на правах рукописи

Хацимовский Владимир Михайлович

Дискретная квантовая гравитация в формализме Редже

01.04.02 - теоретическая физика
01.01.03 - математическая физика

Автореферат

диссертации на соискание ученой степени
доктора физико-математических наук

Новосибирск 2009

Работа выполнена в Институте ядерной физики
им. Г.И. Будкера СО РАН

ОФИЦИАЛЬНЫЕ ОППОНЕНТЫ:

БЕЛАВИН Александр Абрамович	доктор физико-математических наук, Институт теоретической физики им. Л.Д. Ландау РАН, п. Черноголовка Московской области.
ЛИПАТОВ Лев Николаевич	член-корреспондент РАН, Институт ядерной физики им. Б.П. Константинова РАН, г. Санкт-Петербург.
НОВИКОВ Виктор Александрович	доктор физико-математических наук, Институт теоретической и экспериментальной физики им. А.И. Алиханова, ГНЦ РФ, г. Москва.
ВЕДУЩАЯ ОРГАНИЗАЦИЯ:	Московский инженерно-физический институт, г. Москва.

Защита диссертации состоится "______"________________ 2009г. в "_____ " часов на заседании диссертационного совета Д.002.113.03 в Институте Космических Исследований РАН.

Адрес: 117997, г. Москва, ул. Профсоюзная 84/32

С диссертацией можно ознакомиться в библиотеке ИКИ РАН.

Автореферат разослан "______"________________ 2009г.

Ученый секретарь
диссертационного совета
кандидат физ.-мат. наук   Т.М. Буринская

ОБЩАЯ ХАРАКТЕРИСТИКА РАБОТЫ

Актуальность темы

Квантовая теория гравитации (конкретно, общей теории относительности, ОТО) является неперенормируемой теорией: подход в рамках теории возмущений, в которой в настоящее время мы только и умеем последовательно рассматривать квантовую теорию поля, неэффективен из-за сколь угодно больших, неустранимых расходимостей, происходящих из области малых расстояний. Разложение в ряд теории возмущений идёт по степеням константы, длины Планка, $l_{\rm Pl}^2 = G\hbar/c^3 \approx (1,6 \cdot 10^{-33}\text{см})^2$ размерности $(\text{длина})^2$ или $(\text{импульс})^{-2}$, построенной из константы Ньютона G, постоянной Планка $\hbar$ и скорости света c. Диаграммы теории возмущений, описывающие взаимодействие квантов тех или иных полей с виртуальными гравитонами (а в силу универсальности гравитационного взаимодействия, с гравитонами взаимодействуют все поля), расходятся на малых расстояниях или, что то же, при больших импульсах. Если регуляризовать эти вклады введением предела интегрирования по импульсам $\Lambda < \infty$, то степень n в значении диаграммы $\sim \Lambda^n$ должна расти с ростом порядка теории возмущений, чтобы обезразмерить соответствующую степень $l_{\rm Pl}^2$. Если расходимости в первых порядках теории возмущений можно включить в перенормировку нескольких констант теории, в том числе G, более сильные расходимости остаются. Надежда — на выход за рамки теории возмущений, в предположении, что вклады импульсов виртуальных гравитонов от $l_{\rm Pl}^{-1}$ до $\Lambda > l_{\rm Pl}^{-1}$ заведомо не суммируются по теории возмущений. Возможный часто и давно обсуждаемый сценарий в этой связи — наличие фундаментальной длины, то есть подавленность вклада расстояний меньше некого масштаба, а именно $l_{\rm Pl}$ (или подавленность вклада импульсов выше $l_{\rm Pl}^{-1}$). Наличие фундаментальной длины могло бы помочь и в разрешении классических сингулярностей типа чёрных дыр — при этом мы бы имели стабилизацию коллапса на масштабе этой длины. Корректное описание гравитации было бы важно и для других квантованных полей, так как они существуют в пространстве-времени, описываемом ОТО. Это бы позволило ввести в рассмотрение, наряду с перенормируемыми, также и неперенормируемые поля материи. Даже в перенормируемых теориях промежуточно получаются бесконечные величины, такие как электромагнитный вклад в массу электрона или средняя плотность энергии $[E^2(x)+H^2(x)]/8\pi$ вакуума электромагнитного поля. Хотя процедура перенормировки избавляет нас от расходимостей в конечном ответе, всё же в полностью последовательной физической теории их не должно быть вообще, как и было бы при наличии фундаментальной длины. Простейший пример теории с фундаментальной длиной — теория поля на решётке, в которой фундаментальная длина — шаг решётки — введён извне. Интерес, однако, представляет возможность получить фундаментальную длину внутри самой теории. Для анализа возможности такого сценария естественно было бы иметь описание гравитации, в котором основной переменной как раз и была бы длина. С другой стороны, для выхода за рамки теории возмущений, например, при вычислении негауссова функционального интеграла, бывает необходимо иметь вместо континуального числа степеней свободы сколь угодно большое, но дискретное их число. Двумя этими свойствами обладает исчисление Редже, когда вместо произвольного пространства-времени мы рассматриваем его частный случай — пространство-время, составленное из плоских четырёхмерных тетраэдров (4-симплексов) — кусочно-плоское пространство-время. Геометрия такого пространства-времени полностью описывается дискретным набором переменных — длин рёбер. Поскольку любое гладкое пространство-время может быть сколь угодно точно приближено кусочно-плоским, когда характерный размер рёбер тетраэдров стремится к нулю, мы не теряем в существенном гравитационных степеней свободы, когда ограничиваемся рассмотрением кусочно-плоской геометрии.

Цель и научные задачи работы

Основная цель — изучение исчисления Редже в качестве кандидата на роль самосогласованного описания гравитации с наличием фундаментальной длины. Самосогласованность описания предполагает, что квантовые средние длин рёбер не равны бесконечности либо нулю (последний случай означал бы возврат к непрерывной теории). Если к тому же квантовое распределение вероятностей значений длин заметно отлично от нуля только вблизи определённых значений (порядка планковской длины, как единственного размерного параметра в задаче), то мы получим и эффект фундаментальной длины как в теории на решётке, с тем отличием, что решётка — динамическая, то есть длины, играющие роль шага, сами являются полевыми переменными. Для достижения указанной цели ставится задача изучения возможных подходов к квантовому описанию исчисления Редже, а также (и в том числе) изучение свойств, классических (лагранжев и гамильтонов формализм) и квантовых следствий формулировки, основанной на предлагаемом нами представлении действия гравитации с использованием матриц вращений как независимых переменных. Основными подходами к квантованию дискретной теории могут быть операторное квантование в пределе непрерывного времени либо подход в рамках функционального интеграла. В свою очередь, вид функционального интеграла может определяться с помощью разных исходных постулатов. Ставятся задачи изучить следующие подходы к квантовому исчислению Редже.

1. Каноническое операторное квантование. Для этого осуществляется переход к непрерывному времени и строится гамильтонов формализм с использованием матриц вращений как независимых переменных.

2. Определение функционального интеграла в исчислении Редже через определение дискретно-мерной аппроксимации элемента интегрирования континуальной размерности.

3. Выделение из континуального элемента интегрирования объёма калибровочной группы, то есть вычисление фактора Фаддеева-Попова, и за-

тем вычисление функционального интеграла в частном случае геометрии Редже.

4. Определение функционального интеграла внутри исчисления Редже, без обращения к непрерывной теории. Применяется формализм с использованием матриц вращений как независимых переменных. Функциональный интеграл определяется требованием того, чтобы он переходил в каноническую форму всякий раз, когда осуществляется переход к пределу непрерывного времени вдоль какой-либо из координат.

Научная новизна

Из наиболее важных результатов можно отметить следующие.

1. Предложено точное представление действия Редже с использованием матриц связностей, позволившее затем явно найти лагранжиан и, в конечном счете, провести квантование гравитации в формализме Редже.

2. Найдено, что в операторном формализме (в исчислении Редже с непрерывным временем) элементарная площадь Редже обладает дискретным спектром (во времениподобной области).

3. Найдено, что непрерывные поля материи плохо определены в исчислении Редже на квантовом уровне и должны быть дискретизованы. В сочетании с другим результатом, показывающим, что средняя элементарная длина - порядка длины Планка, это означает, что квантовая гравитация в формализме Редже является естественным ультрафиолетовым регулятором для полей материи, наподобие решетки с шагом порядка длины Планка.

