, что эквивалентно использованию вместо (4.55) соотношения $u_n = 0$ (наряду с интегралом движения (4.57) и соотношением между $p_\parallel$, γ и μ) для определения резонансных значений $p_{\parallel rn}$, γ_{rn} и μ_{rn}:

$$\begin{aligned} \frac{k_\parallel p_{\parallel rn}}{m} + n\omega_c - \omega\gamma_{rn} = 0 \ , \\ \gamma_{rn} = C_n \ , \\ \mu_{rn} = mc^2(\gamma_{rn}^2 - 1 - p_{\parallel rn}^2/m^2c^2)/2\omega_c \ . \end{aligned} \tag{4.58}$$

Соотношения (4.58) определяют резонансные значения $p_{\parallel rn}$, γ_{rn} и μ_{rn} как функции только интеграла движения C_n, так что для частиц с заданным значением C_n коэффициент при $\cos\xi_n$ в уравнении для u_n оказывается постоянной величиной. В этом приближении систему уравнений (4.56) можно записать в виде:

$$\frac{d\xi_n}{dt} = u_n \ , \quad \frac{du_n}{dt} = -\frac{s}{\tau_n^2}\cos\xi_n \ , \tag{4.59}$$

где

$$\frac{1}{\tau_n^2} = \left|\frac{e|E|\omega}{mc\gamma_{rn}}\left(\frac{k_\parallel^2 c^2}{\omega^2} - 1\right)V_{rn}\right| , \quad s = \operatorname{sign}\left[\left(\frac{k_\parallel^2 c^2}{\omega^2} - 1\right)V_{rn}\right] . \tag{4.60}$$

Индекс “rn” в выражении V_{rn} означает, что входящие туда величины $p_\parallel$, γ и μ, а вместе с ними и $v_\parallel$ и $v_\perp$, следует заменить на их резонансные значения. Приведём выражение для гамильтониана, из которого можно получить уравнения (4.59):

$$h = \frac{u_n^2}{2} + \frac{s}{\tau_n^2}\sin\xi_n \ , \tag{4.61}$$

Поскольку гамильтониан не зависит явно от времени, то он является константой движения. Для удобства введём, наряду с $1/\tau_n^2$, также величину $1/\tau_{0n}^2$ согласно соотношению

$$\frac{1}{\tau_n^2} = \frac{1}{\tau_{0n}^2}\left|\frac{k_\parallel^2 c^2}{\omega^2} - 1\right| \ . \tag{4.62}$$

Система уравнений (4.59), с точностью до обозначений, совпадает с системой уравнений, описывающей резонансное взаимодействие электронов с ленгмюровской волной, подробно исследованной О’Нилом [126]. В частности, им было показано, что характерное значение величины u_n в резонансной области порядка $1/\tau_n$.

Из (4.59), (4.60) следует, что случай $k_\parallel^2 c^2/\omega^2 = 1$ является особым, так как при этом производная du_n/dt с принятой точностью равна нулю. Можно показать, что этот случай может реализоваться для МН волн. Так, на Рисунке 4.13 в виде цветового кода показан показатель преломления МН волны в логарифмическом масштабе на плоскости $(\theta, \omega/\omega_p)$. Данный рисунок соответствует соотношению $\omega_p = 2\omega_c$. На линии, показанной на рисунке зеленым цветом, выполняется соотношение $k_\parallel^2 c^2/\omega^2 = 1$. В этом особом случае для вычисле-

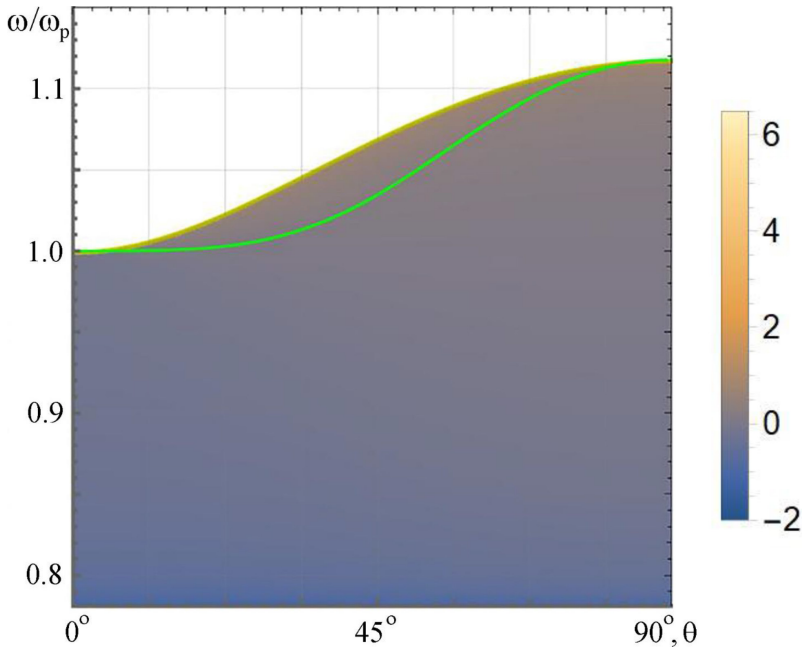


Рисунок 4.13 – Зависимость показателя преломления МН волн в логарифмическом масштабе от угла волновой нормали θ и нормированной частоты ω/ω_p при $\omega_p = 2\omega_c$

ния производной du_n/dt следует вернуться к точной системе уравнений (4.40), (4.45), которая даёт

$$\frac{du_n}{dt} = -\frac{e|E|\omega}{mc\gamma}\left(\frac{k_\parallel^2 c^2}{\omega^2} - 1\right)\left[\left(\frac{v_\parallel}{c}a_z + \frac{n\omega_c}{\gamma k_\perp c}\right)J_n(\rho) - \frac{v_\perp}{c}\frac{\varepsilon_2}{N^2-\varepsilon_1}J_n'(\rho)\right]\cos\xi_n + \\ + \frac{e|E|u_n}{mc\gamma}\left\{\left[\left(\frac{v_\parallel}{c}a_z + \frac{n\omega_c}{\gamma k_\perp c}\right)J_n(\rho) - \frac{v_\perp}{c}\frac{\varepsilon_2}{N^2-\varepsilon_1}J_n'(\rho)\right] + \frac{k_\parallel c}{\omega}a_z J_n(\rho)\right\}\cos\xi_n. \tag{4.63}$$

В настоящей диссертации не будет рассматриваться случай $|k_\parallel^2 c^2/\omega^2 - 1| \ll 1$. Точное уравнение для величины u_n в этом случае было приведено только для того, чтобы выяснить условия применимости уравнений (4.59). Сравнивая члены в правой части уравнения (4.63) и учитывая приведённые выше соотноше-

ния, находим, что вторым членом в (4.63) можно пренебречь при выполнении условий

$$|k_\parallel^2 c^2/\omega^2 - 1|^{1/2} \gg 1/\tau_0\omega \ , \quad |k_\parallel^2 c^2/\omega^2 - 1|^{1/2} \gg \gamma/n\tau_0\omega_c \ .$$

Отметим, что при $|k_\parallel^2 c^2/\omega^2 - 1| \ll 1$ резонанс $n = 0$ "не работает", так как в этом случае резонансная скорость близка к скорости света.

4.4 Резонансные условия и интегралы движения

В нерелятивистском случае резонансные условия $k_\parallel v_\parallel + n\omega_c - \omega = 0$ определяют продольную скорость частицы как функцию параметров волны, среды и номера резонанса, но не накладывают никаких ограничений на поперечную скорость частицы. В релятивистском случае резонансные условия (4.12), помимо продольного импульса, включают релятивистский фактор γ и, следовательно, зависят также от поперечного импульса. Рассмотрим этот вопрос более подробно. Запишем резонансные условия (4.12) в следующем виде:

$$\gamma = \frac{n\omega_c}{\omega} + \frac{k_\parallel}{\omega m} p_\parallel \ . \tag{4.64}$$

Выясним, когда эти условия совместимы с требованием

$$\gamma > \sqrt{1 + p_\parallel^2/m^2c^2} \ , \tag{4.65}$$

которое обеспечивает положительность магнитного момента μ. Для решения системы (4.64), (4.65) заметим, что неравенство (4.65) определяет область на плоскости $(p_\parallel, \gamma)$, причём кривая $\gamma = \sqrt{1 + p_\parallel^2/m^2c^2}$, ограничивающая эту область, не зависит ни от каких параметров. В то же время второе уравнение системы определяет прямую на плоскости $(p_\parallel, \gamma)$, которая пересекает ось γ в точке $n\omega_c/\omega$ и имеет положительный наклон к оси $p_\parallel/mc$, равный $k_\parallel c/\omega$. Отсюда ясно, что решение стстемы (4.64), (4.65) зависит от двух параметров и, следовательно, от четырёх их возможных комбинаций. Это решение может быть записано с помощью четырёх величин:

$$p_{\parallel 1,2} = mc \frac{-k_\parallel c\omega_c n \pm \omega\sqrt{n^2\omega_c^2 + k_\parallel^2 c^2 - \omega^2}}{k_\parallel^2 c^2 - \omega^2} \ , \tag{4.66}$$

$$\gamma_{1,2} = \frac{-\omega_c \omega n \pm k_\parallel c\sqrt{n^2\omega_c^2 + k_\parallel^2 c^2 - \omega^2}}{k_\parallel^2 c^2 - \omega^2} \,, \tag{4.67}$$

где в обоих случаях знаки $\pm$ перед корнем соответствуют индексам 1 и 2, соответственно. С помощью введённых величин $p_{\parallel 1,2}$, $\gamma_{1,2}$ решение системы (4.64), (4.65), которое определяет области значений $p_\parallel$ и γ, где, в зависимости от номера циклотронного резонанса и параметров волны, выполняются резонансные условия, может быть записано в виде

$$\begin{cases} n\omega_c/\omega > 1 \,, & k_\parallel c/\omega > 1 \,; & p_{\parallel 1} < p_\parallel < \infty \,, & \gamma_1 < \gamma < \infty \\ n\omega_c/\omega > 1 \,, & k_\parallel c/\omega < 1 \,; & p_{\parallel 1} < p_\parallel < p_{\parallel 2} \,, & \gamma_1 < \gamma < \gamma_2 \\ n\omega_c/\omega < 1 \,, & k_\parallel c/\omega > 1 \,; & p_{\parallel 1} < p_\parallel < \infty \,, & \gamma_1 < \gamma < \infty \\ 0 < n < \omega/\omega_c \,, & 1 - n^2\omega_c^2/\omega^2 < k_\parallel^2 c^2/\omega^2 < 1 \,; & p_{\parallel 1} < p_\parallel < p_{\parallel 2} \,, & \gamma_1 < \gamma < \gamma_2 \\ 0 < n < \omega/\omega_c \,, & k_\parallel^2 c^2/\omega^2 < 1 - n^2\omega_c^2/\omega^2 \,; & p_\parallel = [\,] \,, & \gamma = [\,] \\ n \le 0 \,, & k_\parallel c/\omega < 1 \,; & p_\parallel = [\,] \,, & \gamma = [\,] \end{cases} \tag{4.68}$$

Видно, что во всех случаях резонансные кривые на плоскости $(p_\parallel, \gamma)$ являются односвязными участками прямой со взаимно-однозначным соответствием между $p_\parallel$ и γ, определяемым уравнением (4.64). Резонансные линии на плоскости $(p_\parallel, \gamma)$ для четырёх случаев, указанных в (4.68) показаны на Рисунке 4.14. В первом и третьем случаях они представляют собой бесконечные лучи, во втором случае это конечный отрезок прямой линии, а в четвёртом случае условия резонанса вообще не могут быть выполнены.

Обсудим теперь более подробно законы сохранения (4.53). Первый закон сохранения не зависит от номера резонанса, в то время как два других относятся к конкретному резонансу, и должны бы были иметь дополнительный индекс n, который для краткости опущен. Как было указано выше, среди этих трёх интегралов движения в резонансной области только один является независимым. Покажем, например, как из первого интеграла (4.53) и резонансных условий (4.64) могут быть получены два других. В точке резонанса выполняются два условия: закон сохранения $p_\parallel - \frac{k_\parallel}{\omega} mc^2\gamma = C$ и резонансные условия $\omega\gamma/\omega_c - k_\parallel p_\parallel/m\omega_c = n$. Эти два уравнения позволяют выразить резонансные значения γ, $p_\parallel$ и, следовательно, μ через C, а также $k_\parallel, \omega$ и n в виде

$$\gamma = \frac{\omega}{m}\frac{k_\parallel C + mn\omega_c}{\omega^2 - k_\parallel^2 c^2} \,, \quad p_\parallel = \frac{\omega^2 C + nmc^2 k_\parallel \omega_c}{\omega^2 - k_\parallel^2 c^2} \,, \quad \mu = \frac{mc^2}{2\omega_c}\left(\gamma^2 - 1 - \frac{p_\parallel^2}{m^2c^2}\right) \,. \tag{4.69}$$

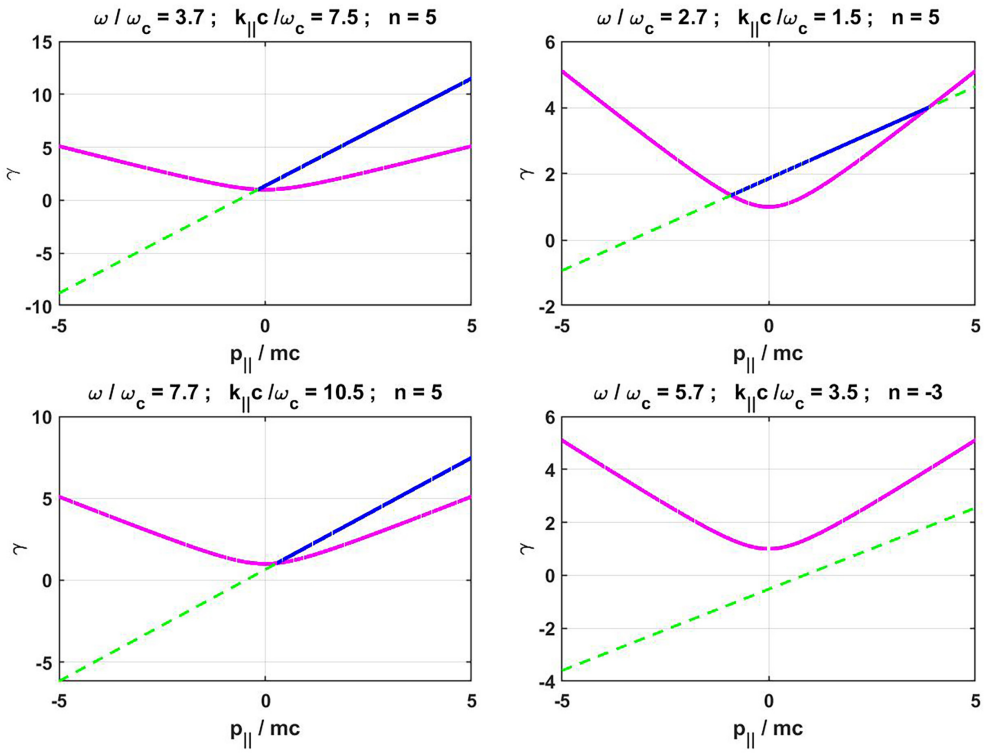


Рисунок 4.14 – Резонансные линии для различных комбинаций значений параметров волны и номера резонанса

Подставляя полученные значения в два других интеграла движения, получаем их значения в точке точного резонанса и, следовательно, во всей резонансной области. Элементарные алгебраические вычисления дают

$$C_1 = n\omega c^2 \frac{k_\parallel C + mn\omega_c}{\omega^2 - k_\parallel^2 c^2} - \frac{\omega}{2m\omega_c}\left(\frac{\omega^2 C^2 - n^2 m^2 c^2 \omega_c^2}{k_\parallel^2 c^2 - \omega^2} - 1\right),$$
$$C_2 = \frac{k_\parallel}{2m\omega_c}\left(\frac{\omega^2 C^2 - n^2 m^2 c^2 \omega_c^2}{k_\parallel^2 c^2 - \omega^2} - 1\right) - n\frac{\omega^2 C + nmc^2 k_\parallel \omega_c}{\omega^2 - k_\parallel^2 c^2}. \quad (4.70)$$

Рисунок 4.15 иллюстрирует тот факт, что существует только один независимый интеграл движения. На рисунке показана плоскость $(p_\parallel/mc, 2\mu\omega_c/mc^2)$, на которой двумя красными линиями изображены резонансные кривые, отвечающие номерам резонансов $n = 3$ и $n = 5$. Изолинии $c_i = \mathrm{const}_i$, отвечающие интегралам движения C, C_1, C_2 (4.53) и C_n (4.57), покрывают всю или часть плоскости $(p_\parallel/mc, 2\mu\omega_c/mc^2)$. Если выбрать постоянные const_i так, чтобы все соответствующие изолинии проходили через одну и ту же точку на резонансной кривой, то, как видно из рисунка, все эти изолинии сливаются вблизи резонансной точ-

ки, так что вблизи резонанса у частицы сохраняются все четыре интеграла движения. Это и означает, что лишь один из интегралов движения является независимым.