4. Предложен подход к фиксированию формы дискретного функционального интеграла, основанный на соответствии с каноническим функциональным интегралом в пределе непрерывного времени. В этом подходе рассматривается квантование исчисления Редже в расширенном конфигурационном пространстве с независимыми тензорами площадок, получены конечные вакуумные средние площадей (в единицах планковского масшта-

ба 10^{-33} см).

5. Предложен подход, трактующий исчисление Редже с независимыми площадками как систему с разрывной метрикой, индуцированной на гранях 4-мерных тетраэдров. В рамках этого подхода квантовое распределение вероятностей площадей в обычном исчислении Редже получается путём наложения условий непрерывности индуцированной на гранях метрики. В конечном счёте это приводит к элементарным длинам (длины рёбер Редже) сосредоточенным вблизи планковского масштаба.

Практическая ценность результатов работы

Полученные в данной работе результаты играют важную роль для изучения структуры пространства-времени, как с теоретической, так и с экспериментальной точек зрения. В теоретическом аспекте возникает возможность построения конечной квантовой теории гравитации вместе с полями материи, в которой хорошо определены и конечны амплитуды физических процессов с учетом эффектов квантовой гравитации. В экспериментальном аспекте, существование ненулевой элементарной длины должно привести к экспериментально наблюдаемым эффектам, таким, как модификация дисперсионного соотношения для космических частиц высоких энергий или флуктуация длин, проявляющаяся в шумах при измерении длин лазерным интерферометром. Возможность соответствующих экспериментов, хотя и требующая более высокого технологического уровня, чем существующий в мире сейчас, уже обсуждается в ряде работ.

Достоверность полученных результатов

Выполненные в работе исследования опираются на использование канонических методов теоретической физики, функционального анализа и теории функций комплексной переменной, методов канонического квантования и континуального интегрирования. Подавляющая часть результатов получена в аналитической форме, что даёт возможность ясно интерпретировать полученные эффекты.

На защиту выносится

1. Предложено точное представление действия Редже с использованием матриц связностей (конечных вращений) и тензоров площадок (треугольников) как независимых переменных. Это дискретный аналог представления Картана-Вейля для действия Эйнштейна в непрерывной ОТО, и его использование значительно упрощает вид действия и его анализ.

2. В пределе непрерывного времени найдены лагранжиан и гамильтониан в исчислении Редже. Изучены следствия операторного квантования в полученной гамильтоновой формулировке, в частности, наличие дискретного спектра площадей треугольников в исчислении Редже с непрерывным временем (и дискретными остальными тремя координатами).

3. Исследованы поля материи в геометрии Редже. Найдено, что непрерывные поля материи плохо определены в 4-мерном исчислении Редже на квантовом уровне из-за δ-функционного распределения кривизны и потому должны быть дискретизованы.

4. В исчислении Редже с независимыми матрицами связностей и независимыми тензорами площадок найден вид функционального интеграла, который в непрерывном пределе вдоль любой из координат сводится к канонической (гамильтоновой) форме функционального интеграла, в котором роль времени играет эта координата. (Независимость тензоров площадок означает формальное описание, в котором, вообще говоря, длина того же самого ребра может быть разной в разных 4-мерных тетраэдрах, его содержащих.) Найдены конечные, порядка планковского масштаба, вакуумные средние произведений компонент тензоров площадок с помощью этого функционального интеграла.

5. Исчисление Редже с независимыми тензорами площадок рассмотрено как система с разрывной метрикой (индуцированной на гранях четырёхмерных тетраэдров). Функциональный интеграл в обычном исчислении Редже найден из функционального интеграла в исчислении Редже с независимыми тензорами площадок путём наложения условий непрерывности

индуцированной на гранях метрики.

6. Рассмотрено вероятностное распределение площадей (длин), следующее из найденного функционального интеграла в исчислении Редже, и найдено, что вероятностное распределение длин сконцентрировано вокруг средних значений порядка планковского масштаба.

Апробация работы

Работы, положенные в основу диссертации, докладывались на сессиях Отделения ядерной физики РАН, международной гравитационной конференции в Москве (2001 г.), обсуждались на семинарах Математического института им. В.А. Стеклова (г. Москва), Института теоретической физики им.Л.Д. Ландау РАН (п. Черноголовка), Санкт-Петербургского отделения Математического института им. В.А. Стеклова (г. Санкт-Петербург), теоретического отдела Института Ядерной Физики им. Г.И. Будкера СО РАН (г.Новосибирск), были поддержаны грантами Минобразования E00-3.3-148, РФФИ 00-15-96811-а, 01-02-16898-а, 03-02-17612-а, 05-02-16627-а, 08-02-00960-а.

Публикации

Основные результаты диссертации опубликованы в работах [23, 29, 30, 31, 36, 38, 39, 55, 68, 69, 71, 72, 74, 75, 76, 78]

Личный вклад автора. Все результаты, изложенные в диссертации, получены автором самостоятельно.

Структура и объём диссертации. Диссертация состоит из Введения, пяти глав и Заключения, изложена на 177 страницах машинописного текста, содержит 87 наименований библиографии.

СОДЕРЖАНИЕ РАБОТЫ

Во Введение обсуждается исчисление Редже как возможное средство при построении квантовой теории гравитации. Исчисление Редже — это ОТО для кусочно-плоского пространства-времени [1]. Кусочно-плоское пространство-время состоит из плоских 4-мерных тетраэдров, обозначаемых σ^4 — частный случай n-симплекса σ^n (так что σ^3 — обычный тетраэдр, σ^2 — треугольник, σ^1 — ребро, σ^0 — вершина). Действие Эйнштейна на кусочно-плоском пространстве-времени имеет вид

$$\frac{1}{2}\int R\sqrt{g}\mathrm{d}^4x = \sum_{\sigma^2}\alpha_{\sigma^2}A_{\sigma^2}, \tag{1}$$

где A_{σ^2} - площадь треугольника σ^2, α_{σ^2} - угловой дефект на σ^2, то есть 2π минус сумма гипердвухгранных углов всех 4-симплексов, сходящихся в σ^2, а суммирование идёт по всем σ^2. Использованы евклидовы обозначения. Ситуации, специфичные для минковского пространства-времени, оговариваются в работе специально.

В первой главе изучено представление действия в исчислении Редже с использованием матриц конечных вращений или связностей. Это дискретный аналог записи действия Эйнштейна в форме Картана-Вейля:

$$\frac{1}{2}\int R\sqrt{g}\mathrm{d}^4x = \frac{1}{8}\int \epsilon_{abcd}\epsilon^{\lambda\mu\nu\rho}e^a_\lambda e^b_\mu[\partial_\nu + \omega_\nu, \partial_\rho + \omega_\rho]^{cd}\mathrm{d}^4x. \tag{2}$$

Здесь правая часть сводится к левой как функции метрики $g_{\lambda\mu} = e^a_\lambda e_{a\mu}$ при подстановке в качестве связности $\omega^{ab}_\lambda = -\omega^{ba}_\lambda$ её выражения через тетраду e^a_λ посредством уравнений движения для ω^{ba}_λ.

Дискретные аналоги связности и кривизны впервые рассмотрены в исчислении Редже Фрёлихом [2]. Дискретный аналог формы Картана-Вейля действия в исчислении Редже с использованием вместо ω^{ab}_λ матриц конечных вращений или связностей Ω_{σ^3} (SO(4) или SO(3,1)), заданных на тетраэдрах σ^3, имеет вид

$$S(v,\Omega) = \sum_{\sigma^2}|v_{\sigma^2}|\arcsin\frac{v_{\sigma^2}\circ R_{\sigma^2}(\Omega)}{|v_{\sigma^2}|}, \tag{3}$$

где $v_{\sigma^2 ab} = \epsilon_{abcd}l^c_1 l^d_2/2$ - тензор площадки (треугольника σ^2, построенного на векторах l^a_1, l^a_2), а для двух тензоров A, B мы определили $A\circ B = \frac{1}{2}A^{ab}B_{ab}$, $|A| = (A\circ A)^{1/2}$, в частности, $|v_{\sigma^2}|$ - площадь треугольника σ^2; $R_{\sigma^2}(\Omega)$ - матрица кривизны, произведение связностей Ω_{σ^3} (или $\Omega^{\mathrm{T}}_{\sigma^3}$) для σ^3, содержащих

σ^2, вдоль пути, охватывающего σ^2. Смысл (3) - на уравнениях движения для связностей Ω_{σ^3} оно сводится к действию Эйнштейна для пространства-времени Редже (1). Этот факт и само представление (3) изучены в нашей работе [3].

Более детально, есть варианты представления действия Редже, связанные с представлением антисимметричных тензоров и вращений в 4-мерном пространстве-времени как пар 3-мерных векторов и вращений. Ситуация подобна имеющейся в электродинамике, где вместо электромагнитного тензора F_{ab} можно рассматривать векторы $\vec{E}+i\vec{H}$ или $\vec{E}-i\vec{H}$. Точно так же из тензора площадки $v_{\sigma^2 ab}$ образуем т. н. само- и антисамодуальный векторы площадки ${}^+\boldsymbol{v}_{\sigma^2}$ и ${}^-\boldsymbol{v}_{\sigma^2}$. Повороты Ω сводятся к некоторым поворотам этих векторов: ${}^+\boldsymbol{v}_{\sigma^2} \rightarrow {}^+\Omega\, {}^+\boldsymbol{v}_{\sigma^2}$, ${}^-\boldsymbol{v}_{\sigma^2} \rightarrow {}^-\Omega\, {}^-\boldsymbol{v}_{\sigma^2}$ с соответствующими матрицами ${}^+\Omega$, ${}^-\Omega$. Более того, можно перейти к 2-мерным матрицам, если вместо вращений 3-мерных векторов рассматривать вращения самих (анти-)самодуальных тензорных частей, на которые разлагается $v_{\sigma^2 ab}$,

$$v^{ab} = {}^+v^{ab} + {}^-v^{ab}, \quad {}^\pm v_{ab} \equiv \frac{1}{2}\, {}^\pm v^k\, {}^\pm\Sigma_{kab}. \tag{4}$$

Здесь базисные матрицы $i\,{}^\pm\Sigma_{kab}$ удовлетворяют алгебре матриц Паули. Соответственно, ${}^\pm v$, ${}^\pm\Omega$ можно рассматривать как 2×2 матрицы (${}^\pm\Omega$ — из группы SU(2)). Если в (3) под v, Ω подразумевать только (анти-)самодуальные части, можно показать, что на уравнениях движения для связностей получим ровно половину действия Редже [3]. Представление действия Редже при произвольных связностях запишем как сумму само- и антисамодуальных частей (в минковском случае это даёт вещественную величину, так как данные части взаимно комплексно сопряжены),

$$S(v,\Omega) = \sum_{\sigma^2} \sqrt{{}^+\boldsymbol{v}^2_{\sigma^2}}\arcsin\frac{{}^+v_{\sigma^2} \circ R_{\sigma^2}({}^+\Omega)}{\sqrt{{}^+\boldsymbol{v}^2_{\sigma^2}}} + \sum_{\sigma^2} \sqrt{{}^-\boldsymbol{v}^2_{\sigma^2}}\arcsin\frac{{}^-v_{\sigma^2} \circ R_{\sigma^2}({}^-\Omega)}{\sqrt{{}^-\boldsymbol{v}^2_{\sigma^2}}}. \tag{5}$$

В уравнении (5) матрицы ${}^\pm\Omega$ и $R({}^\pm\Omega)$ отвечают SU(2)-вращениям. В терминах самих векторов ${}^+\boldsymbol{v}_{\sigma^2}$ и ${}^-\boldsymbol{v}_{\sigma^2}$ (то есть, в представлении SO(3)) это будут вращения на углы, вдвое бóльшие. С учётом этого обстоятельства, можно записать

$$S(v,\Omega) = \sum_{\sigma^2} \frac{\sqrt{{}^+\boldsymbol{v}^2_{\sigma^2}}}{2} \arcsin \frac{{}^+\boldsymbol{v}_{\sigma^2} * R_{\sigma^2}({}^+\Omega)}{\sqrt{{}^+\boldsymbol{v}^2_{\sigma^2}}} + \sum_{\sigma^2} \frac{\sqrt{{}^-\boldsymbol{v}^2_{\sigma^2}}}{2} \arcsin \frac{{}^-\boldsymbol{v}_{\sigma^2} * R_{\sigma^2}({}^-\Omega)}{\sqrt{{}^-\boldsymbol{v}^2_{\sigma^2}}}. \quad (6)$$

Здесь $\boldsymbol{v} * R \equiv \frac{1}{2} v^a R^{bc} \epsilon_{abc}$ для 3-мерного вектора $\boldsymbol{v}$ и 3×3-матрицы R и для симметрии взята полусумма само- и антисамодуального представлений. Представления (5) и (6) приведены в наших работах [4, 5].

Действия (3), (5) и (6) сводятся к одному и тому же действию Редже (1) на уравнениях движения для связностей Ω; с независимыми же связностями это *разные* выражения (в то же время их непрерывные аналоги, хоть и с независимыми связностями, тождественно сводятся к одной и той же форме Картана-Вейля (2)).

Во второй главе рассмотрено исчисление Редже в пределе непрерывного времени, найден лагранжиан, исследована каноническая структура теории. Переход к пределу непрерывного времени означает сплющивание симплексов вдоль некоторой координаты, принятой за время t. Этот предельный переход изучался в работах [6, 7, 8, 9]. Источник трудностей, не позволивших решить до конца поставленную задачу в этих работах, состоит в сингулярном характере описания симплексов с помощью длин рёбер, когда размеры вдоль некоторого направления стремятся к нулю. Указанная трудность как раз и преодолевается расширением набора переменных теории путём добавления новых независимых переменных — матриц связности. В рамках такой постановки задачи несингулярный предел существует, если каждый симплекс содержит бесконечно малое ребро — тогда 4-мерная дискретная геометрия Редже конструируется из 3-мерных сечений-геометрий Редже сходной структуры (нумеруемых координатой t с шагом $\varepsilon \to 0$) путём соединения каждой вершины 3-мерного сечения с соответствующей вершиной соседнего сечения и с её соседями в этом сечении. Расстояние между соответствующими вершинами соседних сечений $O(\varepsilon)$. Лагранжиан исследовался в наших работах [10, 11, 12] и имеет вид

$$L = \sum_{\sigma^2} \pi_{\sigma^2} \circ \Omega^{\mathrm{T}}_{\sigma^2} \dot{\Omega}_{\sigma^2} - \sum_{\alpha} \lambda_\alpha \Phi_\alpha(\pi, \Omega). \tag{7}$$

Здесь π_{σ^2} обозначает тот же тензор v_{σ^2}, но для треугольников 3-мерного сечения σ^2, по которым идёт суммирование в первом, кинетическом слагаемом. Матрица Ω_{σ^2} относится к призме с основанием σ^2 между двумя соседними сечениями (а не к отдельному тетраэдру σ^3, как в полностью дискретном случае (3)). Нединамические переменные совокупно обозначены λ_α и связаны с компонентами остальных тензоров площадок и связностей.

Таким образом, тензоры площадок и связности канонически сопряжены. В частности, времениподобные компоненты площадок сопряжены евклидовым поворотам, которые компактны. Поэтому в непрерывном времени эти площадки имеют дискретный спектр [13], подобно тому, как в квантовой механике момент импульса имеет дискретный спектр из-за того, что канонически сопряжённый угол поворота меняется в компактной области от 0 до 2π.

Третья глава затрагивает аспекты исчисления Редже, не связанные с представлением тетрада-связность. Обсуждается вопрос, какие поля материи (в широком смысле понимаемые как поля, отличные от гравитации), дискретные или непрерывные, согласованно могут быть описаны в исчислении Редже. Например, в работе [14] рассматривалось поле деформаций системы координат $\xi_\mu(x)$ (фактически, поле духов Фаддеева-Попова, то есть калибровочных степеней свободы, для метрики) как обычное непрерывное поле, определённое в каждой точке пространственно-временного континуума независимо от его значений в других точках. Но поле, как, например, электромагнитное, может быть и дискретизовано в пространстве-времени Редже [15, 16]. Мы обсуждаем влияние дельта-функционных сингулярностей кривизны геометрии Редже (что соответствует бесконечной напряженности гравитационного поля в некоторых точках) на непрерывные поля материи [17], в частности, на поля духов Фаддеева-Попова самого́ гравитационного поля [18], обосновываем необходимость дискретизации полей материи.

Речь идёт о квантовой теории любого непрерывного поля материи во внешнем гравитационном поле. Эффекты рождения и уничтожения виртуальных квантов поля материи эффективно сводятся к появлению некоторого эффективного действия $S_{\rm eff}(\{g_{\lambda\mu}(x)\})$ как функции (точнее, функционала) гравитационного поля. Вопрос в том, будет ли это эффективное действие хорошо определённым (конечным) в пространстве-времени Редже. Так как кривизна имеет дельта-функционный вид, то, например, в случае наличия в эффективном действии билинейных по кривизне членов ответ на этот вопрос априори необязательно будет утвердительным.