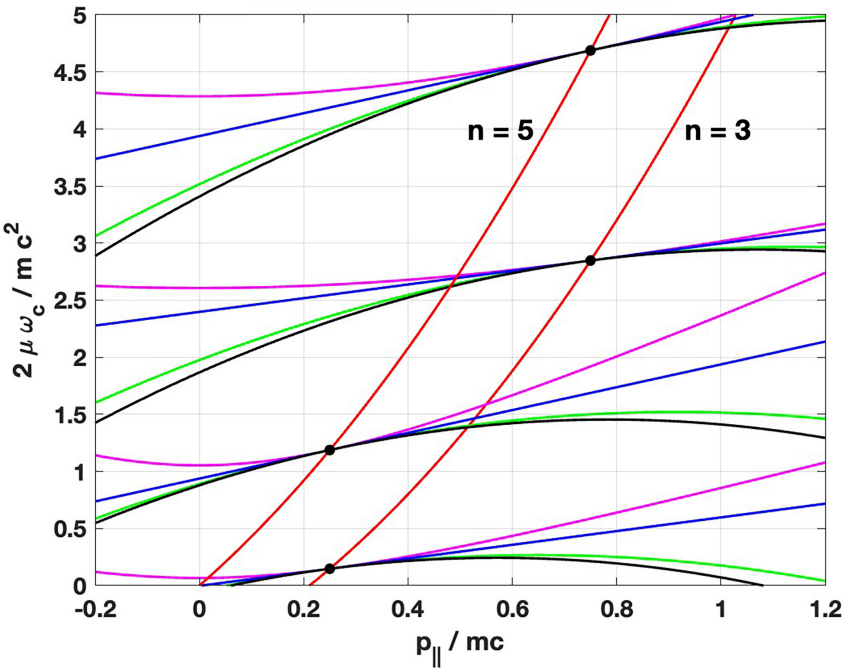


Рисунок 4.15 – Изолинии, соответствующие интегралам движения C, C_1, C_2 и C_n, проходящие через четыре резонансные точки на плоскости $(p_\parallel/mc, 2\mu\omega_c/mc^2)$, показаны зелёным, малиновым, синим и чёрным цветом, соответственно. Рисунок соответствует следующим параметрам: $k_\parallel c/\omega_c = 10, \omega/\omega_c = 5$

4.5 Условия применимости системы уравнений

Определим теперь область применимости системы уравнений (4.59). При переходе от точных уравнений к одномерной системе (4.59) было сделано два основных предположения: о применимости приближения изолированных резонансов и о возможности замены импульсов в правой части уравнения для u_n на их резонансные значения. Приближение изолированных резонансов справедливо тогда, когда при движении частицы, взаимодействующей с волной на n-ом циклотронном резонансе, в уравнениях (4.38) и (4.40) все члены в сумме по n, за исключением n-го, остаются быстро осциллирующими. Для частицы, взаимодей-

ствующей с волной на n-ом циклотронной резонансе $\omega\gamma_{rn}/\omega_c - k_\parallel p_{\parallel rn}/m\omega_c = n$. Очевидно, что приближение изолированных резонансов нарушается, если в процессе резонансного взаимодействия величины γ и $p_\parallel$ становятся такими, что начинает выполняться соотношение $(\omega\gamma/\omega_c - k_\parallel p_\parallel/m\omega_c) \sim (n \pm 1)$, так что $|\omega\Delta\gamma/\omega_c - k_\parallel \Delta p_\parallel/m\omega_c| \sim 1$. Учитывая, что согласно первому интегралу движения (4.53) величины $\Delta\gamma$ и $\Delta p_\parallel$ связаны соотношением $\Delta p_\parallel = \frac{k_\parallel}{\omega} mc^2\Delta\gamma$, получаем условие перекрытия резонансов в виде $|\Delta\gamma| \gtrsim |\omega\omega_c/(k_\parallel^2 c^2 - \omega^2)|$, так что приближение изолированных резонансов справедливо при выполнении условия

$$\Delta\gamma \ll \frac{\omega\omega_c}{|k_\parallel^2 c^2 - \omega^2|} \, . \tag{4.71}$$

Для отыскания соответствующего ограничения на амплитуду волны запишем связь между изменением величины $p_\parallel$ и величины u_n (изменение которой, как было указано выше, $\sim 1/\tau_n$), которая следует из (4.50), (4.59) и (4.60):

$$\Delta\gamma = \frac{\omega\gamma_{rn}}{k_\parallel^2 c^2 - \omega^2}\Delta u_n \sim \frac{\omega\gamma_{rn}}{|k_\parallel^2 c^2 - \omega^2|}\frac{1}{\tau_n} \, . \tag{4.72}$$

Из (4.71) и (4.72) следует условие применимости приближения изолированных резонансов в виде

$$\frac{\gamma_{rn}}{\omega_c\tau_n} \equiv \frac{\gamma_{rn}}{\omega_c\tau_0}\frac{|k_\parallel^2 c^2 - \omega^2|^{1/2}}{\omega} \ll 1 \, , \tag{4.73}$$

где τ_n и τ_0 определены в (4.60) и (4.62), соответственно.

Второе допущение, которое было сделано при переходе к системе (4.59) состояло в замене импульсов в правой части уравнения для u_n на резонансные значения, что справедливо, если относительное изменение этих величин достаточно мало. Для количественной оценки этого условия заметим, что интенсивность резонансного взаимодействия, помимо амплитуды волны, определяется величиной V_n в (4.52), которую можно назвать эффективной амплитудой взаимодействия на n-ом резонансе. Как было указано выше, в рассматриваемом нами случае резонансного взаимодействия электронов с МН волной в условиях $\omega_p^2 \gg \omega_c^2$ эффективным оказывается только взаимодействие на высоких циклотронных резонансах $n \gg 1$ с частицами, имеющими достаточно большую поперечную энергию, такую, что $\rho \equiv k_\perp(2\mu/m\omega_c)^{1/2} \gtrsim n$. Поскольку эффективная амплитуда взаимодействия определяется функциями Бесселя порядка $n, n-1$ и $n+1$ и поскольку при $\rho \gtrsim n \gg 1$ характерный масштаб изменения

функции Бесселя по аргументу ρ равен 2π, то для обоснованности замены импульсов на их резонансные значения необходимо, чтобы изменение величины ρ в резонансной области удовлетворяло условию $\Delta\rho \ll 2\pi$. Из второго соотношения (4.53) следует, что изменение величины μ в резонансной области связано с изменением величины γ соотношением $\Delta\mu = nmc^2\Delta\gamma/\omega$. С учётом выражения (4.72) для $\Delta\gamma$ получаем требуемое условие в виде

$$\frac{nk_\perp c^2\sqrt{m}}{\sqrt{2\mu\omega_c}\,|k_\parallel^2 c^2 - \omega^2|^{1/2}}\frac{\gamma_{rn}}{(\omega\tau_0)} \ll 2\pi\ . \tag{4.74}$$

4.6 Инкремент медленных необыкновенных волн

Далее в Главе 4 инкремент будет обозначаться большой буквой Г с верхними индексами, чтобы отличить его как от обозначений решения для квазиэлектростатических МН волн в случае каппа-распределения электронов (а также от гамма-функции), так и от резонансных значений релятивистского гамма-фактора. Общее выражение для нелинейного инкремента волны имеет вид (см., например, [111]):

$$\Gamma^{\rm NL} = -\frac{<\mathbf{j}_{\rm res}\cdot\mathbf{E}>}{2U}\ , \tag{4.75}$$

где $\mathbf{j}_{\rm res}$ – ток резонансных частиц, U – плотность энергии волны и $<\ldots>$ означает усреднение по периоду волны. Величина U берётся из формулы (1.27), где выражение для показателя преломления МН волн можно найти, например, в [90]. Однако, поскольку это выражение громоздко для подстановки в формулу (1.27), величину N^2 следует рассматривать там как параметр. Для численных расчётов можно использовать выражение из работы [90], а в случае $\omega_p > \omega_c$ следует использовать большее из двух значений N^2. Как будет видно ниже, полный инкремент определяется суммой вкладов в инкремент отдельных циклотронных резонансов:

$$\Gamma^{\rm NL} = \sum_{n=-\infty}^{\infty}\Gamma_n^{\rm NL}\ . \tag{4.76}$$

Хотя суммирование включает бесконечное число циклотронных резонансов, основной вклад в инкремент вносит конечное их количество n_r; данное количество и номера резонансов определяются характеристиками волны, плазмы и видом

функции распределения. Запишем инкремент (4.75), подставляя в него выражение для тока резонансных частиц в явном виде:

$$\Gamma^{\text{NL}} = \frac{e}{2U} < \int \delta f (\mathbf{v} \cdot \mathbf{E}) dp_{\parallel} p_{\perp} dp_{\perp} d\varphi > . \tag{4.77}$$

Входящая в это выражение величина $\delta f = f_{\text{res}} - f_0$ есть отклонение функции распределения от невозмущённого значения, а скорость $\mathbf{v}$, определяющая плотность тока, связана с релятивистским импульсом $\mathbf{p}$, по которому проводится интегрирование в (4.75), соотношением $\mathbf{v} = \mathbf{p}/m\gamma$. Здесь был совершён переход к цилиндрическим координатам в пространстве импульсов согласно соотношениям

$$p_x = p_{\perp} \cos\varphi, \quad p_y = p_{\perp} \sin\varphi, \quad p_z = p_{\parallel}, \tag{4.78}$$

и учтено, что невозмущённая функция распределения f_0 не вносит вклад в резонансный ток. Поскольку величина δf существенно отлична от нуля только вблизи резонансных областей фазового пространства, только эти области и вносят вклад в инкремент волны. Резонансные области, определяемые условиями $|u_n| \lesssim \tau_n^{-1}$, где u_n и τ_n определены в (4.55) и (4.60), соответственно, имеют наиболее простой вид на плоскости $(p_{\parallel}, \gamma)$. Эти области для нескольких циклотронных резонансов показаны на Рисунке 4.16. При выполнении условий изолированных резонансов эти области существенно отстоят друг от друга и разделены областями фазового пространства, в которых резонансное взаимодействие волны с частицами отсутствует. Рассмотрим вклад в инкремент от области, отвечающей n-ому циклотронному резонансу. Будем обозначать через ζ полную фазу волны (4.35)

$$\zeta = k_{\parallel} z + \rho \sin\varphi - \omega t + k_{\perp} x_0, \tag{4.79}$$

которая записана с учётом соотношений (4.36), (4.43). Перепишем (4.77), подставляя в него выражения для электрического поля (4.9), скорости $\mathbf{v} = \mathbf{p}/m\gamma$ через компоненты импульса (4.78) и вводя в явном виде усреднение по фазе волны ζ. В результате для вклада в инкремент от n-ого резонанса получим

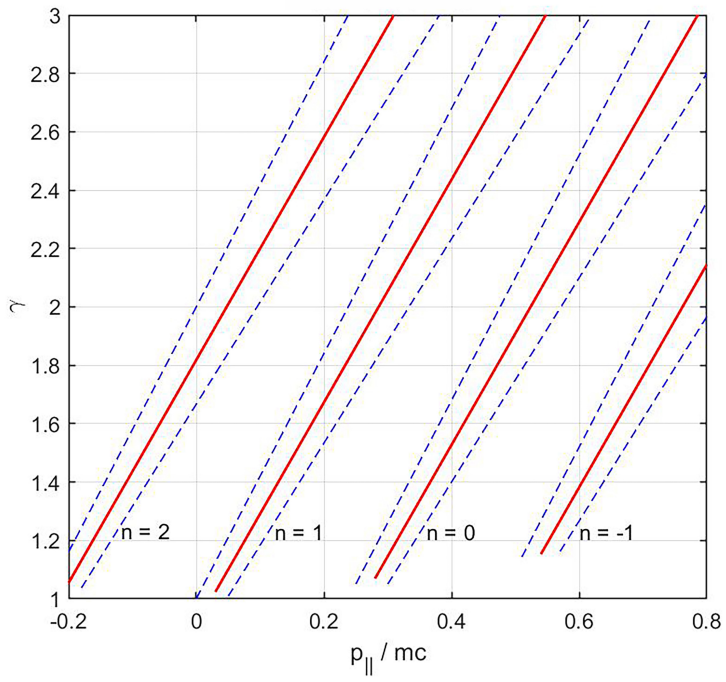


Рисунок 4.16 – Резонансные области для циклотронных резонансов $n = -1, 0, 1, 2$. Рисунок соответствует следующим параметрам: $k_{\parallel}c/\omega_c = 4.2, \omega/\omega_c = 1.1$

следующее выражение:

$$\Gamma_n^{\text{NL}} = \frac{e|E|}{2U}\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} d\zeta \int_{-\pi}^{\pi} d\varphi \int_{\Omega_n} dp_{\parallel} p_{\perp} dp_{\perp} \frac{\delta f_n}{m\gamma} \times$$
$$\times \left(p_{\perp}\cos\varphi\cos\zeta + p_{\perp}\sin\varphi\frac{\varepsilon_2}{N^2-\varepsilon_1}\sin\zeta + p_{\parallel}a_z\cos\zeta \right) , \tag{4.80}$$

где Ω_n – фазовый объём на плоскости $(p_{\parallel}, p_{\perp})$, отвечающий n-ому резонансу, а δf_n – соответствующее возмущение функции распределения резонансных частиц. Перейдем в (4.80) к новым угловым переменным

$$\varphi, \zeta \to \varphi, \xi_n = \zeta + n\varphi - \rho\sin\varphi \, . \tag{4.81}$$

Якобиан этого преобразования равен 1, а величина ξ_n совпадает с введённой ранее резонансной фазой (4.44). Выполняя в (4.80) интегрирование по гирофазе φ с использованием интегральных соотношений для функций Бесселя (см., например, [156]) получим

$$\Gamma_n^{\text{NL}} = \frac{e|E|c}{2U}\int_{\Omega_n} dp_{\parallel} p_{\perp} dp_{\perp} \int_0^{2\pi} d\xi_n V_n \cos\xi_n \delta f_n \, , \tag{4.82}$$

где V_n определено в (4.52). Величина δf_n в (4.82) существенно отлична от нуля только в резонансной области n-ого циклотронного резонанса. Поэтому с принятой точностью можно заменить в (4.82) величину V_n на V_{rn} из (4.60).

Как легко увидеть, при фиксированном интеграле движения частиц вблизи n-го резонанса уравнения движения в переменных ξ_n, u_n совпадают с уравнениями движения частиц в поле ленгмюровской волны, подробно исследованными в [126]. В этой же работе был вычислен нелинейный инкремент ленгмюровской волны и показано, что на малых временах $t \to 0$ этот инкремент совпадает с линейным. Указанная выше аналогия даёт возможность использовать результаты работы [126] для вычисления линейного инкремента МН волн. Для этого необходимо использовать какой-либо из интегралов движения, приведённых выше, имея в виду, что лишь один из них является независимым. Наиболее подходящим из них оказывается интеграл движения C (4.53):

$$C = p_\parallel - \frac{k_\parallel}{\omega} mc^2\gamma \tag{4.83}$$

Используя, наряду с (4.83), резонансные условия $u_n = 0$, где u_n определено в (4.55), получим резонансные значения γ и $p_\parallel$ как функции C в виде

$$\gamma_{rn} = \frac{\omega}{m}\frac{k_\parallel C + mn\omega_c}{\omega^2 - k_\parallel^2 c^2}\ , \quad p_{\parallel rn} = \frac{\omega^2 C + nmc^2 k_\parallel \omega_c}{\omega^2 - k_\parallel^2 c^2}\ . \tag{4.84}$$

Перейдем в (4.82) от интегрирования по $dp_\parallel dp_\perp$ к интегрированию по $dC du_n$. Вычисляя соответствующий якобиан преобразования, получим

$$p_\perp dp_\parallel dp_\perp = m^2c^2\gamma^2\omega\frac{dC du_n}{|k_\parallel^2 c^2 - \omega^2|}\ .$$

Здесь, с той же точностью, что и при замене V_n на V_{rn}, можно заменить γ^2 на γ_{rn}^2. Тогда из (4.82) получим

$$\Gamma_n^{\text{NL}} = \frac{e|E|m^2c^3\omega}{2U|k_\parallel^2 c^2 - \omega^2|}\int dC\gamma_{rn}^2 V_{rn}\int d\xi_n du_n \cos\xi_n \delta f_n\ . \tag{4.85}$$

В (4.85) интегрирование по $d\xi_n$ выполняется в пределах от 0 до 2π, а области интегрирования по du_n и dC будут определены ниже.