Рассматривается функциональная производная от $S_{\rm eff}(\{g_{\lambda\mu}(x)\})$ — среднее тензора энергии-импульса в точке $< T_{\lambda\mu}(x) >= 2\delta S_{\rm eff}/(\sqrt{g}\delta g^{\lambda\mu}(x))$ (функционал метрики). Более конкретно, обсуждается аномальный вклад в *след* тензора энергии-импульса, который имеет чисто квантовую природу (связан с регуляризацией расходящихся диаграмм теории возмущений) и может быть вычислен точно как локальная величина (зависящая от тензора кривизны в той же точке) [19],

$$< T^\lambda_\lambda >= \frac{1}{2880\pi^2}\left\{aC_{\lambda\mu\nu\rho}C^{\lambda\mu\nu\rho} + b\left(R_{\lambda\mu}R^{\lambda\mu} - \frac{1}{3}R^2\right) + c\Delta R + dR^2\right\}, \quad (8)$$

где $C_{\lambda\mu\nu\rho}$ — тензор Вейля (дающая нуль при свёртке по любой паре индексов часть $R_{\lambda\mu\nu\rho}$).

На отдельной конической сингулярности билинейным по кривизне членам в $< T^\lambda_\lambda >$ придаётся смысл с помощью некоторой процедуры перенормировки. Именно, в некоторых координатах x, y, u, v коническую сингулярность можно расположить в плоскости $u = 0$, $v = 0$, так, что тензор кривизны имеет единственную ненулевую компоненту

$$R_{xyxy} \sim \delta(x)\delta(y). \quad (9)$$

Билинейные инварианты кривизны в $< T^\lambda_\lambda >$ пропорциональны

$$A\delta(x)\delta(y),$$

где A обозначает $\delta(0)\delta(0)$, понимаемое в смысле некоторой регуляризации. Вклад в аномалию следа пропорционален AR и может быть устранён добавлением к действию пропорционального R члена, то есть перенормировкой гравитационной постоянной. Тем самым в случае одной конической сингулярности аномалия следа может быть хорошо определена.

Тем не менее, мы показываем, что на пересечении конических сингулярностей аномалия следа, а значит, и эффективное действие, содержит неустранимые бесконечности. Использование известных величин коэффициентов a, b, c, d в (8) ([19]) для практически важных случаев скалярного, спинорного и векторного полей показывает, что случайных сокращений неустранимых бесконечных слагаемых не происходит, так что эффективное действие в данном случае плохо определено.

К задаче нахождения некоторого эффективного действия в исчислении Редже сводится и определение меры (элемента интегрирования) в функциональном интеграле в исчислении Редже с помощью нормировки по отношению к суперметрике ДеВитта на суперпространстве метрик, развивавшаяся в ряде работ [14, 20, 21, 22]. Подход состоит в следующем. Суперметрика ДеВитта на бесконечно малых вариациях метрики $\delta g_{\lambda\mu}$ выбирается в виде [14]:

$$(\delta g, \delta g) = \int \mathrm{d}^4 x G^{\lambda\mu\nu\rho} \delta g_{\lambda\mu} \delta g_{\nu\rho}, \tag{10}$$

где

$$G^{\lambda\mu\nu\rho} = \frac{1}{2}\sqrt{g}(g^{\lambda\nu}g^{\mu\rho} + g^{\lambda\rho}g^{\mu\nu} - g^{\lambda\mu}g^{\nu\rho}). \tag{11}$$

Суть нормировки меры: интеграл от $\exp(-(\delta g, \delta g))$ (гауссов) по искомой мере должен быть равен 1. Вариация метрики $\delta g_{\lambda\mu} = \delta g^{\mathrm{phys}}_{\lambda\mu} + \nabla_\lambda \xi_\mu + \nabla_\mu \xi_\lambda$ — сумма физической и калибровочной вариации при бесконечно малых вариациях координат ξ_λ (поле духов). Пусть физические степени свободы метрики параметризуются (шестью) величинами $\lambda_\alpha(x)$. Записав искомую меру $N\prod_x\prod_\alpha \mathrm{d}\lambda_\alpha(x)\prod_\mu \mathrm{d}\xi_\mu(x)$, определим фактор N с помощью вышеназванной нормировки. (Бесконечный объём калибровочной группы $\int\prod_x\prod_\mu \mathrm{d}\xi_\mu(x)$, связанной с заменами координат, мы можем впоследствии отбросить, как постоянный фактор.) Вычисление N таким образом сводится к вычислению определителя некоторого дифференциального оператора второго порядка, или, эквивалентно, к вычислению эффективного действия для поля ξ с лагранжевой плотностью, пропорциональной

$$\xi_\lambda(\delta^\lambda_\mu\nabla^2 + R^\lambda_\mu)\xi^\mu. \tag{12}$$

С помощью стандартного подхода [23, 24, 25, 26] мы вычисляем аномальный след тензора энергии-импульса для этого эффективного действия (находим коэффициенты a, b, c, d в (8)) и, как и выше, убеждаемся, что неустранимые бесконечные слагаемые не обращаются в нуль и, более того, не могут сокращаться с бесконечными вкладами полей материи, так как имеют тот же знак.

Таким образом, непрерывные поля материи в исчислении Редже не являются хорошо определёнными объектами. В качестве возможного выхода обсуждается дискретизация полей материи в исчислении Редже.

В четвёртой главе также изучаются аспекты исчисления Редже как теории в терминах только метрики (длин). В работе [27] мы рассматриваем подход, трактующий исчисление Редже как способ придать смысл мере (элементу интегрирования) в континуальном интеграле, известной из непрерывной ОТО как формальное произведение по континуальному числу точек конечномерных мер. Именно, мера рассматривается как (линейный) функционал, ставящий в соответствие некой функции метрики (тоже функционалу, но нелинейному) число — её среднее. Функция, определённая на произвольных метриках, определена, в частности, и на кусочно-плоских метриках. Потребуем, чтобы искомая мера в исчислении Редже совпадала на полной системе пробных функций, определённых на произвольных метриках, с мерой в непрерывной ОТО, вид которой формально известен. В качестве пробных функций естественно взять континуальный аналог плоских волн, тогда речь идёт о континуальном преобразовании Фурье.

Фактически, речь идёт о мере в функциональном интеграле в исчислении Редже, в этом смысле наилучшим образом аппроксимирующей и в то же время доопределяющей меру в непрерывной ОТО. Показано, что существуют две такие меры, определяющиеся через наилучшую аппроксимацию на функциональных плоских волнах, в соответствии с тем, что эти плоские волны могут быть как относительно ковариантного метрического тензора, так и относительно контравариантного. Эти меры во многом напоминают непрерывные, пропорциональные $\prod_{\lambda\geq\mu,x}\mathrm{d}g_{\lambda\nu}(x)$ или $\prod_{\lambda\geq\mu,x}\mathrm{d}g^{\lambda\nu}(x)$ меры, но с переходом от континуума к дискретному числу точек x.

Рассматривается предложенная Мизнером [28] в непрерывной ОТО инвариантная мера,

$$\mathrm{d}\mu_{\mathrm{C}}=\prod_{x}g^{-\frac{5}{2}}\prod_{\lambda\leq\mu}\mathrm{d}g_{\lambda\mu},\quad g\equiv\det\|g_{\lambda\mu}\|. \tag{13}$$

В качестве фундаментального метрического поля выбирается либо $g^{\lambda\mu}$, либо $g_{\lambda\mu}$. В соответствии с этими возможностями существуют две возможности определить на суперпространстве метрик бесконечномерное преобразование Фурье меры, как некий функционал,

$$\hat{\mu}_{\mathrm{C}}(f)=\int e^{ig(f)}\mathrm{d}\mu_{\mathrm{C}}(g), \tag{14}$$

где линейный функционал метрики $g(f)$ имеет вид

$$\int f_{\lambda\mu}g^{\lambda\mu}\sqrt{g}\mathrm{d}^4x\equiv g_1(f) \tag{15}$$

(если поле $g^{\lambda\mu}$ считается фундаментальным)либо

$$\int f^{\lambda\mu}g_{\lambda\mu}\sqrt{g}\mathrm{d}^4x\equiv g_2(f), \tag{16}$$

(если поле $g_{\lambda\mu}$ считается фундаментальным). $f_{\lambda\mu}(x)$ или $f^{\lambda\mu}(x)$ - пробная функция. Естественный выбор для дискретной версии тензора $f\equiv$

f_{R} (на пространстве-времени Редже) - взять его кусочно-постоянным в кусочно-аффинной системе координат, то есть постоянным на каждом из 4-симплексов всякий раз, когда $g_{\lambda\mu}$ постоянен на нём. Естественное описание тензора второго ранга $f_{\lambda\mu}$, постоянного в симплексе σ — компоненты $f_{(AB)}$ вдоль ребра (AB), соединяющего вершины A, B [29]:

$$f_{(AB)} = l^\lambda_{AB} l^\mu_{AB} f_{\lambda\mu}, \quad l^\lambda_{AB} \equiv x^\lambda_A - x^\lambda_B, \tag{17}$$

x^λ_A — координаты вершины A. Для частного случая тензора $g_{\lambda\mu}$ его компонента вдоль ребра совпадает с квадратом длины этого ребра $s_{(AB)}$. Чтобы обеспечить соответствие числа переменных $f_{(AB)}$, Фурье-сопряжённых к метрике, числу независимых переменных $s_{(AB)}$, параметризующих метрику (число рёбер), $f_{\lambda\mu}(x)$ должен параметризоваться величинами $f_{(AB)}$, одними и теми же для всех σ, содержащих данное ребро(AB). Тогда (по формулам работы [29])

$$g_1(f_{\mathrm{R}}) \equiv g_1(\{f_{(AB)}\}) = 2\sum_\sigma \sum_{(AB)\subset\sigma} f_{(AB)} \frac{\partial V_\sigma}{\partial s_{(AB)}} = 2\sum_{(AB)} f_{(AB)} \frac{\partial V}{\partial s_{(AB)}}. \tag{18}$$

Здесь V_σ - это объём σ, $V = \sum_\sigma V_\sigma$ - объём многообразия.

Аналогично, постоянный в каждом 4-симплексе σ контравариантный симметричный тензор второго ранга $f^{\lambda\mu}$ параметризуется набором переменных на рёбрах $f^{(AB)}$:

$$f^{\lambda\mu}(\sigma) = \sum_{(AB)\subset\sigma} f^{(AB)} l^\lambda_{AB} l^\mu_{AB}. \tag{19}$$

С использованием этого анзаца получается

$$g_2(f_{\mathrm{R}}) \equiv g_2(\{f^{(AB)}\}) = \sum_{(AB)} f^{(AB)} s_{(AB)} V_{(AB)}. \tag{20}$$

Здесь объём, ассоциированный с ребром, обозначен

$$V_{(AB)} = \sum_{\sigma\supset(AB)} V_\sigma. \tag{21}$$

Требование совпадения искомой дискретной $\mathrm{d}\mu_\mathrm{R}(\{s_{(AB)}\})$ и непрерывной $\mathrm{d}\mu_\mathrm{C}(\{g_{\lambda\mu}(x)\})$ меры на плоских волнах даёт

$$\int e^{g_1(\{f_{(AB)}\})}\mathrm{d}\mu_\mathrm{R}^{(1)}(\{s_{(AB)}\}) = \int e^{g_1(\{f_{\lambda\mu}(x)\})}\mathrm{d}\mu_\mathrm{C}(\{g_{\lambda\mu}(x)\}) \tag{22}$$

$$\int e^{g_2(\{f^{(AB)}\})}\mathrm{d}\mu_\mathrm{R}^{(2)}(\{s_{(AB)}\}) = \int e^{g_2(\{f^{\lambda\mu}(x)\})}\mathrm{d}\mu_\mathrm{C}(\{g_{\lambda\mu}(x)\}), \tag{23}$$

где $f_{\lambda\mu}$ (или $f^{\lambda\mu}$) связаны с $f_{(AB)}$ (соответственно с $f^{(AB)}$) формулами (17), (19). Правые части (22), (23) факторизуются в поточечные произведения обыкновенных элементарно вычислимых интегралов, пропорциональных $(\det f_{\lambda\mu}(x))^{-\varepsilon}$ или $(\det f^{\lambda\mu}(x))^{-\varepsilon/3}$, где $\varepsilon \to 0$ параметризует регуляризацию меры Мизнера $\prod_x g^{-5/2+\varepsilon}\prod_{\lambda\leq\mu}\mathrm{d}g_{\lambda\mu}$. Поточечные произведения через ещё одну промежуточную регуляризацию, заключающуюся в конечности числа точек x на симплекс σ, сводятся к произведениям по симплексам $\prod_\sigma(\det f(\sigma))^{-\varepsilon}$, $f \equiv f_{\lambda\mu}$ или $f^{\lambda\mu}$ с некоторыми другими соответствующими $\varepsilon \to 0$.

Важный простейший случай — всего один 4-симплекс, точнее, замкнутое пространство-время Редже, состоящее из двух одинаковых, с точностью до отражения, копий одного 4-симплекса σ_1, σ_2 со взаимно отождествлёнными вершинами. В этом случае геометрию Редже можно с равным успехом описать как десятью длинами рёбер, так и десятью компонентами метрики $g_{\lambda\mu}$ в одном из симплексов σ_1, σ_2 при фиксированных координатах вершин. Вышеупомянутые выкладки дают для обоих вариантов $\mathrm{d}\mu_\mathrm{R}^{(1)}$, $\mathrm{d}\mu_\mathrm{R}^{(2)}$ дискретизации меры (13) одно и то же выражение, отличающееся от (13) только отсутствием знака произведения по точкам:

$$\mathrm{d}\mu_\mathrm{R}^{(1)} = \mathrm{d}\mu_\mathrm{R}^{(2)} = (\det\|g_{\lambda\mu}\|)^{-5/2}\prod_{\lambda\leq\mu}\mathrm{d}g_{\lambda\mu}, \tag{24}$$

что представляется естественным и разумным. Для более сложных геометрий $\mathrm{d}\mu_\mathrm{R}^{(1)}$, $\mathrm{d}\mu_\mathrm{R}^{(2)}$ могут различаться.

В пятой главе обсуждается вопрос о том, каким образом определить функциональный интеграл в исчислении Редже с тем, чтобы обеспечить соответствие с каноническим формализмом в пределе непрерывного времени, обсуждавшимся выше. В каноническом формализме мы выделяем переменные p, q — сопряжённые импульсы и координаты, по паре на каждую степень свободы. В квантовой теории системе соответствуют волны вероятности с амплитудой $\exp(iS)$, а амплитуда перехода из точки 1 в точку 2 в фазовом пространстве p, q получается суммированием $\exp(iS)$ по всем траекториям перехода. Более общо, можно определить матричные элементы, в том числе квантовое среднее некой наблюдаемой величины $f(p, q)$,

$$\langle f(p,q)\rangle = \int f(p,q)\exp(iS(p,q))DpDq, \quad DpDq = \prod_t \mathrm{d}p(t)\mathrm{d}q(t), \qquad (25)$$

— интеграл по траекториям, он же функциональный или континуальный.

При переходе от непрерывной теории к дискретной обычно возникают сингулярности в определении функционального интеграла. В непрерывной ОТО деформация координатной сетки в пространстве-времени — преобразование симметрии. Этому соответствует движение вершин в исчислении Редже, но оно является симметрией только в плоском случае. При сколь угодно малом отклонении от плоского случая движение вершин означает реальное изменение геометрии, так что скачкообразно возникают новые степени свободы. Это означает сингулярный характер функционального интеграла, в частности, отсутствие теории возмущений вблизи плоской геометрии. Выход может состоять в снятии геометрических ограничений на тензоры площадок, обусловливающих существование векторов рёбер таких, что $v_{\sigma^2 ab} = \epsilon_{abcd} l_1^c l_2^d / 2$ — тогда в (3) в качестве $v_{\sigma^2 ab}$ фигурируют независимые антисимметричные тензоры. Тем самым мы переходим в расширенное конфигурационное пространство теории, в котором $v_{\sigma^2 ab}$ пробегают максимальный диапазон значений. В этом пространстве классические уравнения движения для (3) приводят к благоприятному для нас решению $R_{\sigma^2}(\Omega) = 1$, когда движение вершин является симметрией. После нахождения через функциональный интеграл распределения вероятностей значений площадок найденную вероятностную меру сужаем на нужный нам физический диапазон значений $v_{\sigma^2 ab}$. Заметим, что идея о том, что наиболее естественные переменные для исчисления Редже - площади треугольников, а не длины рёбер, высказывалась и ранее, например, в работе [30]. Площади трактовались как фундаментальные независимые переменные в работах [31, 32].