Будем считать, что невозмущённая функция распределения является функцией C и u_n: $f_0 = f_0(C, u_n)$. Согласно теореме Лиувилля и с учётом того,

что величина C является интегралом движения, можно написать

$$f = f_0[C, u_{n0}(t, \xi_n, u_n, C)] \ , \tag{4.86}$$

где $u_{n0}(t, \xi_n, u_n, C)$ – начальное значение величины u_n, выраженное через t, ξ_n, u_n, C из решений уравнения движения (4.59). Разлагая в (4.85) разность $f - f_0$ вблизи резонанса, то есть при $u_n = 0$, с точностью до членов первого порядка, и учитывая (4.86), получим

$$\Gamma_n^{\text{NL}} = \frac{e|E|m^2c^3\omega}{2U|k_\parallel^2 c^2 - \omega^2|} \times$$

$$\times \int dC \gamma_{rn}^2 V_{rn} \left(\frac{\partial f_0}{\partial u_n}\right)_{C, u_n=0} \int d\xi_n du_n \left[u_{n0}(t, \xi_n, u_n, C) - u_n\right] \cos\xi_n \ . \tag{4.87}$$

Основной вклад в интеграл по $d\xi_n du_n$, входящий в (4.87), вносит область $|u_n| \sim 1/\tau_n$ вблизи n-ого резонанса. Поскольку в рассматриваемом нами приближении изолированных резонансов ширина этой области намного меньше расстояния между резонансами $\Delta u_n = \omega_c/\gamma_{rn}$ (см. (4.73), можно распространить интеграл по du_n на область $(-\infty, \infty)$. Тогда этот интеграл, с точностью до обозначений, совпадает с интегралом, определяющим инкремент ленгмюровской волны, который был вычислен в работе [126].

Приведем краткий вывод соответствующей формулы. Запишем электрическое поле ленгмюровской волны, распространяющейся вдоль оси x, в виде

$$\mathcal{E} = \mathcal{E}_0 \cos(kx - \omega t) \ . \tag{4.88}$$

Вводя фазу волны $\xi = kx - \omega t$ и величину $u = k(v - \omega/k)$, пропорциональную отклонению скорости электрона от резонансного значения, получим уравнения движения частиц в виде

$$\frac{d\xi}{dt} = u \ , \quad \frac{du}{dt} = -\frac{1}{\tau^2}\cos\xi \ , \quad \frac{1}{\tau^2} \equiv \frac{e\mathcal{E}_0 k}{m} \ , \tag{4.89}$$

где учтено, что заряд электрона равен $-e$. Эти уравнения, с точностью до обозначений, совпадают с уравнениями движения электронов в поле МН волны в приближении изолированных резонансов (4.59).

Инкремент ленгмюровской волны определяется выражением

$$\Gamma_{\text{L}} = - < \frac{j_{res}\mathcal{E}}{2U_{\text{L}}} > \ , \tag{4.90}$$

где $U_{\text{L}} = \mathcal{E}_0^2/8\pi$ – плотность энергии ленгмюровской волны, и $< ... >$ означает усреднение по длине волны. Запишем выражение для $< j_{res}\mathcal{E} >$ в явном виде:

$$< j_{res}\mathcal{E} >= -\frac{ek}{2\pi}\int dvdx f_{res}(v\mathcal{E}) = -\frac{ek}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty} dv \int_0^{2\pi}(f_{res} - f_0)(v\mathcal{E})dx \ , \quad (4.91)$$

где f_0 – невозмущенная функция распределения. Вычитание невозмущенной функции распределения не изменяет значение интеграла, поскольку f_0 не зависит от координаты x, и соответствующий вклад, будучи умноженым на поле, усредняется при интегрировании по координате. Это вычитание, однако, даёт возможность разложить разность $(f - f_0)$ в резонансной области и распространить интегрирование по скорости на бесконечный интервал, поскольку вне резонансной области интеграл $\int_0^{2\pi}(f_{res} - f_0)(v\mathcal{E})dx$ стремится к нулю. Согласно теореме Лиувилля, $f = f_0(v_0) \equiv f_0(\omega/k + u_0/k)$, где $u_0(\xi, u, t)$ – начальное значение u, выраженное через текущие значения переменных из решения уравнений движения. Переходя от переменных (x, v) к переменным (ξ, u), разлагая разность $(f - f_0)$ в резонансной области с точностью до членов первого порядка по u и u_0, и подставляя $< j_{res}\mathcal{E} >$ и U в (4.90), получим выражение для инкремента ленгмюровской волны в следующем виде:

$$\Gamma_{\text{L}} = \frac{\omega_p^2\omega\tau^2}{2\pi n_0 k^2} f_0'\left(\frac{\omega}{k}\right)\int d\xi du[u_0(\xi, u, t) - u]\cos\xi \ , \quad (4.92)$$

где ω_p – электронная плазменная частота, n_0 – невозмущенная плотность плазмы, и введена величина τ^2, определённая в (4.89). Как показано в [126], при $t \to 0$ инкремент (4.92) переходит в линейный инкремент Ландау [97]:

$$\Gamma_{\text{LIN}} = \frac{\pi}{2}\frac{\omega_p^2\omega}{n_0 k^2} f_0'\left(\frac{\omega}{k}\right) \ . \quad (4.93)$$

Сравнивая (4.92) с (4.93), находим, что при $t \to 0$ этот интеграл равен

$$\int_{-\infty}^{\infty} du_n \int_0^{2\pi} d\xi_n \left[u_{n0}(t, \xi_n, u_n, C) - u_n\right]\cos\xi_n = \frac{\pi^2}{\tau_n^2} \ . \quad (4.94)$$

При этом, как было показано в работе [126], инкремент волны совпадает с линейным. Используя (4.94), находим, что вклад в линейный инкремент МН волны от n-ого циклотронного резонанса равен

$$\Gamma_n^{\text{Lin}} = \frac{\pi^2 e|E|m^2c^3\omega}{2U|k_\parallel^2c^2 - \omega^2|}\int dC\gamma_{rn}^2 V_{rn}\frac{1}{\tau_n^2}\left(\frac{\partial f_0}{\partial u_n}\right)_{C,u_n=0} \ . \quad (4.95)$$

Область интегрирования по переменной C в (4.95) определяется из условия $\gamma_{rn}(C) > (1 + p_{\parallel rn}^2/m^2c^2)^{1/2}$, которое гарантирует положительность величины поперечного импульса на резонансный кривой. Соответствующие выражения не будут здесь приводиться в явном виде, поскольку они не используются в дальнейшем.

Задание невозмущённой функции распределения в переменных C, u_n удобно для вывода выражения для инкремента. Однако, более наглядным является её представление в переменных $p_\parallel, \gamma$, в которых были проанализированы резонансные условия (см. (4.68). В переменных $p_\parallel, \gamma$ производная функция распределения, входящая в (4.95), принимает вид

$$\left(\frac{\partial f_0}{\partial u_n}\right)_C = \frac{\gamma_{rn}}{\omega(N_\parallel^2 - 1)} \left[\left(\frac{\partial f_0}{\partial \gamma}\right)_{p_\parallel} + mcN_\parallel \left(\frac{\partial f_0}{\partial p_\parallel}\right)_\gamma\right]_{u_n=0}, \qquad (4.96)$$

где $N_\parallel = k_\parallel c/\omega$, и индекс $u_n = 0$ означает, что все величины берутся на резонансной прямой, то есть при $\gamma = \gamma_{rn}$ и $p_\parallel = p_{\parallel rn}$. Согласно выводу, интегрирование по dC в (4.95) идёт по резонансной кривой в направлении возрастания C, из-за чего якобиан в (4.95) берётся по абсолютной величине. На резонансной прямой γ и $p_\parallel$ являются однозначными функциями C, определяемыми соотношениями (4.84), поэтому можно перейти к интегрированию по любой из них. Однако, если перейти к интегрированию по $d\gamma$, то этот переход невозможен в случае $k_\parallel = 0$, который не хотелось бы исключать из рассмотрения. (При $k_\parallel = 0$ интервал интегрирования по $d\gamma$ сжимается в точку (см. (4.68)), а якобиан перехода обращается в бесконечность). Поэтому перейдем к интегрированию по $dp_\parallel$ с помощью соотношения

$$dC = |N_\parallel^2 - 1| dp_\parallel \, . \qquad (4.97)$$

Знак абсолютной величины в (4.97) обеспечивает интегрирование по $dp_\parallel$ в направлении возрастания $p_\parallel$. Подставляя (4.96), (4.97) в (4.95), и используя соотношение (4.62), получим

$$\Gamma_n^{\text{Lin}} = \frac{\pi^2 e^2 |E|^2 mc^2}{2\omega U} \int_{p_{\parallel min}}^{p_{\parallel max}} dp_\parallel \gamma_{rn}^2 V_{rn}^2 \left[\left(\frac{\partial f_0}{\partial \gamma}\right)_{p_\parallel} + mcN_\parallel \left(\frac{\partial f_0}{\partial p_\parallel}\right)_\gamma\right]_{u_n=0}, \qquad (4.98)$$

где $p_{\parallel min}$ и $p_{\parallel max}$ для каждого случая определены в (4.68). Выражение (4.98) определяет вклад в инкремент от n-ого циклотронного резонанса. Полный же

линейный инкремент равен сумме по всем циклотронным резонансам, аналогичной (4.76).

Количественный анализ инкремента МН волн на основе приведённых выше формул может стать предметом дальнейших исследований. Здесь же ограничимся указанием некоторых типичных значений параметров МН волн вне плазмопаузы на L-оболочках $\sim 4-5$ в экваториальных широтах. В этой области электронная циклотронная частота $\nu_c \sim 10-35$ кГц, а отношение ν_p/ν_c варьируется в диапазоне $\sim 3-7$. Поскольку это отношение превышает 1, частоты МН волн $\nu_p \sim 70-230$ кГц. Максимальные значения инкремента МН волн в указанной области приведены в работе [158] и составляют порядка $50-350$ Гц. Эти значения были получены для квазиэлектростатических МН волн при допущении κ-распределения энергичных электронов и хорошо согласуются с результатами, полученными в работе [82].

4.7 Выводы к Главе 4

МН волны играют значительную роль в динамике частиц плазмосферы Земли. Кроме того, при рассеянии на мелкомасштабных неоднородностях плотности, данные волны могут возбуждать О-моду, непосредственная генерация которой мало эффективна вследствие малой величины показателя преломления О-моды. Верхнегибридные волны, которые представляют собой одно из наиболее часто наблюдаемых волновых явлений в магнитосфере Земли, распространяются в МН моде. Эти волны имеют достаточно большой показатель преломления и могут эффективно взаимодействовать с энергичными частицами в околоземной плазме. В то же время, характерные значения показателя преломления МН волн значительно меньше, чем, например, у свистовых волн, а характерные резонансные скорости значительно выше, особенно для больших углов волновой нормали, типичных для МН волн. Это вызывает необходимость учитывать релятивистские эффекты в резонансном взаимодействии МН волн и электронов, что является центральным моментом в настоящей главе.

Во втором параграфе данной главы представлен подробный анализ генерации МН волн в случае, когда распределение энергичных электронов имеет

вид κ-функции с конусом потерь. В релятивистском случае получена формула для линейного инкремента МН волн с учётом неоднородности плазмы и внешнего магнитного поля. Решение опирается на закон сохранения энергии в системе волна – кинетическая энергия резонансных электронов, а энергия волны включает как энергию электромагнитного поля, так и колебательную энергию нерезонансных электронов. Подтверждено, что максимальный инкремент наблюдается вблизи экватора, на частотах вблизи ω_{UH} и при θ вблизи 90°. Наблюдается квазипериодическая зависимость инкремента МН волн от относительной частоты ω/ω_c с максимумами вблизи гармоник электронной циклотронной частоты $\omega \simeq n\omega_c$. Этот факт объясняется тем, что в данном случае резонансный импульс, отвечающий n-ому циклотронному резонансу, имеет наименьшее по модулю значение. Так как κ-распределение убывает с увеличением продольного импульса, то число резонансных электронов увеличивается с уменьшением импульса. В результате добавка в инкремент именно от n-го циклотронного резонанса превалирует над вкладами от других циклотронных резонансов. Обнаружена также немонотонная зависимость максимального инкремента МН волны от анизотропии функции распределения.

Основными результатами последующих параграфов данной главы являются вывод и анализ уравнений движения релятивистских электронов в поле МН волны, распространяющейся под произвольным углом к внешнему магнитному полю, детальный анализ резонансных условий и интегралов движения резонансных частиц и вычисление на этой основе линейного инкремента МН волн с учетом релятивистских эффектов. Это вычисление основано на выявленном подобии уравнений движения релятивистских электронов в поле МН волны в приближении изолированных резонансов и уравнений движения электронов в поле электростатической ленгмюровской волны в изотропной плазме. Это подобие нарушается, когда продольная компонента волнового вектора и частота МН волны связаны соотношением $k_{\parallel}c \simeq \omega$. В этом случае задача требует особого рассмотрения.

Результаты данной главы были получены в приближении заданного поля. Коснёмся вопроса, как эти результаты соотносятся с результатами, полученными с помощью более традиционного линейного подхода. Наиболее часто используемое выражение для линейного инкремента (см., например, [82; 161]) основано

на выражении, приведённом в классической работе [162]. Это выражение содержит двойной интеграл по параллельным и перпендикулярным импульсам, а подынтегральная функция содержит δ-функцию, связанную с условиями резонанса. Как было видно выше, определение области на плоскости $(p_\parallel, p_\perp)$ или, альтернативно, на плоскости $(p_\parallel, \gamma)$, где аргумент δ-функции может быть равен нулю, далеко не тривиально. Полученное же выражение содержит один интеграл со строго определёнными пределами интегрирования. Помимо этого, получено выражение для линейного инкремента как предел нелинейного инкремента в моменты времени t, значительно меньшие, чем нелинейное время τ^{NL}, а также получено выражение для τ^{NL}. Знание нелинейного времени важно, поскольку оно позволяет оценить конечную амплитуду волны из соотношения $\Gamma^{\text{Lin}}\tau^{\text{NL}} \sim 1$.

Дополнительно отметим, что представление о том, что нелинейный инкремент переходит в линейный при $t \to 0$, восходит к работе [126]. Причина этого очевидна: в малые времена уравнения движения частиц, составляющие характеристический набор кинетических уравнений, могут быть решены в линейном приближении, т.е. путём подстановки невозмущённых траекторий в правые части уравнений. Таким образом, функция распределения в линейном приближении совпадает с функцией распределения, полученной в приближении заданного поля. То же самое справедливо для резонансного тока частиц и, следовательно, для инкремента, определяемого им.

Глава 5. Объяснение спектральных особенностей верхнегибридных волн, наблюдавшихся на спутниках Van Allen Probes

Частота верхнегибридного резонанса (ВГР) определяется электронной плазменной частотой и электронной гирочастотой, которые являются фундаментальными параметрами космической плазмы. Верхнегибридные волны (МН волны вблизи частоты ВГР) являются одним из наиболее распространённых волновых явлений в околоземной плазме. Глава 5 опирается на экспериментальные данные, полученные спутниками Van Allen Probes (VAP), по измерению волн и дифференциальных потоков энергичных частиц. Цель данной главы — исследовать механизм генерации верхнегибридных волн, в частности, прояснить, могут ли эти волны возбуждаться посредством резонансного взаимодействия с энергичными электронами на циклотронных резонансах высокого порядка. Для этого будут использованы теоретические результаты, представленные в Главе 4. Поскольку верхнегибридные волны имеют относительно малую групповую скорость, эффекты распространения не должны играть важной роли в эволюции спектра этих волн. Таким образом, спектр, наблюдаемый в данной точке, должен быть тесно связан с инкрементом волн в той же точке. В данной главе будет рассчитан линейный инкремент верхнегибридных волн вдоль траектории спутника Van Allen Probe, используя зарегистрированные параметры плазмы и плотность энергичных электронов, полученную из измерений дифференциальных потоков [158]. Помимо плотности горячей плазмы, используются другие параметры модельной функции распределения, совместимые с измерениями, но не выводимые непосредственно из них.