Можно поставить задачу найти функциональный интеграл в дискретной теории такой, чтобы в пределе непрерывного времени он переходил в обсуждаемый выше определённый в каноническом формализме (25), независимо от того, какая координата берётся в качестве времени. Мы показываем, что эта задача имеет решение в 3-мерном исчислении Редже [33] и в исчислении Редже (4-мерном) с независимыми тензорами площадок [34]. В последнем для усреднения/взятия матричных элементов величины $f(\{v\},\{\Omega\})$ её надо интегрировать с

$$\exp\left[i\tilde{S}(\{v\},\{\Omega\})\right] \tag{26}$$

по тензорам площадок $\mathrm{d}^3\,{}^+\boldsymbol{v}_{\sigma^2}\mathrm{d}^3\,{}^-\boldsymbol{v}_{\sigma^2}$ и по связностям $\mathcal{D}\,{}^+\Omega_{\sigma^3}\mathcal{D}\,{}^-\Omega_{\sigma^3}$. В показателе экспоненты оказывается $\tilde{S}$, отличающееся от S (5) заменой функции $\arcsin z$ на z. Это неудивительно, так как, с одной стороны, действие $\tilde{S}$ эквивалентно S с точки зрения уравнений движения при независимых тензорах площадок, с другой — именно $\tilde{S}$ автоматически (без применения уравнений движения) оказывается линейным по всем нединамическим переменным λ (см. (7)) в пределе непрерывного времени. А согласно выводу функционального интеграла, именно форма действия $S(p,q,\lambda)$, линейная по нединамическим переменным λ, должна стоять в показателе экспоненты, которую затем интегрируют по совокупности переменных $\mathrm{d}p\mathrm{d}q\mathrm{d}\lambda$. С феноменологической же точки зрения, $\tilde{S}$ само по себе может служить допустимым действием, так как со стремлением к нулю шага триангуляции пространства-времени угловые дефекты стремятся к нулю и могут быть заменены синусами от них, так что $\tilde{S}$ сходится к действию Эйнштейна. Далее, интегрирование идёт не по всем тензорам площадок. В противном случае в силу линейности $\tilde{S}$ по тензорам площадок мы получим произведение дельта-функций от кривизны (если, например, усредняется $f = 1$). Это произведение не определено, так как матрицы кривизны R_{σ^2} для разных σ^2 связаны друг с другом тождествами Бианки. Поэтому часть тензоров площадок фиксируется: по ним нет интегрирования. Эта фиксация в пределе непрерывного времени, соответствия с которым мы и добиваемся, оказывается некоторой фиксацией калибровки.

Рассмотрение в евклидовой области (с возможностью последующего аналитического продолжения в минковскую область) является в ряде отношений более удобным и проводится в бóльшей части работы (в частности, из-за того, что в минковской теории $\mathcal{D}\,{}^{\pm}\Omega$ экспоненциально растут на лоренцевых поворотах, и определение интеграла требует осторожности). При этом контуры интегрирования по тензорам площадок сдвигаем согласно $v_{ab} \to -iv_{ab}$, чтобы экспонента с действием по-прежнему была осциллирующей. Интеграл сходится, но неабсолютно, как это имеет место для функциональных интегралов. Мы фиксируем его исходя из результата усреднения произведений компонент (мономов) тензоров площадок.

Проиллюстрируем свойства указанным образом определённого евклидова интеграла следующим выражением, формально получающимся из обсуждавшейся выше формы функционального интеграла в воображаемом случае только одной площадки.

$$
\begin{aligned}
< f(v) > &= \int f(-iv) e^{i({}^{+}v \circ {}^{+}R + {}^{-}v \circ {}^{-}R)} \mathrm{d}^3\, {}^{+}\boldsymbol{v} \mathrm{d}^3\, {}^{-}\boldsymbol{v} \mathcal{D}\,{}^{+}R \mathcal{D}\,{}^{-}R \\
&= \int f(v) \mathcal{N}(v) \mathrm{d}^3\, {}^{+}\boldsymbol{v} \mathrm{d}^3\, {}^{-}\boldsymbol{v}. \qquad (27)
\end{aligned}
$$

Усредняя функцию только v, мы тем самым интересуемся распределением вероятностей $\mathcal{N}(v)$ значений площади. Интеграл по $\mathcal{D}\,{}^{+}R\mathcal{D}\,{}^{-}R$ напоминает преобразование Фурье единицы, но при больших значениях векторных переменных ${}^{\pm}\boldsymbol{\phi}$ (поворот на ${}^{\pm}\phi = \sqrt{{}^{\pm}\boldsymbol{\phi}^2}$ вокруг оси ${}^{\pm}\boldsymbol{\phi}/{}^{\pm}\phi$), которые параметризуют матрицы ${}^{\pm}R$, эти матрицы и элементы интегрирования $\mathcal{D}\,{}^{\pm}R$ нелинейно зависят от них. Поэтому вместо дельта-функции $\delta^3({}^{+}\boldsymbol{v})\delta^3({}^{-}\boldsymbol{v})$ получим для $\mathcal{N}(v)$ пик ненулевой ширины.

Возьмём в качестве $f(v)$ произведение компонент v. Интеграл по $\mathrm{d}^3\,{}^+\boldsymbol{v}$ $\mathrm{d}^3\,{}^-\boldsymbol{v}$ сводится к производным дельта-функций от (антисимметричных частей) ${}^+R$, ${}^-R$; интегрирование же дельта-функций (по $\mathcal{D}\,{}^+R\mathcal{D}\,{}^-R$) конечно. Конечность интегралов некоторой функции ($\mathcal{N}(v)$) с любыми степенями её аргументов означает, что такая функция должна быть экспоненциально убывающей. Повторить это качественное рассуждение мы можем для любого представления действия Редже, (3), (5) или (6). Вычислить по своим моментам интегралы типа $\mathcal{N}(v)$ в явном виде удаётся для представлений (5) или (6), эффективно 3-мерных. Они выражаются через экспоненциально убывающие спецфункции (модифицированные функции Бесселя) от значений площади. Вид результирующих зависимостей от площади для этих двух представлений аналогичен (различие в основном в типе функций Бесселя). Для определённости, формулы в большей части работы как раз и пишутся в применении к представлению (5). Получаем

$$N(v) = \frac{K_1(\sqrt{{}^+\boldsymbol{v}^2})}{\pi\sqrt{{}^+\boldsymbol{v}^2}}\frac{K_1(\sqrt{{}^-\boldsymbol{v}^2})}{\pi\sqrt{{}^-\boldsymbol{v}^2}}, \qquad K_1(l) = \int\limits_0^{\pi/2} \frac{\mathrm{d}\varphi}{\sin^2\varphi}\, e^{-l/\sin\varphi}, \tag{28}$$

$K_1(l)$ - модифицированная функция Бесселя.

В минковской теории заменяется ${}^\pm\boldsymbol{v}^2 \to -\,{}^\pm\boldsymbol{v}^2$, получается $N(v) = |K_1(\sqrt{-\,{}^+\boldsymbol{v}^2})\pi^{-1}(-\,{}^+\boldsymbol{v}^2)^{-1/2}|^2$, а квадратный корень $\sqrt{z}$ стандартно определён в комплексной плоскости C^1 с разрезом вдоль отрицательной полуоси $\mathrm{Im}z = 0, \mathrm{Re}z \leq 0$, так что $\sqrt{1} = 1$; тогда $\mathrm{Re}\sqrt{z} \geq 0$. Получаем экспоненциальное убывание для обычных, пространственноподобных площадок ($-\,{}^\pm\boldsymbol{v}^2 > 0$). Экспоненциального убывания нет лишь во времениподобной области (${}^\pm\boldsymbol{v}^2 > 0$), только степенное, так как тогда $\mathrm{Re}\sqrt{-\,{}^+\boldsymbol{v}^2} = 0$, но и эта ситуация изменяется для известного в литературе однопараметрического обобщения формы Картана-Вейля непрерывного действия Эйнштейна в терминах тетрады и связности [35, 36, 37, 38]. Оно свелось бы к переопределению тензоров площадок ${}^\pm\boldsymbol{v} \to (1 \pm i/\gamma)\,{}^\pm\boldsymbol{v}$ в представлениях (5), (6) — перед само- и антисамодуальным вкладами появляются коэффициенты $1 \pm i/\gamma$ (γ известен как параметр Барберо-Иммирци), сумма этих вкладов на уравнениях движения для связностей — по-прежнему действие Редже. У аргументов функции Бесселя действительная часть $\Re\sqrt{(i \mp 1/\gamma)^2 \,^{\pm}\boldsymbol{v}^2} > 0$ при $1/\gamma \neq 0$, и убывание экспоненциально.

Зная распределение вероятностей для независимых тензоров площадок, мы сужаем его на реальное конфигурационное пространство зависимых площадок. Так как число рёбер меньше числа треугольников, то теория с независимыми тензорами площадей предполагает неоднозначность длин на стыке соседних 4-симплексов. Мы трактуем такую систему как систему с метрикой, **разрывной** на трёхмерных гранях (тетраэдрах) [39]. Тогда задача состоит в наложении условий существования векторов рёбер в каждом 4-симплексе, соответствующих данным тензорам v_{σ^2} и условий отсутствия разрывов метрики на общих 3-мерных гранях пар 4-симплексов. Результат однозначно фиксируется требованием "отсутствия решёточных артефактов", т. е. максимальной независимости от возможных движений граней. Искомое сужение получается, во-первых, умножением на дельта-функционный фактор, выражающий собой исчезновение разрывов индуцированной на гранях метрики. Этот фактор определён однозначно требованием независимости от выбора реперной тройки векторов, задающих трёхмерную гиперплоскость каждой грани, на которой производится сравнение метрик, индуцированных из двух содержащих грань 4-симплексов. Во-вторых, должен быть дельта-функционный фактор, выражающий собой условия того, что тензоры площадок внутри данного 4-симплекса построены на каких-то векторах рёбер, например, $\epsilon_{abcd}v^{ab}v^{cd} = 0$ [40]. Он также может быть однозначно фиксирован требованием независимости от аффинных преобразований тетрад векторов рёбер в каждом 4-симплексе. По построению, данные факторы инвариантны относительно изменений общего масштаба длин.

Итак, вероятность спадает экспоненциально при больших площадях. Но имеются ещё интегрирования по $\mathrm{d}^6 v_{\sigma^2}$. Пусть x - характерный масштаб площадей в данной области. Если в данной области имеется n площадок, распределение вероятностей имеет вид $(e^{-x}x^{\alpha})^n$. Подсчёт степеней даёт $\alpha > 0$. При большом n это приближается к $\delta(x-\alpha)$. С другой стороны, для конечности теории отсутствие длин меньше некой величины не является необходимым; достаточно иметь достаточно быстрое степенное спадание вероятности, своё для каждого конкретного эффекта.

В Заключении суммированы основные результаты, полученные в настоящей работе:

1. Исчисление Редже сформулировано в терминах векторов рёбер и матриц связностей (конечных вращений). Действие может выражаться через тензоры треугольников и матрицы связностей в разных представлениях. Это аналоги формы Картана-Вейля для действия Эйнштейна в непрерывной ОТО.

2. С использованием этого точного представления удаётся найти хорошо определённый предел непрерывного времени, построить и исследовать канонический формализм исчисления Редже (для действия Редже в терминах только длин это является сингулярной задачей). Рассмотрение теории в пределе непрерывного времени и канонический формализм упрощают анализ проблемы начальных данных в классической теории и необходимы для канонического квантования системы.

3. Найдено, что площади треугольников, составляющих трёхмерное (пространственное) дискретное сечение пространства-времени в исчислении Редже в непрерывном времени, обладают дискретным спектром (во времениподобной относительно локальных индексов области) с величиной кванта порядка планковского масштаба.

4. Рассмотрены поля материи в геометрии Редже. Найдено, что непрерывные поля материи плохо определены в 4-мерном исчислении Редже на квантовом уровне из-за δ-функционного распределения кривизны и потому должны быть дискретизованы.

5. Точно так же найдено, что и непрерывные поля духов Фаддеева-Попова само́й гравитации плохо определены в 4-мерном исчислении Редже на квантовом уровне из-за δ-функционного распределения кривизны. Дискретизуя же эти поля, можно найти, что фактор Фаддеева-Попова в фейнмановском интеграле по путям сингулярен вблизи плоской геометрии. Это означает неприменимость теории возмущений вблизи плоского пространства-времени и физическую неадекватность данного подхода к квантованию (конструирование анзаца Фаддеева-Попова в непрерывной теории с последующим переносом его на дискретный случай).

6. Рассмотрена задача о нахождении вида меры (элемента интегрирования) в функциональном интеграле в исчислении Редже, наилучшим образом аппроксимирующей и в то же время доопределяющей меру в непрерывной ОТО в том смысле, что интегрирование с этой мерой определённых пробных функций метрики ("функциональных плоских волн") даёт тот же результат, что и интегрирование их с мерой в функциональном интеграле непрерывной теории. Показано, что существуют две такие меры (соответственно тому, какая метрика, ко- или контравариантная, берётся за основу), их свойства изучены.

7. Обсуждается исчисление Редже в представлении с матрицами связностей и тензорами площадок. Несингулярная (вблизи плоского пространства-времени) теория возникает при трактовке тензоров площадок как независимых. Найдена форма функционального интеграла, которая в непрерывном пределе вдоль любой из координат сводится к канонической (гамильтоновой) форме функционального интеграла, в котором роль времени играет эта координата. Эта мера приводит к конечным (порядка планковского масштаба) положительно определенным вакуумным средним функций площадей.

8. Мы трактуем теорию с независимыми тензорами площадок как систему с метрикой, **разрывной** на трёхмерных гранях (тетраэдрах). Наложе-

ние условий непрерывности индуцированной на гранях метрики позволяет однозначно определить сужение распределения вероятностей для независимых тензоров площадок на конфигурационное пространство реальных зависимых площадок из требования "отсутствия решёточных артефактов", т. е. максимальной независимости от возможных движений граней.

9. Определяя распределение вероятностей для независимых тензоров площадок из конечных вакуумных средних для произведений их компонент (пункт 7) как экспоненциально убывающее с площадями и сужая это распределение на конфигурационное пространство реальных зависимых тензоров площадок (пункт 8), получаем основной вывод о том, что вероятностное распределение длин сконцентрировано вокруг среднего значения наподобие δ-функции, так что вклад произвольно малых длин подавлен и теория конечна наподобие теории поля на обычной решётке с фиксированным шагом.

Цитируемая литература

[1] Regge T. General relativity theory without coordinates. - Nuovo Cimento, 1961, v. 19, No. 3, p. 558-571.

[2] J. Fröhlich, Regge Calculus and Discretized Gravitational Functional Integrals, I. H. E. S. preprint 1981 (unpublished); Non-Perturbative Quantum Field Theory: Mathematical Aspects and Applications, Selected Papers - World Scientific, Singapore, 1992, pp. 523-545.

[3] Khatsymovsky V.M. Tetrad and self-dual formulations of Regge calculus. - Class. Quantum Grav., 1989, v. 6, No. 12, p. L249-L255.

[4] Khatsymovsky V.M. Feynman path integral in area tensor Regge calculus and correspondence principle. - Phys. Lett., 2004, v. 601B, Nos. 3-4, p. 222-228, gr-qc/0406049.

[5] Khatsymovsky V.M. Feynman path integral in area tensor Regge calculus and positivity. - Phys. Lett., 2004, v. 601B, Nos. 3-4, p. 229-235.

[6] Collins P.A., Williams R.M. Dynamics of the Friedman Universe using Regge calculus. - Phys. Rev. D, 1973, v. 7, No. 4, p. 965-971.

[7] Collins P.A., Williams R.M. Regge-calculus model for the Tolman universe. - Phys. Rev. D, 1974, v. 10, No. 10, p. 3537-3538.

[8] Brewin L. Friedman cosmologies via the Regge calculus. - Class. Quantum Grav., 1987, v. 4, No. 4, p. 899-928.

[9] Brewin L. A continuous time formulation of the Regge calculus. - Class. Quantum Grav., 1988, v. 5, No. 6, p. 839-847.

[10] Khatsymovsky V.M. Regge calculus in the canonical form. - Gen. Rel. Grav., 1995, v. 27, p. 583-603, gr-qc/9310004.

[11] Khatsymovsky V.M. Continuous time Regge gravity in the tetrad-connection variables. - Class. Quantum Grav., 1991, v. 8, No. 6, p. 1205-1216.

[12] Khatsymovsky V.M. On kinematical constraints in Regge calculus. - Class. Quantum Grav., 1994, v. 11, No. 6, p. L91-L95, gr-qc/9311005.

[13] Khatsymovsky V.M. On the quantization of Regge links. - Phys. Lett., 1994, v. 323B, Nos. 3-4, p. 292-295, gr-qc/9311001.

[14] Jevicki A., Ninomiya M. Functional formulation of Regge gravity. - Phys. Rev. D, 1986, v. 33, No. 6, p. 1634-1637.

[15] Sorkin R. The electromagnetic field on a simplicial net. - Journ. Math. Phys., 1975, v. 16, No. 12, p. 2432-2440.