5.1 Излучение вблизи верхнего гибридного резонанса на спектрограммах Van Allen Probes

В то время как измерения электронной гирочастоты на борту спутников просты и точны, измерения электронной плазменной частоты и связанной с

ней электронной концентрации менее надёжны. Поскольку точность измерений частоты верхнегибридного резонанса (ВГР), как правило, выше, чем точность измерений электронной плотности, последнюю обычно выводят из первой [79; 163]. Особенность верхнегибридных волн заключается в том, что их интенсивность значительно возрастает, когда верхнегибридная частота равна целому кратному электронной гирочастоты. Объяснение этой особенности предполагает, что волны с частотой вблизи верхнегибридной частоты возбуждаются за счёт электронной циклотронной неустойчивости при циклотронных резонансах высокого порядка. Когда вышеупомянутые условия выполняются, число резонансных частиц резко возрастает. Затем, если распределение электронов неустойчиво, то оно обладает свободной энергией. В результате, резонансные электроны генерируют верхнегибридные волны за счёт своей кинетической энергии. Поскольку этот процесс наиболее эффективен, когда верхнегибридная частота кратна гирочастоте электронов, интенсивность возбуждённых волн в этом случае максимальна.

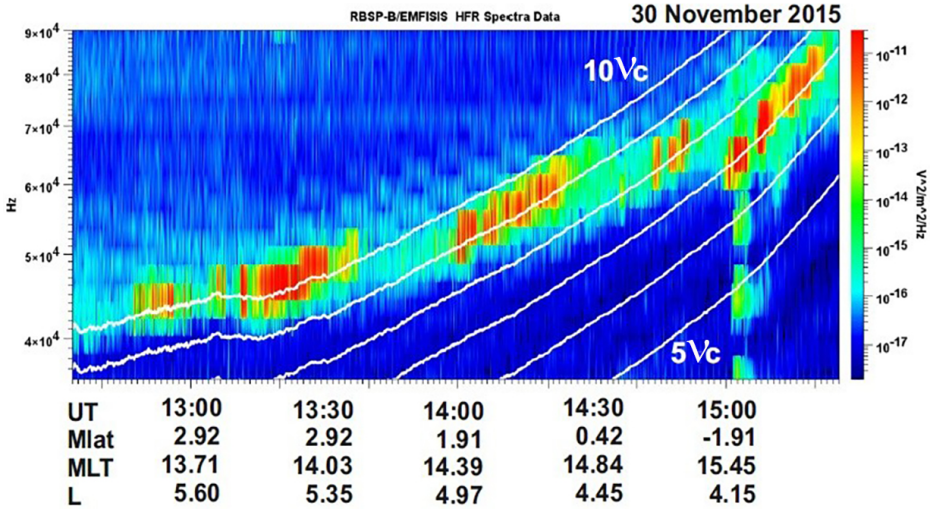


Рисунок 5.1 – Частотно-временная спектрограмма данных высокочастотного приёмника, включая диапазон вблизи верхнего гибридного резонанса. Данные были получены спутником Van Allen Probe B 30 ноября 2015 года, когда спутник переместился в сторону нижних L-оболочек. Белые линии изображают электронные циклотронные гармоники с 5-й по 10-ю

(Напомним, что здесь экспериментальные данные фиксируются в обычных частотах $\nu = \omega/2\pi$, измеряемых в Герцах.) На Рисунках 5.1, 5.2 и 5.3 показаны примеры обзорных спектрограмм электрического поля волн в частотном

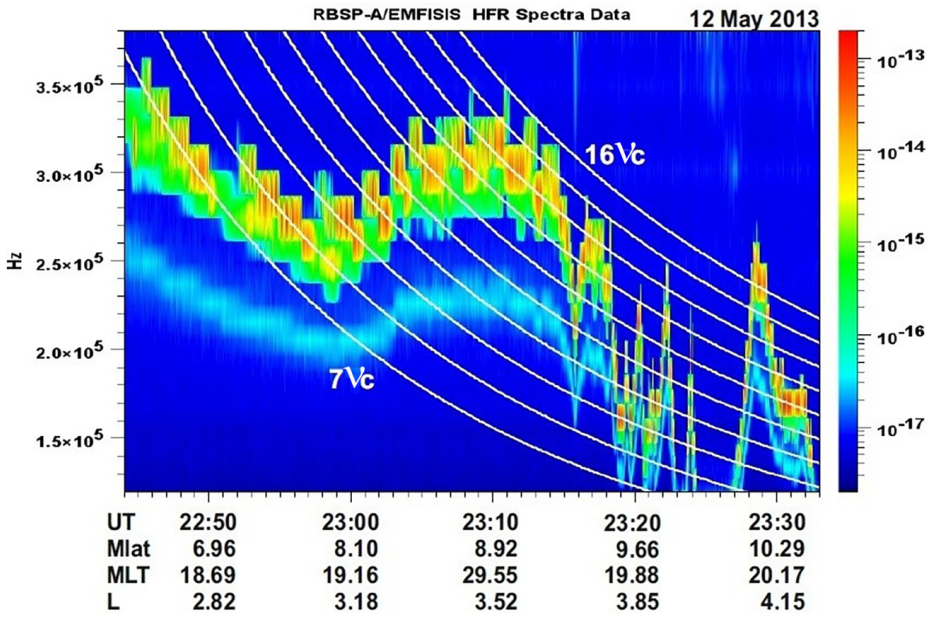


Рисунок 5.2 – Частотно-временная спектрограмма данных высокочастотного приёмника, включая диапазон вблизи ВГР, зарегистрированных спутником VAP A 12 мая 2013 года, когда спутник переместился из плазмосферы в сторону более крупных L-оболочек. Белыми линиями обозначены электронные циклотронные гармоники с 7-й по 16-ю

диапазоне от 20 до 450 кГц, полученных высокочастотным приемником (HFR) на спутниках Van Allen Probes (VAP). Орбитальные данные под спектрограммами содержат информацию о движении спутника в момент записи спектрограмм. Спектрограмма, показанная на Рисунке 5.3, соответствует части орбиты, проанализированной в статье [79], посвящённой проблеме определения плотности электронов по спектрам плазменных волн, полученным прибором Waves на спутниках Van Allen Probes. За время, показанное на последней спектрограмме, спутник переместился с L-оболочки $L = 6.23$ в сторону нижних L-оболочек $L \simeq 3$. Верхнегибридная частота увеличивается с 30 кГц до 450 кГц по мере приближения спутника к нижним L-оболочкам. В интервале времени с 03:35 UT до 04:45 UT наблюдаются сильные крупномасштабные вариации верхнегибридной частоты, связанные с вариациями плотности плазмы N_e. После 04:45 UT вариации частоты ν_{UH} и соответствующие вариации N_e имеют меньшие пространственные масштабы, в то время как интенсивность верхнегибридного излучения увеличивается более чем на два порядка. Далее будет подробно проанализовано высокоинтенсивное излучение верхнегибридных волн в интервале времени с

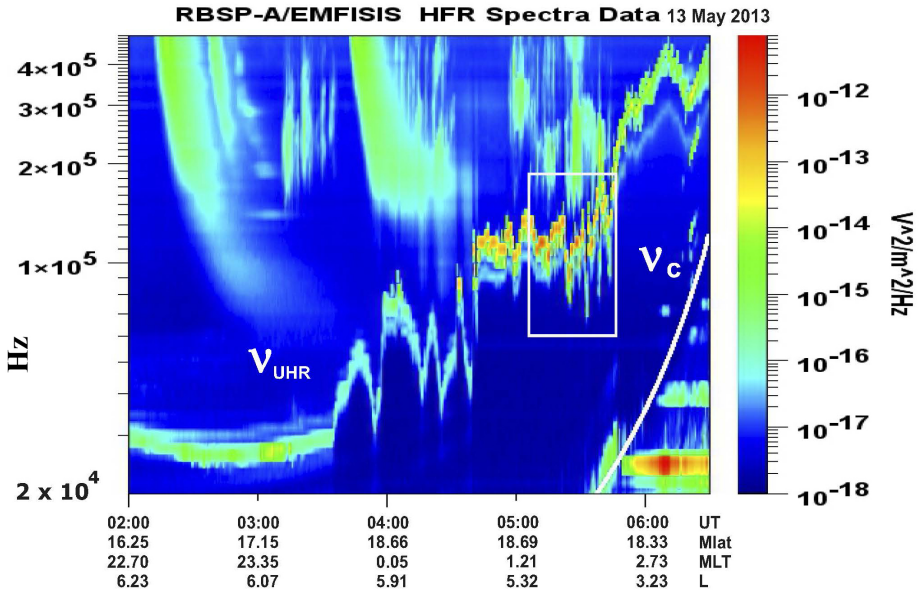


Рисунок 5.3 – Частотно-временная спектрограмма данных высокочастотного приёмника, показывающая излучение вблизи верхнего гибридного резонанса. Данные были получены с помощью VAP A 13 мая 2013 года с 02:00 до 06:30 UT. Электронная циклотронная частота показана белой линией

05:10 до 05:45 UT, отмеченном белым прямоугольником на Рисунке 5.3. Важная особенность, наблюдаемая на всех спектрограммах, заключается в том, что интенсивность излучения верхнегибридных волн значительно возрастает, когда верхнегибридная частота равна или близка к целым кратным электронно-циклотронной частоты, т.е. близка к электронно-циклотронным гармоникам. Предполагается, что волны, формирующие это излучение, возбуждаются за счёт циклотронной неустойчивости на циклотронных резонансах высокого порядка. Следующий параграф посвящён доказательству этого предположения.

5.2 Спектрограммы и инкремент верхнегибридных волн

Для рассматриваемых МН волн максимальный инкремент достигается вблизи резонансной частоты ω_{r1} (см. (1.19)) и, фактически, при углах волновой нормали, близких к 90°, то есть при частотах, близких к ω_{UH} (см. [151]). Это происходит потому, что вблизи резонансных частот величина волнового вектора значительно возрастает, что приводит к значительному уменьшению резонанс-

ной скорости. Для большинства типов распределения энергичных электронов это связано с заметным увеличением числа резонансных частиц. С другой стороны, при больших значениях волнового вектора и, следовательно, больших значениях показателя преломления волны являются квазиэлектростатическими [28]. Общее выражение для линейного инкремента квазиэлектростатической МН волны приведено, например, в [151]. Инкремент включает в себя сумму вкладов от всех циклотронных резонансов. В релятивистском случае условия резонанса имеют вид (4.12). При условии, что невозмущенная функция распределения выражается через модуль релятивистского импульса p, а магнитный момент определяется выражением (4.3), для L-оболочки выражение для линейного инкремента принимает вид (4.26), где после дифференцирования величины μ и p во всех выражениях под знаком интеграла заменяются их резонансными значениями, определяемыми выражениями (4.28) и (4.12). Дальнейшее рассмотрение основано на данных регистрации излучения верхнегибридных волн спутником Van Allen Probe A с помощью прибора EMFISIS [21], а также на измерениях потока электронов двумя приборами: HOPE [164] и MagEIS [147]. Эти два прибора работали в двух разных, лишь незначительно перекрывающихся, энергетических диапазонах: от 15 эВ до 51,8 кэВ (HOPE) и от 30 кэВ до 4 МэВ (MagEIS).

Анализируемая спектрограмма, являющаяся частью спектрограммы из Рисунка 5.3, показана на Рисунке 5.4. Белые линии на спектрограмме отмечают гармоники электронной циклотронной частоты, от пятой до десятой. Чётко видно, что спектральная интенсивность излучения верхнегибридных волн значительно возрастает на частотах вблизи гармоник электронной циклотронной частоты. Хотя вся полоса видимых на спектрограмме МН волн простирается от частоты отсечки ν_{cut} (см. (1.18)) до верхнегибридной частоты ν_{UH}, её верхняя часть, прилегающая к ν_{UH}, является наиболее интенсивной, что согласуется с расчётами инкремента (см. Главу 4). Предполагается, что наблюдаемые верхнегибридные волны возбуждаются электронной циклотронной неустойчивостью при циклотронных резонансах высокого порядка $n \sim \nu_{\text{UH}}/\nu_c$ в областях, где отношение ν_{UH}/ν_c близко к целому числу. Простой способ проверить это предположение — рассчитать линейный инкремент МН волн, используя функцию распределения, полученную из дифференциальных потоков энергичных элек-

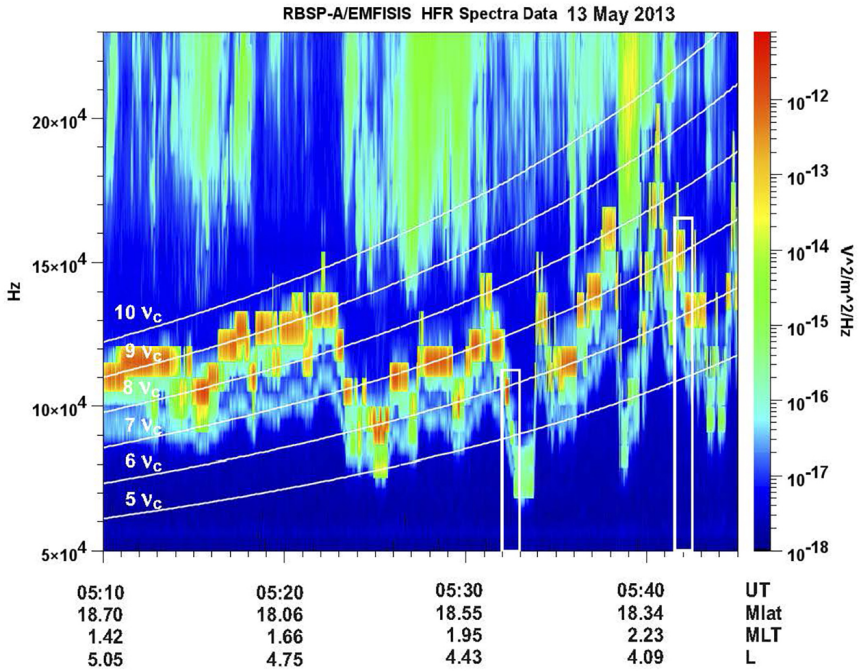


Рисунок 5.4 – Эта часть спектрограммы, взятой из Рисунка 5.3, отображает интервал времени 05:10–05:40 UT

тронов, доступных из измерений спутников Van Allen Probes. Как известно, функция распределения может быть выражена через дифференциальный поток частиц [135; 165]. Если функция распределения f_0 выражена в единицах СГС и нормирована по (4.2), а поток J выражен в практических единицах, т. е. $1/(\text{см}^2 \cdot \text{с} \cdot \text{ср} \cdot \text{кэВ})$, то соотношение между f_0 и J имеет следующий вид:

$$f_0 = 4.2926 \cdot 10^{44} \frac{J}{W(1+\gamma)} \tag{5.1}$$

независимо от используемых переменных для функции распределения. Здесь W – кинетическая энергия частицы в кэВ, а γ, как и прежде, – релятивистский фактор Лоренца.

Трудность реализации этой цели — расчёта инкремента с использованием функции распределения, выведенной из измерений дифференциального потока электронов, — заключается в следующем. Как было показано в работе [151], форма функции распределения вблизи конуса потерь оказывает решающее влияние на инкремент волн вторичного электронного излучения. В то же время измерения потока именно при этих углах наклона часто дают неудовлетворительные результаты. Чтобы преодолеть эту трудность, поступим следующим образом. Выбираем модельную функцию распределения энергичных электро-

нов в виде κ-распределения с конусом потерь, такую же, как в работе [151], и выбираем параметры этой функции распределения таким образом, чтобы они наилучшим образом соответствовали измерениям. κ-распределение с конусом потерь для нерелятивистского однородного случая было предложено [155] и обобщено на релятивистский неоднородный случай [151]. В однородном случае распределение имеет вид (4.1) с нормировкой (4.2), где n – концентрация энергичных электронов, которая в случае однородной плазмы не зависит от координат. При обобщении этого выражения на случай неоднородной плазмы учитывалось, что функция распределения должна зависеть только от интегралов движения, в качестве которых были выбраны модуль релятивистского импульса p (релятивистский гамма-фактор $\gamma = \sqrt{1 + p^2/(mc)^2}$), магнитный момент (4.3) и L-оболочка. В этих переменных выражение для функции распределения принимает вид (4.4), (4.5), где ω_{ceq} – экваториальная электронная циклотронная частота. Величина $A_\text{т}$ характеризует анизотропию распределения относительно $p^2_{\perp\text{т}}$ и $p^2_{\parallel\text{т}}$, подробно описанную в Главе 4 настоящей диссертации. Зависимость экваториальной концентрации n_{eq} от L была указана явно, хотя все остальные параметры функции распределения также могут зависеть от L. Причина этого в том, что в дальнейшем моделировании эта зависимость наиболее выражена, в то время как другие параметры распределения зависят от L гораздо меньше. Следует отметить, что среди параметров функции распределения, перечисленных после (4.4), только два являются независимыми, в то время как третий, например, $\mu_\text{т}$, может быть выражен через $p^2_{\parallel\text{т}}$ и $A_\text{т}$.

Уточним параметры функции распределения модели, которые выбираются на основе измеренных дифференциальных потоков. Будем использовать эти параметры при расчёте инкремента вдоль орбиты спутника Van Allen Probe A 13 мая 2013 года, с 05:10 до 05:48 UT. Прежде всего, это концентрация энергичных электронов $n^{(h)}$, которая рассчитана на основе измерений потока электронов в девяти точках вдоль орбиты и интерполирована по всей траектории спутника. Эта величина варьируется от $\sim 0,3$ см$^{-3}$ до $\sim 0,6$ см$^{-3}$. Другие параметры функции распределения считаются постоянными вдоль орбиты. Эти параметры совместимы, но не выводятся непосредственно из измерений и, следовательно, в значительной степени должны рассматриваться как модельные.

Они следующие:

$$\kappa = 2\,, \quad l = 1\,, \quad p^2_{\parallel \text{т}} = 0.025 \cdot (mc)^2\,, \quad p^2_{\perp \text{т}} = 0.05 \cdot (mc)^2\,, \quad A_\text{т} = 1\,. \qquad (5.2)$$

Используя функцию распределения с указанными выше параметрами, а также измеренные параметры холодной плазмы и внешнего магнитного поля, рассчитываем инкремент МН волн вдоль орбиты спутника с помощью (4.26). В каждой точке инкремент является функцией частоты и угла волновой нормали. Находим абсолютный максимум инкремента в каждой точке, т. е. максимум по ν и θ. Именно такое значение отображается на последующих рисунках. На

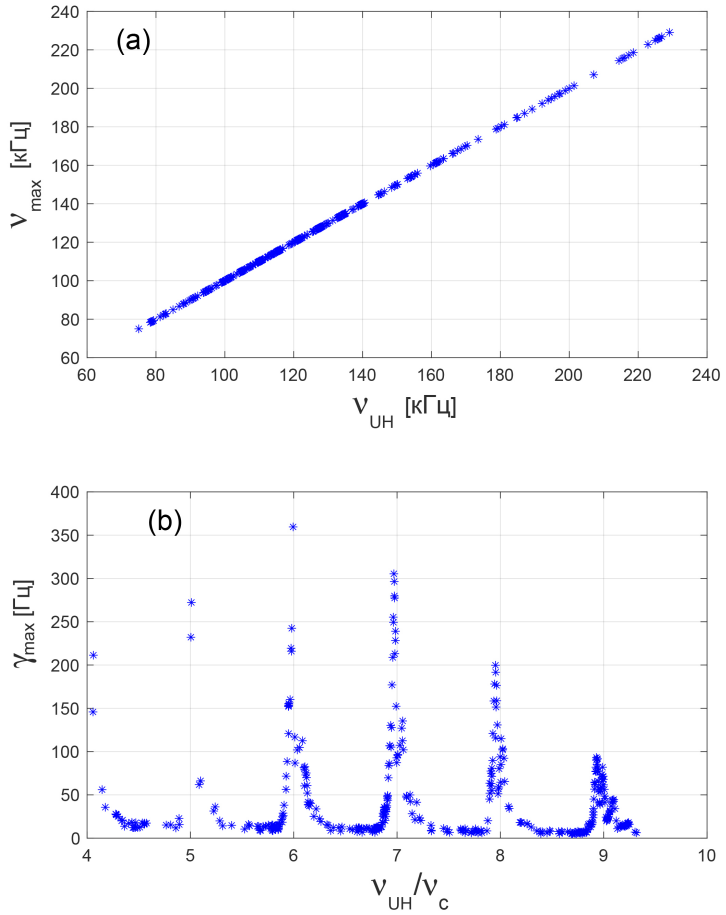


Рисунок 5.5 – (a) Частота, соответствующая абсолютному максимуму инкремента относительно частоты волны и угла волновой нормали, как функция верхнегибридной частоты ν_{UH}. (b) Максимальный инкремент на орбите спутника, параметризованный величиной ν_{UH}/ν_c

Рисунке 5.5 (a) показана частота волны, соответствующая максимуму инкремента, как функция ν_{UH}. Поскольку последняя величина не изменяется монотонно вдоль орбиты спутника, эта зависимость не может быть представлена в

виде непрерывного графика и показана звёздочками. Видно, что во всех случаях максимальный инкремент достигается, когда ν близка к ν_{UH}, что возможно только если угол θ близок к $\pi/2$. Таким образом, максимальный инкремент всегда соответствует волнам, распространяющимся почти поперечно внешнему магнитному полю.

Максимальное значение инкремента на орбите спутника как функция отношения ν_{UH}/ν_c показано на Рисунке 5.5 (b). По той же причине, что и выше, этот график снова показан звёздочками. Чётко видно, что максимумы инкремента соответствуют точкам на орбите спутника, где частота верхнего гибридного резонанса близка к гармоникам гирочастоты, что полностью соответствует спектральной интенсивности верхнегибридных волн, зарегистрированных спутником Van Allen Probe A (см. Рисунок 5.4). Это утверждение становится очевидным, если рассмотреть спектрограмму, показанную на Рисунке 5.6. Здесь

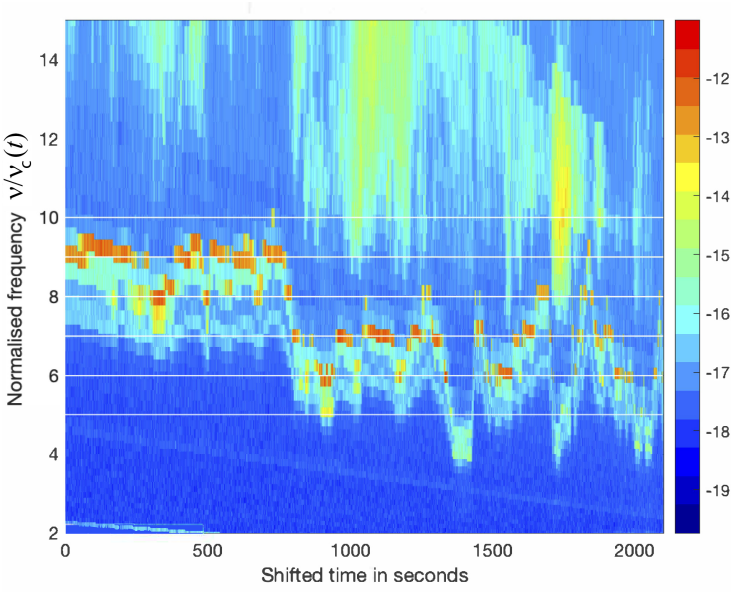


Рисунок 5.6 – Нормированные спектрограммы: в каждый момент времени частота на спектрограмме нормируется на локальную циклотронную частоту $\nu_c(t)$, измеренную в соответствующий момент времени t

показан тот же временной интервал, что и на Рисунке 5.4, но в каждом сегменте времени частота на спектрограмме нормирована на локальную циклотронную частоту $\nu_c[\mathbf{r}_s(t)]$, где $\mathbf{r}_s(t)$ обозначает координату спутника как функцию времени. Нет сомнений в том, что максимумы спектральной интенсивности сконцентрированы на целых кратных электронной циклотронной частоты.

Другой способ продемонстрировать этот ключевой результат наблюдений представлен на Рисунке 5.7, на котором показан максимальный инкремент на орбите спутника как функция времени (левая ось ординат) вместе с отношением ν_{UH}/ν_c (правая ось ординат). Видно, что каждый максимум инкремента

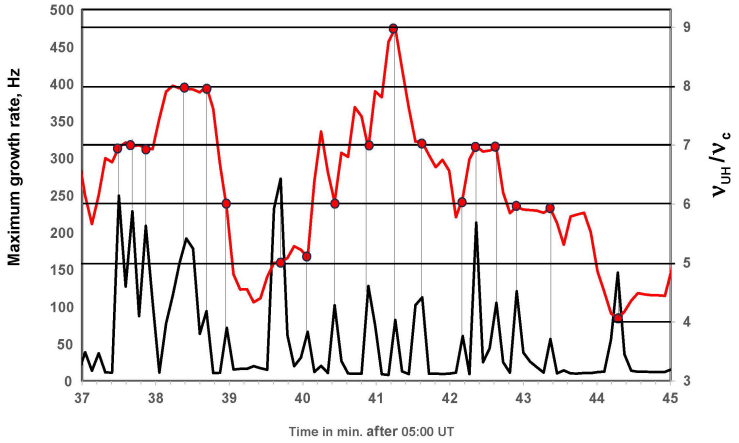


Рисунок 5.7 – Максимальный инкремент (чёрная линия) и отношение ν_{UH}/ν_c (красная линия) на орбите спутника Van Allen Probe A как функции времени

достигается в момент времени, когда верхнегибридная частота равна или близка к целому кратному электронной циклотронной частоты, т. е. $\nu_{\text{UH}} = n\nu_c$, где n – целое число; эти моменты отмечены красными точками на кривой $\nu_{\text{UH}}(UT)$. На рассматриваемой орбите спутника максимальный инкремент соответствует показателю преломления $N = 11,69$ и частоте волны $\nu = 93,79$ кГц. Другие параметры, соответствующие максимальному инкременту, следующие: $\nu_c = 15,65$ кГц, $\nu_p = 92,47$ кГц. Возникает вопрос, следует ли учитывать тепловые поправки к дисперсионному соотношению и, следовательно, к показателю преломления. Как показывает анализ, тепловые поправки к показателю преломления МН волн малы при условии:

$$N < \left(\frac{c}{v_T}\frac{\nu_c}{\nu_p}\right)^{1/2},$$

где v_T – тепловая скорость «холодной» плазмы. При тепловой энергии ~ 1 эВ и $\nu_p/\nu_c = 10$, что является максимальным значением, которое рассматривается, при этом, с учётом самого жесткого ограничения, имеем $N < 22,5$. Таким образом, в рассматриваемом случае использование дисперсионного соотношения холодной плазмы вполне приемлемо.

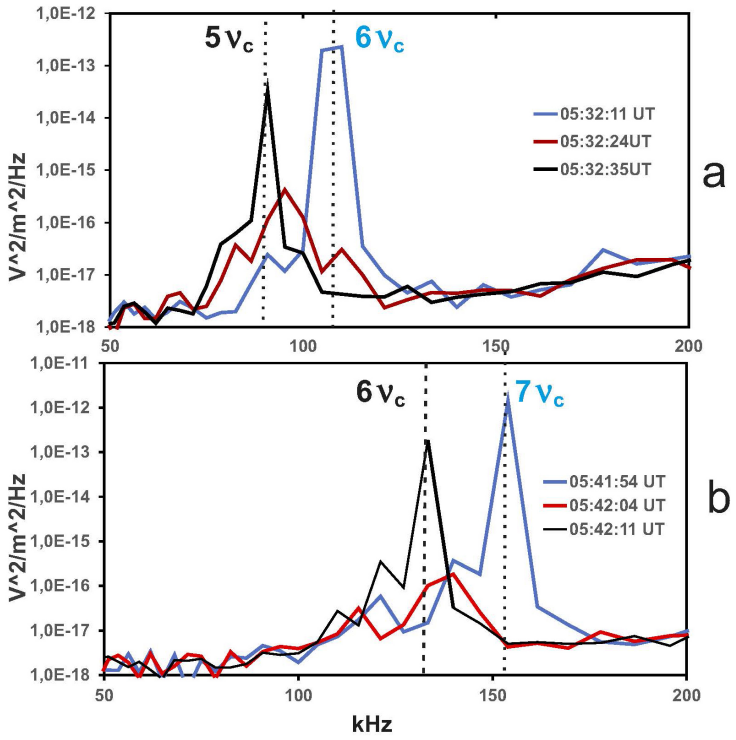


Рисунок 5.8 – Спектральные интенсивности как функции частоты в различные моменты времени указаны на рисунках

Проведём количественное сравнение спектральной интенсивности верхнегибридных волн в случае, когда их частота близка к кратному значению электронной гирочастоты, и в случае, когда частота находится между гармониками ν_c. На Рисунках 5.8a и 5.8b показаны спектры верхнегибридных волн в интервалах времени 05:32:11–05:32:32 и 05:41:54–05:43:11 (отмечены белыми прямоугольниками на Рисунке 5.4). Два спектра на каждом рисунке (чёрный и синий) соответствуют случаям, когда $\nu_{\text{UH}} = n\nu_c$, где $n = 5,6$ (рисунок 5.8a) и $n = 6,7$ (рисунок 5.8b). На рисунке красным цветом показаны спектры верхнегибридных волн, находящихся между гармониками ν_c. Видно, что интенсивность верхнегибридных волн, регистрируемых вблизи целого кратного электронной гирочастоты, на два порядка выше, чем интенсивность верхнегибридных волн с частотами, находящимися между электронными циклотронными гармониками.

5.3 Выводы к Главе 5

Одновременные измерения волновых электромагнитных полей в широком диапазоне частот, дифференциальных потоков энергичных частиц и параметров окружающей плазмы с помощью спутников Van Allen Probes предоставляют уникальную возможность сравнить наблюдаемые волновые спектры с линейными инкрементами этих волн. Исследование данной главы было сфокусировано на инкременте верхнегибридных волн, которые относятся к медленной необыкновенной моде. Следует четко сформулировать различие между квазиэлектростатическими верхнегибридными волнами, рассмотренными в данной главе, и электростатическими полугармоническими волнами на частотах $\nu \simeq (n + 1/2)\nu_c$, которые иногда могут быть близки к ν_{UH} на плазмопаузе. Квазиэлектростатические верхнегибридные волны, обсуждаемые в данной главе, существуют в приближении холодной плазмы при $N \to \infty$. Волны на частотах $\nu \simeq (n + 1/2)\nu_c$ существуют только в горячей плазме и имеют максимальный инкремент нарастания для $n \sim 2, 3$ или, возможно, 4. Как хорошо видно, рассматриваемые в данной главе верхнегибридные волны обычно соответствуют целым числам $n \geq 5$. Но даже если оба типа излучения существуют в одной полосе частот и имеют сравнимые спектральные интенсивности, их можно различить по частотам, по крайней мере, в режиме регистрации (burst mode).

Предполагая, что возбуждение волн вблизи верхнегибридной частоты происходит за счёт циклотронного взаимодействия с энергичными электронами на циклотронных резонансах высокого порядка, был рассчитан линейный инкремент этих волн. Для этого была смоделирована функция распределения энергичных электронов с помощью κ-функции с конусом потерь и температурной анизотропией, а параметры этого распределения были выбраны на основе измерений потока энергичных электронов (использовалось известное соотношение между функцией распределения частиц и их дифференциальными потоками). Таким образом, был рассчитан абсолютный максимум инкремента относительно ω и θ в каждой точке орбиты спутника. Особенности рассчитанного инкремента заключаются в том, что

i) эти максимумы всегда достигаются при частотах волн, близких к частоте верхнего гибридного резонанса, что подразумевает угол волновой нормали, близкий к $\pi/2$, и что

ii) величины этих максимумов очень сильно возрастают, когда верхнегибридная частота близка к целому кратному электронной гирочастоты. Соответствующее увеличение спектральной интенсивности верхнегибридных волн является характерной особенностью обзорных спектрограмм, наблюдаемых спутниками Van Allen Probes. Прямая связь между наблюдаемым спектром и локальным инкрементом волн с учётом низкой групповой скорости квазиэлектростатических верхнегибридных волн является веским аргументом в пользу предложенного механизма их генерации.

Заключение

Настоящая работа посвящена исследованию процессов распространения и резонансного взаимодействия с энергичными частицами электромагнитных волн в магнитоактивной плазме произвольной плотности, в том числе, в ионосфере и магнитосфере Земли и других планет Солнечной системы. В ходе исследования были получены следующие результаты:

1. Предложены приближённые аналитические выражения для показателей преломления электронных волновых мод в магнитоактивной плазме, достаточно хорошо аппроксимирующие данные величины в широком диапазоне частот, углов волновой нормали и параметров плазмы.

2. Для случая свистовой волны, распространяющейся в плазме вдоль магнитного поля, получено дисперсионное уравнение с учётом влияния резонансных частиц, не ограниченное условием малости инкремента волны по сравнению с частотой. Разработан метод расчёта инкремента неустойчивости для функций распределения, полученных численно по спутниковым данным; аналитическое продолжение функции осуществлено с помощью принципа непрерывности. Написана программа в среде MATLAB и выполнен численный расчёт инкрементов (декрементов) свистовых волн на основе измерений дифференциальных потоков электронов на спутниках Van Allen Probe A и MMS. Обнаружена немонотонная зависимость частоты от волнового числа и, как следствие, неоднозначная зависимость инкремента (декремента) от частоты при малых значениях плотности холодных частиц.

3. Выведено и проанализировано дисперсионное соотношение, которое в явном виде задаёт частоту волны как функцию волнового вектора и параметров плазмы в диапазоне частот $\omega_{\text{LH}} \ll \omega \ll \omega_c$ при произвольном соотношении ω_p и ω_c. В случае разреженной плазмы исследованы такие характеристики волн, как поляризация электрического и магнитного поля, плотность энергии, а для свистовых волн исследовано изменение угла Жандрэна и угла Стори в зависимости от параметров плазмы.