[16] Don Weingarten. Geometric formulation of electrodynamics and general relativity in discrete space-time. - Journ. Math. Phys., 1977, v. 18, No. 1, p. 165-170.

[17] Khatsymovsky V.M. Continuous matter fields in Regge calculus. - Phys. Lett., 2001, v. 504B, No. 4, p. 356-358, gr-qc/0012095.

[18] Khatsymovsky V.M. On the Faddeev-Popov determinant in Regge calculus. - Phys. Lett., 2001, v. 504B, No. 4, p. 359-361, gr-qc/0012097.

[19] Birrell N.D., Davies P.C.W. Quantum Fields in Curved Space. - Cambridge, 1982. (Имеется перевод: Н. Биррелл и П. Девис, Квантованные поля в искривлённом пространстве-времени. - М., Мир, 1984).

[20] Menotti P., Peirano P.P. Faddeev-Popov determinant in 2-dimensional Regge gravity. - Phys. Lett., 1995, v. 353B, No. 4, p. 444-449, hep-th/9503181.

[21] Menotti P., Peirano P.P. Functional integration on two-dimensional Regge geometries. - Nucl. Phys. B, 1996, v. 473, Nos. 1-2, p. 426-454, hep-th/9602002.

[22] Menotti P., Peirano P.P. Diffeomorphism invariant measure for finite-dimensional geometries. - Nucl. Phys. B, 1997, v. 488, No. 3, p. 719-734, gr-qc/0111063.

[23] Романов В.Н., Шварц А.С. Аномалии и эллиптические операторы. - ТМФ, 1979, т. 41, вып. 2, стр. 190-204.

[24] Schwarz A.S. Instantons and fermions in the field of instanton. - Commun. Math. Phys., 1979, v. 64, No. 3, p. 233-268.

[25] Christensen S.M., Duff M.J. Axial and conformal anomalies for arbitrary spin in gravity and supergravity. - Phys. Lett., 1978, v. 76B, No. 5, p. 571-574.

[26] Christensen S.M. Regularization, renormalization, and covariant geodesic point separation. - Phys. Rev. D, 1978, v. 17, No. 4, p. 946-963.

[27] Khatsymovsky V.M. Path integral measure in Regge calculus from the functional Fourier transform. - Phys. Lett., 2002, v. 530B, Nos. 1-4, p. 251-257, gr-qc/0111063.

[28] Misner C.W. Feynman quantization of general relativity. - Rev. Mod. Phys., 1957, v. 29, No. 3, p. 497-509.

[29] Piran T., Williams R.M. Three-plus-one formulation of Regge calculus. - Phys. Rev. D, 1986, v. 33, No. 6, p. 1622-1633.

[30] Rovelli C. Basis of the Ponzano-Regge-Turaev-Viro-Ooguri quantum gravity model is the loop representation basis. - Phys. Rev. D, 1993, v. 48, No. 6, p. 2702-2707, hep-th/9304164.

[31] Barrett J.W., Roček M., Williams R.M. A note on area variables in Regge calculus. - Class. Quantum Grav., 1999, v. 16, No. 4, p. 1373-1376, gr-qc/9710056.

[32] Regge T., Williams R.M. Discrete structures in gravity. - Journ. Math. Phys., 2000, v. 41, No. 6, p. 3964-3984, gr-qc/0012035.

[33] Khatsymovsky V.M. A version of quantum measure in Regge calculus in three dimensions. - Class. Quantum Grav., 1994, v. 11, No. 10, p. 2443-2453, gr-qc/9310040.

[34] Khatsymovsky V.M. Area expectation values in quantum area Regge calculus. - Phys. Lett., 2003, v. 560B, Nos. 3-4, p. 245-251, gr-qc/0212110.

[35] Holst S. Barbero's Hamiltonian Derived from a Generalized Hilbert-Palatini Action. - Phys. Rev. D, 1996, v. 53, p. 5966-5969, gr-qc/9511026.

[36] Barbero J.F., Real Ashtekar Variables for Lorentzian Signature Space-times. - Phys. Rev. D, 1995, v. 51, p. 5507-5510, gr-qc/9410014.

[37] Immirzi G., Quantum Gravity and Regge Calculus. - Nucl. Phys. Proc. Suppl., 1997, v. 57, p. 65-72, gr-qc/9701052.

[38] Fatibene L., Francaviglia M., Rovelli C., Spacetime Lagrangian Formulation of Barbero-Immirzi Gravity. - Class. Quantum Grav., 2007, v. 24, p. 4207-4218, arXiv:0706.1899.

[39] Khatsymovsky V.M. Regge calculus from discontinuous metrics. - Phys. Lett., 2003, v. 567B, Nos. 3-4, p. 288-293, gr-qc/0304006.

[40] Khatsymovsky V.M. Length expectation values in quantum Regge calculus. - Phys. Lett., 2004, v. 586B, Nos. 3-4, p. 411-419, gr-qc/0401053.

Список публикаций автора по теме диссертации:

1. Khatsymovsky V.M. Tetrad and self-dual formulations of Regge calculus. - Class. Quantum Grav., 1989, v. 6, No. 12, p. L249-L255.

2. Khatsymovsky V.M. Feynman path integral in area tensor Regge calculus and correspondence principle. - Phys. Lett., 2004, v. 601B, Nos. 3-4, p. 222-228, gr-qc/0406049.

3. Khatsymovsky V.M. Feynman path integral in area tensor Regge calculus and positivity. - Phys. Lett., 2004, v. 601B, Nos. 3-4, p. 229-235.

4. Khatsymovsky V.M. Regge calculus in the canonical form. - Gen. Rel. Grav., 1995, v. 27, p. 583-603, gr-qc/9310004.

5. Khatsymovsky V.M. Continuous time Regge gravity in the tetrad-connection variables. - Class. Quantum Grav., 1991, v. 8, No. 6, p. 1205-1216.

6. Khatsymovsky V.M. On kinematical constraints in Regge calculus. - Class. Quantum Grav., 1994, v. 11, No. 6, p. L91-L95, gr-qc/9311005.

7. Khatsymovsky V.M. On the quantization of Regge links. - Phys. Lett., 1994, v. 323B, Nos. 3-4, p. 292-295, gr-qc/9311001.

8. Khatsymovsky V.M. The simplest Regge calculus model in the canonical form. - Phys. Lett., 2000, v. 477B, p. 248-252, gr-qc/9912112.

9. Khatsymovsky V.M. Path integral in the simplest Regge calculus model. - Phys. Lett., 2000, v. 484B, p. 160-166, gr-qc/9912111.

10. Khatsymovsky V.M. Continuous matter fields in Regge calculus. - Phys. Lett., 2001, v. 504B, No. 4, p. 356-358, gr-qc/0012095.

11. Khatsymovsky V.M. On the Faddeev-Popov determinant in Regge calculus. - Phys. Lett., 2001, v. 504B, No. 4, p. 359-361, gr-qc/0012097.

12. Khatsymovsky V.M. Path integral measure in Regge calculus from the functional Fourier transform. - Phys. Lett., 2002, v. 530B, Nos. 1-4, p. 251-257, gr-qc/0111063.

13. Khatsymovsky V.M. A version of quantum measure in Regge calculus in three dimensions. - Class. Quantum Grav., 1994, v. 11, No. 10, p. 2443-2453, gr-qc/9310040.

14. Khatsymovsky V.M. Area expectation values in quantum area Regge calculus. - Phys. Lett., 2003, v. 560B, Nos. 3-4, p. 245-251, gr-qc/0212110.

15. Khatsymovsky V.M. Area Regge calculus and continuum limit. - Phys. Lett., 2002, v. 547B, Nos. 3-4, p. 321-327, gr-qc/0206067.

16. Khatsymovsky V.M. Regge calculus from discontinuous metrics. - Phys. Lett., 2003, v. 567B, Nos. 3-4, p. 288-293, gr-qc/0304006.

17. Khatsymovsky V.M. Length expectation values in quantum Regge calculus. - Phys. Lett., 2004, v. 586B, Nos. 3-4, p. 411-419, gr-qc/0401053.

18. Хацимовский В.М. Дискретная квантовая гравитация в формализме исчисления Редже. - ЖЭТФ, 2005, т.128, вып. 3(9), стр.489-496, gr-qc/0506071.

19. Khatsymovsky V.M. On the possibility of finite quantum Regge calculus. - Phys. Lett., 2007, v. 651B, Nos. 4-5, p. 388-393, gr-qc/0612143.

20. Khatsymovsky V.M. Path integral in area tensor Regge calculus and complex connections. - Phys. Lett.,2006, v. 637B, Nos.4-5, p.350-355, gr-qc/0602116.