4. Рассчитан инкремент медленных необыкновенных волн в плазме с каппа-распределением при наличии конуса потерь и исследована его зависимость от параметров плазмы и параметров функции распределения. Обнаружено, что максимум инкремента достигается на частотах и при углах волновой нормали, близких к резонансным значениям, в частности, вблизи верхней гибридной частоты и для углов волновой нормали, близких 90°. Обнаружено, что зависимость инкремента от относительной частоты имеет не монотонный, а квазипериодический характер, причём максимумы инкремента достигаются вблизи гармоник гирочастоты. Это связано с тем, что в этом случае резонансный импульс, соответствующий n-ому циклотронному резонансу, имеет минимальное по абсолютной величине значение, и вклад в инкремент от этого резонанса доминирует над вкладами от других циклотронных резонансов. Обнаружена немонотонная зависимость максимального инкремента МН волны от анизотропии распределения.

5. Выведены общие уравнения движения релятивистских электронов в поле медленной необыкновенной волны и внешнем магнитном поле и проанализированы условия применимости приближения изолированных резонансов в этом случае. В этом приближении уравнения движения сведены к одномерной системе уравнений, аналогичной той, которая возникает для ленгмюровских волн и корректно решённой О'Нилом. Получено выражение для инкремента медленной необыкновенной волны, распространяющейся под произвольным углом к внешнему магнитному полю. Выполненные расчёты применимы для всех частот и углов волновой нормали МН волн, за исключением случая, когда $\omega = k_{\|}c$, который требует особого рассмотрения. Это связано с тем, что релятивистские резонансные условия связывают продольный импульс частицы $p_{\|}$ и релятивистский γ-фактор с параметрами волны. При этом существует связь между изменением этих величин. При выполнении условия $\omega = k_{\|}c$ величины $p_{\|}$ и γ изменяются таким образом, что частица "застревает" в резонансе.

6. Объяснены особенности спектров верхнегибридных волн, наблюдаемых на спутниках в магнитосфере Земли, в частности, заметное возрастание спектральной интенсивности верхнегибридных волн в областях, где частота

верхнегибридного резонанса кратна электронной циклотронной частоте. Предлагаемое объяснение этих наблюдений основано на предположении, что верхнегибридные волны возбуждаются вследствие развития циклотронной неустойчивости на высоких циклотронных резонансах. Вычисленный инкремент верхнегибридных волн вдоль траектории спутника хорошо согласуется с одновременными наблюдениями спектра.

Предложенные в диссертационной работе методы вносят заметный вклад в развитие теоретического и численного описания волновых процессов в плазме и предоставляют возможность детального исследования механизмов обмена энергией между волнами и частицами в лабораторных экспериментах и космических наблюдениях.

В дальнейшем планируется более подробное изучение описанных процессов с учётом влияния температуры и неоднородности плазмы, исследование рассеяния волн на неоднородностях плотности и линейной трансформации МН волн в другие волновые моды в неоднородной плазме, а также возможное применение разработанных методов к другим типам волн.

В заключение автор выражает благодарность своему научному руководителю Шкляру Давиду Рувимовичу за плодотворную совместную работу, ценные советы, конструктивные замечания и всестороннюю поддержку на всех этапах проведения исследования. Автор благодарен сотрудникам Отдела физики космической плазмы ИКИ РАН за поддержку во время работы в отделе и выступлений на конференциях и семинарах.

Список литературы

[1] *Schnider, K.* Physics of Space Plasma Activity / K. Schnider. – Cambridge: Cambridge University Press, 2007. – 507 p.

[2] *Aschwanden, M.J.* Physics of the Solar Corona. An Introduction with Problems and Solutions. Springer-Praxis Books in Geophysical Sciences / M.J. Aschwanden. – Springer Berlin, Heidelberg, 2004. – 908 p.

[3] *Wood, B.* Astrospheres and solar-like stellar winds / B. Wood // Living Reviews in Solar Physics. – 2004. – Vol. 1. – Art. 2. – URL: https://doi.org/10.12942/lrsp-2004-2.

[4] Revealing compact structures of interstellar plasma in the Galaxy with RadioAstron / E.N. Fadeev, A.S. Andrianov, M.S. Burgin [et al.] // Monthly Notices of the Royal Astronomical Society. – 2018. – Vol. 480, No. 3. – P. 4199–4210. – URL: https://doi.org/10.1093/mnras/sty2055.

[5] *Russell, C.* The dynamics of planetary magnetospheres / C. Russell // Planetary and Space Science. – 2001. – Vol. 49, No. 10/11. – P. 1005–1030. – – URL: http://dx.doi.org/10.1016/S0032-0633(01)00017-4.

[6] *Howes, G.G.* Laboratory space physics: Investigating the physics of space plasmas in the laboratory / G.G. Howes // Physics of Plasmas. – 2018. – Vol. 25, No. 5. – Art. 055501. – URL: https://doi.org/10.1063/1.5025421.

[7] The Aurora / Editors: Y. Kamide, A. Chian // Handbook of the Solar-Terrestrial Environment. – Springer Berlin, Heidelberg, 2007. P. 333–354. – URL: https://doi.org/10.1007/978-3-540-46315-3.

[8] *Feldstein, Ya.I.* Dynamics of auroral belt and polar geomagnetic disturbances / Ya.I. Feldstein, G.V. Starkov // Planetary and Space Science. – 1967. – Vol. 15, No. 2. – P. 209–229. – URL: https://doi.org/10.1016/0032-0633(67)90190-0.

[9] Измерения космического излучения на искусственном спутнике Земли / С.Н. Вернов, Н.Л. Григоров, Ю.И. Логачев, А.Е. Чудаков // ДАН СССР. – 1958. – Т. 120, № 6. – С. 1231–1233.

[10] Observation of high intensity radiation by Satellites 1958 Alpha and Gamma / J.A. Van Allen, J.H. Ludwig, E.C. Ray, C.E. Mcllwain // Jet Propulsion. – 1958. – Vol. 28, No. 9. – P. 588–592.

[11] Space weather impacts on satellites and forecasting the Earth's electron radiation belts with SPACECAST / R.B. Horne, S.A. Glauert, N.P. Meredith [et al.] // Space Weather. – 2013. – Vol. 11, No. 4. – P. 169–186. – URL: http://dx.doi.org/10.1002/swe.20023.

[12] *Pulkkinen, T.* Space Weather: Terrestrial Perspective / T. Pulkkinen // Living Reviews in Solar Physics. – 2007. – Vol. 4. – Art. 1. – URL: http://dx.doi.org/10.12942/lrsp-2007-1.

[13] Electron densities in Jupiter's outer magnetosphere determined from Voyager 1 and 2 plasma wave spectra / B.L. Barnhart, W.S. Kurth, J.B. Groene [et al.] // Journal of Geophysical Research. – 2009. – Vol. 114, No. A5. – Art. A05218. – URL: https://doi.org/10.1029/2009JA014069.

[14] *Ижовкина, Н.И.* Сравнение рассчитанных и измеренных спектральных характеристик свистов для эксперимента "АРАКС" / Н.И. Ижовкина, С.А. Пулинец, Е.П. Трушкина // Космические исследования. – 1986. – Т. 24, № 1. – С. 139–143.

[15] Active experiments in space for the investigation of beam – plasma interactions. Results of the APEX project / N.V. Baranets, Yu.Ya. Ruzhin, V.N. Oraevsky [et al.] // Advances in Space Research. – 1999. – Vol. 24, No. 8. – P. 981–984.

[16] *Zelenyi, L.M.* Special Topic Interball-1 : first scientific results / L.M. Zelenyi, J.A. Sauvaud // Annales Geophysicae. – 1997. – Vol. 15, No. 5. – P. 511–513. – URL: https://doi.org/10.1007/s00585-997-0511-6.

[17] *Zelenyi, L.M.* Special Topic: Interball-2 : first scientific results / L.M. Zelenyi, J.A. Sauvaud // Annales Geophysicae. – 1998. – Vol. 16. – P. 1043–1045. – URL: https://doi.org/10.1007/s00585-998-1043-4.

[18] *Зеленый Л.М.* По следам проекта "ИНТЕРБОЛ" / Л.М. Зеленый, М.М. Могилевский // Вестник НПО им. С.А. Лавочкина. – 2025. – № 1 (67). – С. 17–31.

[19] STAFF instrument calibration, sensitivity, and performance evolutions during the Cluster mission / P. Canu, V. Bouzid, R. Piberne [et al.] // Journal of Geophysical Research: Space Physics. – 2026. – Vol. 131, No. 6. – Art. e2026JA035072. – URL: https://doi.org/10.1029/2026JA035072.

[20] The Plasma Wave Experiment (PWE) on board the Arase (ERG) satellite / Y. Kasahara, Y. Kasaba, H. Kojima [et al.] // Earth Planets Space. – 2018. – Vol. 70. – Art. 86. – URL: https://doi.org/10.1186/s40623-018-0842-4.

[21] The electric and magnetic field instrument suite and integrated science (EMFISIS) on RBSP / C.A. Kletzing, W.S. Kurth, M. Acuna [et al.] // Space Science Reviews. – 2013. – Vol. 179. – P. 127–181. – URL: https://doi.org/10.1007/s11214-013-9993-6.

[22] The Electric Field and Waves Instruments on the Radiation Belt Storm Probes Mission / J.R. Wygant, J.W. Bonnell, K. Goetz [et al.] // Space Science Reviews. – 2013. – Vol. 179. – P. 183–220. – URL: https://doi.org/10.1007/s11214-013-0013-7.

[23] Magnetospheric Multiscale Overview and Science Objectives / J.L. Burch, T.E. Moore, R.B. Torbert, B.L. Giles // Space Science Reviews. – 2016. – Vol. 199. – P. 5–21. – URL: https://doi.org/10.1007/s11214-015-0164-9.

[24] *Шкляр, Д.Р.* Некоторые сведения по физике плазмы // Плазменная гелиогеофизика / Под ред. Л.М. Зеленого и И.С. Веселовского. – М. : Физматлит, 2008. Т. 2. С. 391–494.

[25] Electrostatic electron-cyclotron waves in multi-temperature plasma / V.I. Karpman, Ju.K. Alekhin, N.D. Borisov, N.A. Rjabova // Plasma Physics. 1975. Vol. 17. P. 937–949.

[26] Electrostatic electron-cyclotron waves in plasma with a loss-cone distribution / V.I. Karpman, Ju.K. Alekhin, N.D. Borisov, N.A. Rjabova // Plasma Physics. 1975. Vol. 17. P. 361–372.

[27] Электродинамика плазмы / А.И. Ахиезер, И.А. Ахиезер, Р.В. Половин [и др.]. – М. : Наука, 1974. – 720 с.

[28] *Гинзбург, В.Л.* Волны в магнитоактивной плазме / В.Л. Гинзбург, А.А. Рухадзе. – М. : Наука, 1975. – 256 с.

[29] *Helliwell, R.A.* Whistlers and related ionospheric phenomena / R.A. Helliwell. – Stanford : Stanford University Press, 1965. – URL: https://doi.org/10.1007/978-3-642-65675-0

[30] Whistler phenomena. Short impulse propagation / Editors: C. Ferencz, O.E. Ferencz, D. Hamar, J. Lichtenberger. – Dordrecht: Kluwer Academic Publishers, 2001. – 260 p. – URL: https://doi.org/10.1007/978-94-015-9642-8.

[31] *Беспалов, П.А.* Три полосы возбуждения свистов в радиационных поясах Юпитера // Письма в астрономический журнал. – 1987. – Т. 13, вып. 6. – С. 1094–1099.

[32] *Bespalov, P.A.* Synchronized oscillations in whistler wave intensity and energetic electron fluxes in Jupiter's middle magnetosphere / P.A. Bespalov, O.N. Savina, S.W.H. Cowley // Journal of Geophysical Research: Space Physics. – 2005. – Vol. 110. – Art. A09209. – URL: https://doi.org/10.1029/2005JA011147.

[33] *Беспалов, П.А.* Некоторые новые возможности диагностики магнитосферы по характеристикам свистовых излучений // Геомагнетизм и аэрономия. – 2011. – Т. 51, вып. 2. – С. 229–236.

[34] *Bespalov, P.A.* On the linear theory of oblique magnetospheric chorus excitation / P.A. Bespalov, O.N. Savina // Journal of Atmospheric and Solar-Terrestrial Physics. – 2019. – Vol. 185. – P. 58–67. – URL: https://doi.org/10.1016/j.jastp.2019.01.016.

[35] *Mizonova, V.G.* Whistler waves produced by monochromatic currents in the low nighttime ionosphere / V.G. Mizonova, P.A. Bespalov // Annales Geophysicae. – 2021. – Vol. 39. – P. 479–486. – URL: https://doi.org/10.5194/angeo-39-479-2021.

[36] Беспалов, П.А. Циклотронная неустойчивость радиационных поясов Земли / П.А. Беспалов, В.Ю. Трахтенгерц // Вопросы теории плазмы. – М. : Атомиздат, 1980. – Вып. 10. – С. 88–163.

[37] *Kolmašová, I.* Whistler echo trains triggered by energetic winter lightning / I. Kolmašová, O. Santolík, J. Manninen // Nature Communications. – 2024. – Vol. 15, No. 1. – Art. 7166. – URL: http://dx.doi.org/10.1038/s41467-024-51684-0.

[38] Propagation characteristics of lightning-generated whistlers in the ionosphere: Statistical and simulation-based analysis / T. Xiang, M. Liu, Sh. He [et al.] // Journal of Geophysical Research: Space Physics. – 2025. – Vol. 130, No. 6. – Art. e2024JA033546. – URL: https://doi.org/10.1029/2024JA033546.

[39] *Helliwell, R.A.* VLF wave stimulation experiments in the magnetosphere from Siple Station, Antarctica / R.A. Helliwell // Reviews of Geophysics. – 1988. – Vol. 26, No. 3. – P. 551–578. – URL: http://dx.doi.org/10.1029/RG026i003p00551.

[40] *Cohen, M.B.* Terrestrial VLF transmitter injection into the magnetosphere / M.B. Cohen, U.S. Inan // Journal of Geophysical Research: Space Physics. – 2012. – Vol. 117, No. A8. – Art. A08310. – URL: http://dx.doi.org/10.1029/2012JA017992.

[41] КНЧ/ОНЧ возмущения над передатчиком HAARP, регистрируемые в верхней ионосфере на спутнике DEMETER / Е.Е. Титова, А.Г. Демехов,

А.А. Мочалов [и др.] // Известия вузов. Радиофизика. – 2015. – Т. 58, № 3. – С. 167–186.

[42] Некоторые аспекты магнитосферно-ионосферных связей / А.А. Петрукович, М.М. Могилевский, А.А. Чернышов, Д.Р. Шкляр // Успехи физических наук. – 2015. – Т. 185, № 6. – С. 649–654. – URL: http://dx.doi.org/10.3367/UFNr.0185.201506i.0649.

[43] Ground transmitter waves in the magnetosphere and their role in electron scattering / L. Chen, Zh. Xia, W. Gu, R.B. Horne // Journal of Geophysical Research: Space Physics. – 2026. – Vol. 131, No. 5. – Art. e2026JA035186. – URL: https://doi.org/10.1029/2026JA035186.

[44] Одновременные наблюдения квазипериодических ОНЧ излучений на спутниках и на Земле и локализация области их генерации / А.Г. Демехов, Е.Е. Титова, А.А. Любчич [и др.] // Известия вузов. Радиофизика. – 2025. – Т. 68, № 4. – С. 278–300. – URL: https://doi.org/10.52452/00213462_2025_68_04_278.

[45] *Matsumoto, H.* Linear and nonlinear cyclotron instability and VLF emissions in the magnetosphere / H. Matsumoto, I. Kimura // Planetary and Space Science. – 1971. – Vol. 19, No. 6. – P. 567–608.

[46] *Matsumoto, H.* Wave instabilities in space plasmas / H. Matsumoto ; Eds.: Palmadesso P.J., Papadopoulos K. – Hingham: D. Reidel, 1979. 163 p.

[47] A review of observational, theoretical and numerical studies of VLF triggered emissions / Y. Omura, D. Nunn, H. Matsumoto, M.J. Rycroft // Journal of Atmospheric and Terrestrial Physics. – 1991. – Vol. 53, No. 5. – P. 351–368. – URL: https://doi.org/10.1016/0021-9169(91)90031-2.

[48] Ускорение электронов в магнитосфере свистовыми волнами переменной частоты / А.Г. Демехов, В.Ю. Трахтенгерц, М. Райкрофт, Д. Нанн // Геомагнетизм и аэрономия. – 2006. – Т. 46, № 6. – С. 751–757. – URL: https://doi.org/10.1134/S0016793206060053.

[49] Эффективность ускорения электронов в магнитосфере Земли свистовыми волнами / А.Г. Демехов, В.Ю. Трахтенгерц, М. Райкрофт, Д. Нанн // Геомагнетизм и аэрономия. – 2009. – Т. 49, № 1. – С. 28–33. – URL: https://doi.org/10.1134/S0016793209010034.

[50] *Shklyar, D.R.* Particle interaction with an electrostatic VLF wave in the magnetosphere with an application to proton precipitation // Planetary and Space Science. – 1986. – Vol. 34, No. 11. – P. 1091–1099.

[51] Electron precipitation driven by whistler-mode waves: effects of wave-packet variability / V.S. Grach, A.V. Artemyev, A.G. Demekhov [et al.] // Journal of Geophysical Research: Space Physics. – 2026. – Vol. 131, No. 6. – Art. e2025JA034958. – URL: https://doi.org/10.1029/2025JA034958.

[52] Quasi-parallel whistler waves and their interaction with resonant electrons during high-velocity bulk flows in the Earth's magnetotail / E.E. Grigorenko, A.Y. Malykhin, E.A. Kronberg, E.V. Panov // The Astrophysical Journal. – 2023. – Vol. 943, No. 2. – Art. 169. – URL: https://doi.org/10.3847/1538-4357/acaf52.

[53] Lightning-induced electron precipitation events observed at low altitudes / V. Linzmayer, F. Němec, O. Santolík, I. Kolmašová // Journal of Geophysical Research: Space Physics. – 2025. – Vol. 130, No. 4. – Art. e2024JA033639. – URL: https://doi.org/10.1029/2024JA033639.

[54] *Thorne, R.M.* Relativistic electron precipitation during magnetic storm main phase / R.M. Thorne, C.F. Kennel // Journal of Geophysical Research. – 1971. – Vol. 76, No. 19. – P. 4446–4453. – URL: https://doi.org/10.1029/JA076i019p04446.

[55] *Сажин, С.С.* Естественные радиоизлучения в магнитосфере Земли / С.С. Сажин. – М. : Наука, 1982. – 158 с.

[56] Electron pitch-angle diffusion in radiation belts: The effects of whistler wave oblique propagation / A. Artemyev, O. Agapitov, H. Breuillard [et al.] // Geophysical Research Letters. – 2012. – Vol. 39, No. 8. – Art. L08105. – URL: https://doi.org/10.1029/2012GL051393.

[57] Oblique whistler-mode waves in the Earth's inner magnetosphere: Energy distribution, origins, and role in radiation belt dynamics / A. Artemyev, O. Agapitov, D. Mourenas [et al.] // Space Science Reviews. – 2016. – Vol. 200. – P. 261–355. – URL: https://doi.org/10.1007/s11214-016-0252-5.

[58] *Trakhtengerts, V.Y.* Whistler–electron interactions in the magnetosphere: new results and novel approaches / V.Y. Trakhtengerts, M.J. Rycroft // Journal of Atmospheric and Solar-Terrestrial Physics. – 2000. – Vol. 62, No. 17-18. – P. 1719–1733. – URL: https://doi.org/10.1016/S1364-6826(00)00122-X.

[59] *Трахтенгерц, В.Ю.* Свистовые и альфвеновские циклотронные мазеры в космосе / В.Ю. Трахтенгерц, М.Дж. Райкрофт. – М. : Физматлит, 2011. – 344 с.

[60] Nonlinear Resonant Interactions of Radiation Belt Electrons with Intense Whistler-Mode Waves / A.V. Artemyev, D. Mourenas, X.-J. Zhang [et al.] // Space Science Reviews. – 2025. – Vol. 221. – Art. 18. – URL: https://doi.org/10.1007/s11214-025-01144-y

[61] *Storey, L.R.O.* An Investigation of Whistling Atmospherics // Philosophical Transactions of the Royal Society of London. – 1953. – Vol. A246, No. 908. – P. 113–141.

[62] *Gendrin, R.* Le guidage des whistlers par le champ magnetique // Planetary and Space Science. – 1961. – Vol. 5, No. 4. – P. 274–278. – URL: https://doi.org/10.1016/0032-0633(61)90096-4.

[63] *Kimura, I.* Effects of ions on whistler-mode ray tracing // Radio Science. – 1966. – Vol. 1, No. 3. – P. 269–283.

[64] *Kimura, I.* Whistler mode propagation in the earth and planetary magnetospheres and ray tracing techniques // Space Science Reviews. – 1985. – Vol. 42, No. 3-4. – P. 449–466. – URL: https://doi.org/10.1007/BF00214998.

[65] *Smith, R.L.* Magnetospheric properties deduced from OGO 1 observations of ducted and nonducted whistlers / R.L. Smith, J.J. Angerami // Journal of Geophysical Research. – 1968. – Vol. 73, No. 1. – P. 1–20.

[66] Plasma waves in Jupiter's high-latitude regions: Observations from the Juno spacecraft / S.S. Tetrick, D.A. Gurnett, W.S. Kurth [et al.] // Geophysical Research Letters. – 2017. – Vol. 44, No. 10. – P. 4447–4454. – URL: https://doi.org/10.1002/2017GL073073.

[67] Plasma sheet boundary layer in Jupiter's magnetodisk as observed by Juno / X.-J. Zhang, Q. Ma, A.V. Artemyev [et al.] // Journal of Geophysical Research: Space Physics. – 2020. – Vol. 125, No. 8. – Art. e2020JA027957. – URL: https://doi.org/10.1029/2020JA027957.

[68] Whistler mode waves associated with broadband auroral electron precipitation at Jupiter / W.S. Kurth, B.H. Mauk, S.S. Elliott [et al.] // Geophysical Research Letters. – 2018. – Vol. 45, No. 18. – P. 9372-9379. – URL: https://doi.org/10.1029/2018GL078566.

[69] Jupiter's low-altitude auroral zones: Fields, particles, plasma waves, and density depletions / A.H. Sulaiman, B.H. Mauk, J.R. Szalay [et al.] // Journal of Geophysical Research: Space Physics. – 2022. – Vol. 127, No. 8. – Art. e2022JA030334. – URL: https://doi.org/10.1029/2022JA030334.

[70] Electron density distributions in Saturn's ionosphere / A.M. Persoon, W.S. Kurth, D.A. Gurnett [et al.] // Geophysical Research Letters. – 2019. – V. 46, No. 6. – P. 3061–3068. – URL: https://doi.org/10.1029/2018GL078020.

[71] Emission and propagation of Saturn kilometric radiation: Magnetoionic modes, beaming pattern, and polarization state / L. Lamy, B. Cecconi, P. Zarka [et al.] // Journal of Geophysical Research: Space Physics. – 2010. – Vol. 116, No. A4. – Art. A04212. – URL: https://doi.org/10.1029/2010JA016195.

[72] Gyroresonant interactions between the radiation belt electrons and whistler mode chorus waves in the radiation environments of Earth, Jupiter, and Saturn: A comparative study / Y.Y. Shprits, J.D. Menietti, X. Gu [et al.] // Journal of Geophysical Research: Space Physics. – 2012. – Vol. 117. – Art. A11216. – URL: https://doi.org/10.1029/2012JA018031.

[73] Low-latitude whistler-mode and higher-latitude Z-mode emission at Jupiter observed by Juno / J.D. Menietti, T.F. Averkamp, M. Imai [et al.] // Journal

of Geophysical Research: Space Physics. – 2021. – Vol. 126, No. 2. – Art. e2020JA028742. – URL: https://doi.org/10.1029/2020JA028742.

[74] Properties of Saturn kilometric radiation measured within its source region / L. Lamy, P. Schippers, P. Zarka [et al.] // Geophysical Research Letters. – 2010. – Vol. 37. – Art. L12104. – URL: https://doi.org/10.1029/2010GL043415.

[75] CMI growth rates for Saturnian kilometric radiation / R.L. Mutel, J.D. Menietti, D.A. Gurnett [et al.] // Geophysical Research Letters. – 2010. – Vol. 37, No. 19. – Art. L19105. – URL: https://doi.org/10.1029/2010GL044940.

[76] *Лундин, Б.* О минимальном наборе плазменных параметров для определения закона дисперсии электронных свистовых волн / Б. Лундин, К. Краффт // Физика плазмы. – 2009. – Т. 35, No. 6. – С. 551–558.

[77] A comparison of intense electrostatic waves near F_{UHR} with linear instability theory / W.S. Kurth, M. Ashour-Abdalla, L.A. Frank [et al.] // Geophysical Research Letters. – 1979. – Vol. 6, No. 6. – P. 487–490. – URL: https://doi.org/10.1029/GL006i006p00487.

[78] Intense electrostatic waves near the upper hybrid resonance frequency / W.S. Kurth, J.D. Graven, L.A. Frank, D.A. Gurnet // Journal of Geophysical Research: Space Physics. – 1979. – V. 84, No. A8. – P. 4145–4164. – URL: https://doi.org/10.1029/JA084iA08p04145.

[79] Electron densities inferred from plasma wave spectra obtained by the waves instrument on Van Allen Probes / W.S. Kurth, S. De Pascuale, J.B. Faden [et al.] // Journal of Geophysical Research: Space Physics. – 2015. – Vol. 120, No. 2. P. 904–914. – URL: https://doi.org/10.1002/2014ja020857.

[80] *Oya, H.* Plasma turbulence disc circulating the equatorial region of the plasmasphere identified by the plasma wave detector (PWS) on board the Akebono (EXOS-D) satellite / H. Oya, M. Iizima, A. Morioka // Geophysical Research Letters. – 1991. – V. 18, No. 2. P. 329–332. – URL: https://doi.org/10.1029/91gl00030.

[81] Rapid acceleration of radiation belt energetic electrons by Z-mode waves / F.L. Xiao, S. Zhang, Z.P. Su [et al.] // Geophysical Research Letters. – 2012. – Vol. 39. – Art. L03103. – URL: https://doi.org/10.1029/2011GL050625.

[82] Generation mechanism of Z-mode waves in the equatorial plasmasphere / Y. Nishimura, T. Ono, M. Iizima [et al.] // Earth, Planets and Space. – 2007. – Vol. 59, No. 9. – P. 1027–1034. – URL: https://doi.org/10.1186/bf03352043.

[83] The role of intense upper hybrid resonance emissions in the generation of Saturn narrowband emission / J.D. Menietti, P.H. Yoon, D. Pisa [et al.] // Journal of Geophysical Research: Space Physics. – 2019. – Vol. 124, No. 7. – P. 5709–5718. – URL: https://doi.org/10.1029/2019JA026855.

[84] Analysis of whistler-mode and Z-Mode emission in the Juno primary mission / J.D. Menietti, T.F. Averkamp, W.S. Kurth [et al.] // Journal of Geophysical Research: Space Physics. – 2021. – Vol. 126, No. 11. – Art. e2021JA029885. – URL: https://doi.org/10.1029/2021JA029885.

[85] Survey and analysis of whistler- and Z-mode emission in the Juno extended mission / J.D. Menietti, T.F. Averkamp, W.S. Kurth [et al.] // Journal of Geophysical Research: Space Physics. – 2023. – Vol. 128, No. 12. – Art. e2023JA032037. – URL: https://doi.org/10.1029/2023JA032037.

[86] *Mutel, R.L.* RX and Z-mode growth rates and propagation at cavity boundaries // Planetary radio emissions VII / R.L. Mutel, I.W. Christopher, J.D. Menietti [et al.] ; editors: H.O. Rucker, W.S. Kurth, P. Louarn, G. Fischer. – Vienna: Austrian Academy of Science, 2011. – P. 241–252.

[87] *Horne, R.B.* Potential waves for relativistic electron scattering and stochastic acceleration during magnetic storms / R.B. Horne, R.M. Thorne // Geophysical Research Letters. – 1998. – Vol. 25. – P. 3011–3014. – URL: https://doi.org/10.1029/98GL01002.

[88] *Summers, D.* Gyroresonant acceleration of electrons in the magnetosphere by superluminous electromagnetic waves / D. Summers, R.M. Thorne, F. Xiao // Journal of Geophysical Research: Space Physics. – 2001. – Vol. 106. – P. 10853–10868. – URL: https://doi.org/10.1029/2000JA000309.

[89] *Glauert, S.A.* Calculation of pitch angle and energy diffusion coefficients with the PADIE code / S.A. Glauert, R.B. Horne // Journal of Geophysical Research: Space Physics. – 2005. – Vol. 110. – Art. A04206. – URL: https://doi.org/10.1029/2004JA010851.

[90] *Albert, J.M.* Refractive index and wavenumber properties for cyclotron resonant quasilinear diffusion by cold plasma waves // Physics of Plasmas. – 2007. – Vol. 14. – Art. 072901. – URL: https://doi.org/10.1063/1.2744363.

[91] Upper limit on radiation belt electron fluxes controlled by a self-consistent feedback from chorus waves / R. Zhou, X.-J. Zhang, D. Mourenas, A.V. Artemyev // Journal of Geophysical Research: Space Physics. – 2025. – Vol. 130. – Art. e2025JA034116. – URL: https://doi.org/10.1029/2025JA034116.

[92] Quasi-monochromatic ultra-low-frequency waves: A new challenge for wave-particle interaction models / A.V. Artemyev, M.D. Hartinger, D.L. Vainchtein, R. Rankin // Journal of Geophysical Research: Space Physics. – 2025. – Vol. 130. – Art. e2025JA034043. – URL: https://doi.org/10.1029/2025JA034043.

[93] *Беспалов, П.А.* Особенности генерации квазипериодических ОНЧ-излучений с существенной частотной динамикой внутри плазмосферы / П.А. Беспалов, О.Н. Савина // Геомагнетизм и аэрономия. – 2025. – Т. 65, No. 5. – С. 620–628. – URL: https://doi.org/10.7868/S3034502225050068.

[94] Models of resonant wave–particle interactions / J.M. Albert, A.V. Artemyev, W. Li [et al.] // Journal of Geophysical Research: Space Physics. – 2021. – Vol. 126. – Art. e2021JA029216. – URL: https://doi.org/10.1029/2021JA029216.

[95] *Власов, А.А.* О вибрационных свойствах электронного газа // ЖЭТФ. – 1938. – Т. 8. – С. 291–318.

[96] *Vlasov, A.A.* On the kinetic theory of an assembly of particles with collective interaction // Journal of Physics (USSR). – 1945. – Vol. 9. – P. 25–40.

[97] *Ландау, Л.Д.* О колебаниях электронной плазмы // ЖЭТФ. – 1946. – Т. 16. – С. 574–593.

[98] *Лифшиц, Е.М.* Физическая кинетика (серия: “Теоретическая физика”, Т. 10) / Е.М. Лифшиц, Л.П. Питаевский. – М. : Наука, 1979. – 528 с.

[99] *Кролл, Н.* Основы физики плазмы / Н. Кролл, А. Трайвелпис ; ред. А.М. Дыхне. – Издательство “Мир”, Москва, 1975. – 526 с.

[100] *Сагдеев, Р.З.* О неустойчивости плазмы с анизотропным распределением скоростей в магнитном поле / Р.З. Сагдеев, В.Д. Шафранов // ЖЭТФ. – 1960. – Т. 39. – С. 181–184.

[101] *Михайловский, А.Б.* Теория плазменных неустойчивостей : в 2 томах / А.Б. Михайловский. – 2-е изд., перераб. и доп. – М. : Атомиздат, 1975–1977.

[102] *Шафранов, В.Д.* Электромагнитные волны в плазме // Вопросы теории плазмы, вып. 3 / В.Д. Шафранов ; под редакцией М.А. Леонтовича. – М. : Госатомиздат, 1963, С. 3–140.

[103] *Klimushkin, D.Yu.* The propagation of high-m Alfven waves in the Earth's magnetosphere and their interaction with high-energy particles // Journal of Geophysical Research: Space Physics. – 2000. – Vol. 105. – P. 23303–23310. – URL: https://doi.org/10.1029/1999JA000396.

[104] *Леонович, А.С.* Линейная теория МГД-колебаний в магнитосфере / А.С. Леонович, В.А. Мазур. – М. : Физматлит, 2016. – 480 с.

[105] Interaction of ULF waves with different ion species: Pitch angle and phase space density implications / Jie Ren, et al. // Journal of Geophysical Research: Space Physics. – 2016. – Vol. 121, Iss. 10. – P. 9459–9472. URL: https://doi/org/10.1002/2016JA022995.

[106] Взаимодействие длиннопериодных УНЧ-волн и заряженных частиц в магнитосфере: теория и наблюдения (обзор) / Д.Ю. Климушкин, П.Н. Магер, М.А. Челпанов, Д.В. Костарев // Солнечно-земная физика. – 2021. – Т. 7, № 4. С. 35–69. – URL: https://doi.org/10.12737/szf-74202105.

[107] *Фейгин, Ф.З.* Особенности генерации ультранизкочастотных электромагнитных волн в магнитосфере Земли при учете конечного плазменного давления горячих частиц / Ф.З. Фейгин, Ю.Г. Хабазин // Геомагнетизм и аэрономия. – 2022. – Т. 62, № 2. С. 189–197. – URL: https://doi.org/10.31857/S0016794022020067.

[108] The excitation of second harmonic poloidal ULF waves through drift-bounce resonance with protons in the magnetic dip / Y. Zhuang, Y., et al. // Journal of Geophysical Research: Space Physics. – 2024. Vol. 129, No. 11. – Art. e2024JA032804. – URL: https://doi.org/10.1029/2024JA032804.

[109] Simulating the ring current proton dynamics in response to radial diffusion by ultra-low-frequency (ULF) waves / L. Ma, et al. // Geophysical Research Letters. – 2024. – Vol. 51, Iss. 6. – Art. e2023GL107326. – URL: https://doi.org/10.1029/2023GL107326.

[110] Generation of oppositely propagating Alfvén waves by a substorm-injected proton cloud / E.E. Smotrova, O.S. Mikhailova, P.N. Mager, A.V. Rubtsov // Advances in Space Research. – 2026. – Vol. 77, Iss. 2. – P. 2563–2573. – URL: https://doi.org/10.1016/j.asr.2025.10.084.

[111] Shklyar, D.R. Oblique whistler-mode waves in the inhomogeneous magnetospheric plasma: Resonant interactions with energetic charged particles / D.R. Shklyar, H. Matsumoto // Surveys in Geophysics. – 2009. – Vol. 30, No. 2. – P. 55–104. – URL: https://doi.org/10.1007/s10712-009-9061-7.

[112] *Nunn, D.* A computational and theoretical investigation of nonlinear wave-particle interactions in oblique whistlers / D. Nunn, Y. Omura // Journal of Geophysical Research: Space Physics. – 2015. – Vol. 120. – P. 2890–2911. – URL: https://doi.org/10.1002/2014JA020898.

[113] *Artemyev, A.V.* On the role of whistler-mode waves in electron interaction with dipolarizing flux bundles / A.V. Artemyev, A.I. Neishtadt, V. Angelopoulos // Journal of Geophysical Research: Space Physics. – 2022. – Vol. 127. – Art. e2022JA030265. – URL: https://doi.org/10.1029/2022JA030265.

[114] Timescale for radiation belt electron acceleration by whistler mode chorus waves / R.B. Horne, R.M. Thorne, S.A. Glauert [et al.] // Journal of Geophysical Research: Space Physics. – 2005. – Vol. 110. – Art. A03225. – URL: https://doi.org/10.1029/2004JA010811.

[115] Propagation of Z-mode and whistler-mode emissions observed by Interball 2 in the nightside auroral region / O. Santolik, F. Lefeuvre, M. Parrot, J.-L. Rauch // Journal of Geophysical Research: Space Physics. – 2001. – Vol. 106, No. A10. – P. 21137–21146. – URL: https://doi.org/10.1029/2001JA000038.

[116] *LaBelle, J.* Auroral radio emissions, 1. Hisses, roars, and bursts / J. LaBelle, R.A. Treumann // Space Science Reviews. – 2002. – Vol. 101. – P. 295–440. – URL: https://doi.org/10.1023/A:1020850022070.

[117] *Демехов, А.Г.* О циклотронной неустойчивости медленной необыкновенной волны в магнитоактивной плазме // Известия ВУЗов: Радиофизика. – 1987. – Т. 30, вып. 6. – С. 734–747.

[118] *Шкляр, Д.Р.* Стохастическое движение релятивистских частиц в поле монохроматической волны // ЖЭТФ. – 1981. – Т. 80. – С. 2272–2282.

[119] *Shklyar, D.R.* Relativistic electron scattering by electrostatic upper hybrid waves in the radiation belt / D.R. Shklyar, B. Kliem // Journal of Geophysical Research: Space Physics. – 2006. – Vol. 111, No. A6. – Art. A06204. – URL: https://doi.org/10.1029/2005JA011345.

[120] *Lee, S.-Y.* Excitation of upper-hybrid and whistler-mode waves by electron velocity ring distribution / S.-Y. Lee, P.H. Yoon // Journal of Geophysical Research: Space Physics. – 2025. – Vol. 130. – Art. e2024JA033285. – URL: https://doi.org/10.1029/2024JA033285.

[121] *Zheleznyakov, V.V.* Cyclotron wave instability in the corona and origin of solar radio emission with fine structure. I. Bernstein modes and plasma waves in a hybrid band / V.V. Zheleznyakov, E.Y. Zlotnik // Solar Physics. – 1975. – Vol. 43. – P. 431–451. – URL: https://doi.org/10.1007/BF00152366.

[122] *Zheleznyakov, V.V.* Cyclotron wave instability in the corona and origin of solar radio emission with fine structure. II : Origin of 'Tadpoles' / V.V. Zheleznyakov, E.Y. Zlotnik // Solar Physics. – 1975. – Vol. 44. – P. 447–459. – URL: https://doi.org/10.1007/BF00153224.

[123] *Zheleznyakov, V.V.* Cyclotron wave instability in the corona and origin of solar radio emission with fine structure. III. Origin of zebra-pattern / V.V. Zheleznyakov, E.Y. Zlotnik // Solar Physics. – 1975. – Vol. 44. – P. 461–470. – URL: https://doi.org/10.1007/BF00153225.

[124] *Zlotnik, E.Y.* Instability of electrons trapped by the coronal magnetic field and its evidence in the fine structure (zebra pattern) of solar radio spectra // Solar Physics. – 2013. – Vol. 284. – P. 579–588. – URL: https://doi.org/10.1007/s11207-012-0151-1.

[125] *Benáček, J.* Double plasma resonance instability as a source of solar zebra emission / J. Benáček, M. Karlický // Astronomy and Astrophysics. – 2018. – Vol. 611, No. A60. – P. 1–7. – URL: https://doi.org/10.1051/0004-6361/201731424.

[126] *O'Neil, T.M.* Collisionless damping of nonlinear plasma oscillations // Physics of Fluids. – 1965. – Vol. 8. – P. 2255–2262. – URL: https://doi.org/10.1063/1.1761193.

[127] *Karpman, V.I.* Effects of nonlinear interaction of monochromatic waves with resonant particles in the inhomogeneous plasma / V.I. Karpman, J.N. Istomin, D.R. Shklyar // Physica Scripta. – 1975. – Vol. 11, No. 5. – P. 278–284. – URL: https://doi.org/10.1088/0031-8949/11/5/008.

[128] *Shklyar, D.R.* Model expressions for refractive indices of electron waves in cold magnetoactive plasma of arbitrary density / D.R. Shklyar, N.S. Artekha // Fundamental Plasma Physics. – 2024. – Vol. 10. – Art. 100053. – URL: https://doi.org/10.1016/j.fpp.2024.100053.

[129] *Vedenov, A.* Quasi-linear theory of plasma oscillations / A. Vedenov, E. Velikhov, R. Sagdeev // Nuclear Fusion, Supplement. – 1962. – Part 2. – P. 465–475.

[130] *Drummond, W.* Non-linear stability of plasma oscillations / W. Drummond, D. Pines // Nuclear Fusion, Supplement. – 1962. – Part 3. – P. 1049–1058.

[131] *Nunn, D.* A theory of VLF emissions // Planetary and Space Science. – 1971. – Vol. 19, No. 9. – P. 1141–1167.

[132] *Xie, H.-Sh.* Generalized plasma dispersion function: One-solve-all treatment, visualizations, and application to Landau damping // Physics of Plasmas. – 2013. – Vol. 20. – Art. 092125. – URL: https://doi.org/10.1063/1.4822332.

[133] *Astfalk, P.* LEOPARD: A grid-based dispersion relation solver for arbitrary gyrotropic distributions / P. Astfalk, F. Jenko // Journal of Geophysical Research: Space Physics. – 2017. – Vol. 122, No. 1. – P. 89–101. – URL: https://doi.org/10.1002/2016JA023522.

[134] ALPS: The arbitrary linear plasma solver / D. Verscharen, K.G. Klein, B.D.G. Chandran [et al.] // Journal of Plasma Physics. – 2018. – Vol. 84, No. 4. – Art. 905840403. – URL: https://doi.org/10.1017/S0022377818000739.

[135] Инкременты свистовых волн в магнитосфере по измерениям потоков энергичных электронов на спутнике Van Allen Probe A / Д.Р. Шкляр, Е.Е. Титова, Ю. Маннинен, Т.В. Романцова // Геомагнетизм и аэрономия. – 2020. – Т. 60, вып. 1. – С. 49–60. – URL: https://doi.org/10.31857/S0016794020010137.

[136] Investigation of electron distribution functions associated with whistler waves at dipolarization fronts in the Earth's magnetotail: MMS observations / E.E. Grigorenko, A.Y. Malykhin, D.R. Shklyar [et al.] // Journal of Geophysical Research: Space Physics. – 2020. – Vol. 125, No. 9. – Art. e2020JA028268. – URL: https://doi.org/10.1029/2020JA028268.

[137] *Kennel, C.F.* Limit on stably trapped particle fluxes / C.F. Kennel, H.E. Petschek // Journal of Geophysical Research. – 1966. – Vol. 71, No. 1. – P. 1–28.

[138] Амплитудно-частотные характеристики ионно-циклотронных и свистовых волн по данным спутников Van Allen Probes / А.А. Любчич, А.Г. Демехов,

Е.Е. Титова, А.Г. Яхнин // Геомагнетизм и аэрономия. – 2017. – Т. 57, вып. 1. – С. 45–56.

[139] *Биттенкорт, Ж.А.* Основы физики плазмы / Ж.А. Биттенкорт ; пер. с англ. под общ. ред. Л.М. Зеленого ; ред. А.М. Садовский. – М. : Физматлит, 2009. – 583 с.

[140] *Гинзбург, В.Л.* Теоретическая физика и астрофизика. Дополнительные главы / В.Л. Гинзбург. – 2-е изд., перераб. – М. : Наука, 1981. – 504 с.

[141] *Stix, T.H.* Theory of Plasma Waves / T.H. Stix. – New York : Mc Graw-Hill Book Comp., 1962. – 283 p.

[142] *Haselgrove, J.* Oblique ray paths in the ionosphere // Proceedings of the Physical Society Section B. – 1957. – Vol. 70, No. 7. – P. 653–662. – URL: https://doi.org/10.1088/0370-1301/70/7/302.

[143] *Артеха, Н.С.* Кинетическое описание свистовой волны, распространяющейся в плазме вдоль магнитного поля / Н.С. Артеха, Д.Р. Шкляр // Физика плазмы. – 2022. – Т. 48. – С. 613–627. – URL: https://doi.org/10.31857/S0367292121100413.

[144] *Бейтмен, Г.* Таблицы интегральных преобразований : Т. 1. Преобразования Фурье, Лапласа, Меллина / Г. Бейтмен, А. Эрдейи ; При участии В. Магнуса [и др.]. – М. : Наука, 1969. – 343 с.

[145] *Свешников, А.Г.* Теория функций комплексной переменной / А.Г. Свешников, А.Н. Тихонов. – 6-е изд., стер. – М. : Физматлит, 2010. – 336 с.

[146] *Владимиров, В.С.* Уравнения математической физики / В.С. Владимиров. – 5-е изд., доп. – М.: Наука, 1988. – 512 с.

[147] The magnetic electron ion spectrometer (MagEIS) instruments aboard the Radiation Belt Storm Probes (RBSP) spacecraft / J.B. Blake, P.A. Carranza, S.G. Claudepierre [et al.] // Space Science Reviews. – 2013. – Vol. 179, No. 1–4. – P. 383–421. – URL: https://doi.org/10.1007/s11214-013-9991-8.

[148] *Артеха, Н.С.* Дисперсионные характеристики низкочастотных электронных волн в магнитоактивной плазме произвольной плотности / Н.С. Артеха, Д.Р. Шкляр // Физика плазмы. – 2023. – Т. 49. – С. 1127–1139. – URL: https://doi.org/10.31857/S0367292123600838.

[149] *Vas'kov, V.V.* Resonance instability of small-scale plasma perturbations / V.V. Vaskov, A.V. Gurevich // Sov. Phys. JETP. – 1977. – Vol. 46, No. 3. – P. 487–494.

[150] *Гуревич, А.В.* Нелинейные явления в ионосфере // УФН. – 2007. – Т. 177, № 11. – С. 1145–1176. – URL: https://doi.org/10.3367/UFNr.0177.200711a.1145.

[151] *Шкляр, Д.Р.* Генерация квазиэлектростатических медленных необыкновенных волн каппа-распределением с конусом потерь / Д.Р. Шкляр, Н.С. Артеха // Физика плазмы. – 2024. – Т. 50, вып. 10. – С. 1205–1221. – URL: https://doi.org/10.31857/S0367292124100063.

[152] *Artekha, N.S.* Relativistic effects in the interaction of electrons with a slow extraordinary wave / N.S. Artekha, D.R. Shklyar // Physics of Plasmas. – 2026. – Vol. 33, No. 6. – Art. 062105. – URL: https://doi.org/10.1063/5.0333261.

[153] *Cannon, P.* Two-dimensional numerical simulation of O-mode to Z-mode conversion in the ionosphere / P. Cannon, F. Honary, N. Borisov // Journal of Geophysical Research: Space Physics. – 2016. – Vol. 121, No. 3. – P. 2755–2782. – URL: https://doi.org/10.1002/2015ja022105.

[154] *Stott, G.F.* Refractive index surfaces // Journal of Atmospheric and Terrestrial Physics. – 1983. Vol. 45, No. 4. – P. 219–229. – URL: https://doi.org/10.1016/s0021-9169(83)80044-0.

[155] *Summers, D.* Plasma microinstabilities driven by loss-cone distributions / D. Summers, R. Thorne // Journal of Plasma Physics. – 1995. – Vol. 53, No. 3. – P. 293–315. – URL: https://doi.org/10.1017/S0022377800018225.

[156] *Градштейн, И.С.* Таблицы интегралов, сумм, рядов и произведений / И.С. Градштейн, Д.М. Рыжик. – 4-е изд., перераб. – М. : Физматгиз, 1963. – 1100 с.

[157] *Shklyar, D.R.* Nonlinear interaction between a resonance-mode (k = 0) wave and energetic plasma particles // Journal of Plasma Physics. – 2009. – Vol. 75. – P. 319–335. – URL: https://doi.org/10.1017/S0022377808007496.

[158] *Shklyar, D.R.* Generation of UHR waves as inferred from wave and electron flux measurements by Van Allen Probes / D.R. Shklyar, E.E. Titova, N.S. Artekha // Journal of Geophysical Research: Space Physics. – 2025. – Vol. 130. – Art. e2025JA033815. – URL: https://doi.org/10.1029/2025JA033815.

[159] *Albert, J.M.* Gyroresonant interactions of radiation belt particles with a monochromatic electromagnetic wave // Journal of Geophysical Research: Space Physics. – 2000. – Vol. 105. – P. 21191–21209. – URL: https://doi.org/10.1029/2000JA000008.

[160] *Chirikov, B.V.* A universal instability of many-dimensional oscillator systems // Physics Reports. – 1979. – Vol. 52. – P. 263–379. – URL: https://doi.org/10.1016/0370-1573(79)90023-1.

[161] Excitation of high-frequency waves with mixed polarization by streaming energetic electrons / L.C. Lee, C.S. Wu, H.P. Freund [et al.]. // Journal of Plasma Physics. – 1979. – Vol. 22. – P. 277–288.

[162] Kinetic theory of plasma waves in a magnetic field / D.E. Baldwin, I.B. Bernstein, M.P.H. Weenink // Advances in plasma physics. – 1969. – Vol. 3. – P. 1–125.

[163] *Rönnmark, K.* Quantitative methods for waves in space plasmas // Space Science Reviews. – 1990. – Vol. 54. – P. 1–73. – URL: https://doi.org/10.1007/BF00168020.

[164] Helium, Oxygen, Proton, and Electron (HOPE) mass spectrometer for the Radiation Belt Storm Probes Mission / H.O. Funsten, R.M. Skoug, A.A.

Guthrie [et al.] // Space Science Reviews. – 2013. – Vol. 179, No. 1–4. – P. 423–484. – URL: https://doi.org/10.1007/s11214-013-9968-7.

[165] Experimental study of the relationship between energetic electrons and ELF waves observed on board GEOS: A support to quasi-linear theory / N. Cornilleau-Wehrlin, J. Solomon, A. Korth, G. Kremser // Journal of Geophysical Research. – 1985. – Vol. 90, No. A5. – P. 4141–4154. – URL: https://doi.org/10.1029/ja090ia05p04141.