Нижеследующий материал представлен к докладу Тельпиза Мирона Ивановича на научном семинаре ИКИ РАН от 07.06.2001. Он является копией параграфов (*первая цифра — номер главы, вторая — номер параграфа, третья — номер раздела в параграфе*) из книги Тельпиза М.И. **"Принцип позиционности для счисления и исчисления-функций"**. Следует иметь ввиду, что дополнением к этому материалу может служить материал из web site *http://www.tarusa.ru/~mit*, который работает с 01.03.2001 г.

1.2 Простой и сложный позиционные s–операторы

Арифметизация функций алгебры логики будет осуществлена на базе двоичной системы счисления, однако для того, чтобы не писать слишком длинные слова, мы будем использовать наряду с двоичной $\mathbf{Zh}$ четверичную $\mathbf{Vh}$, восьмиричную $\mathbf{Ah}$ и шестнадцатеричную $\mathbf{Sh}$ системы счисления. Чтобы не указывать каждый раз на систему счисления, в которой записаны цифры, примем $\boldsymbol{\theta}$ для двоичного нуля и $\bar{\boldsymbol{\theta}}$ для двоичной единицы и

$$Zh \rightleftharpoons \{\boldsymbol{\theta},\, \bar{\boldsymbol{\theta}}\}, \quad Vh \rightleftharpoons \{\nu,\, \tau,\, \bar{\tau},\, \bar{\nu}\} \rightleftharpoons \{\boldsymbol{\theta\theta},\, \bar{\boldsymbol{\theta}}\boldsymbol{\theta},\, \boldsymbol{\theta}\bar{\boldsymbol{\theta}},\, \bar{\boldsymbol{\theta}}\bar{\boldsymbol{\theta}}\},$$

$$Ah \rightleftharpoons \{\omega,\, \downarrow,\, \oplus,\, /,\, \overline{/},\, \overline{\oplus},\, \bar{\downarrow},\, \bar{\omega}\} \rightleftharpoons \{\boldsymbol{\theta}\nu, \bar{\boldsymbol{\theta}}\nu,\, \boldsymbol{\theta}\tau,\, \bar{\boldsymbol{\theta}}\tau, \boldsymbol{\theta}\bar{\tau},\, \bar{\boldsymbol{\theta}}\bar{\tau},\, \boldsymbol{\theta}\bar{\nu},\, \bar{\boldsymbol{\theta}}\bar{\nu}\},$$

$$Sh \rightleftharpoons \{0,\, 1,\, 2,\, 3,\, 4,\, 5,\, 6,\, 7,\, \bar{7},\, \bar{6},\, \bar{5},\, \bar{4},\, \bar{3},\, \bar{2},\, \bar{1}, \bar{0}\} \rightleftharpoons \{\boldsymbol{\theta}\omega,\, \bar{\boldsymbol{\theta}}\omega,\, \boldsymbol{\theta}\downarrow,\, \bar{\boldsymbol{\theta}}\downarrow,$$
$$\boldsymbol{\theta}\oplus,\, \bar{\boldsymbol{\theta}}\oplus,\, \boldsymbol{\theta}/,\, \bar{\boldsymbol{\theta}}/,\, \boldsymbol{\theta}\overline{/},\, \bar{\boldsymbol{\theta}}\overline{/}, \boldsymbol{\theta}\overline{\oplus},\, \bar{\boldsymbol{\theta}}\overline{\oplus},\, \boldsymbol{\theta}\bar{\downarrow},\, \bar{\boldsymbol{\theta}}\bar{\downarrow},\, \boldsymbol{\theta}\bar{\omega},\, \bar{\boldsymbol{\theta}}\bar{\omega}\},$$

полагая, что во второй фигурной скобке парой цифр определяется соответствующая цифра в первой скобке. А это значит, что имеются: **одно** –, **двух** –, **трёх** – и **четырёхбитовые** *нули:* $\boldsymbol{\theta}$, $\nu = \boldsymbol{\theta}\,\boldsymbol{\theta}$, $\omega = \boldsymbol{\theta}\,\boldsymbol{\theta}\,\boldsymbol{\theta}$, $0 = \boldsymbol{\theta}\,\boldsymbol{\theta}\,\boldsymbol{\theta}\,\boldsymbol{\theta}$; — *единицы* : $\bar{\boldsymbol{\theta}}$, $\tau = \bar{\boldsymbol{\theta}}\,\boldsymbol{\theta}$, $\downarrow = \bar{\boldsymbol{\theta}}\,\boldsymbol{\theta}\,\boldsymbol{\theta}$, $1 = \bar{\boldsymbol{\theta}}\,\boldsymbol{\theta}\,\boldsymbol{\theta}\,\boldsymbol{\theta}$; **двух** –, **трёх** – и **четырёхбитовые** *двойки:* $\bar{\tau} = \boldsymbol{\theta}\,\bar{\boldsymbol{\theta}}$, $\oplus = \boldsymbol{\theta}\,\bar{\boldsymbol{\theta}}\,\boldsymbol{\theta}$, $2 = \boldsymbol{\theta}\,\bar{\boldsymbol{\theta}}\,\boldsymbol{\theta}\,\boldsymbol{\theta}$; – *тройки:* $\bar{\nu} = \bar{\boldsymbol{\theta}}\,\bar{\boldsymbol{\theta}}$, $/ = \bar{\boldsymbol{\theta}}\,\bar{\boldsymbol{\theta}}\,\boldsymbol{\theta}$, $3 = \bar{\boldsymbol{\theta}}\,\bar{\boldsymbol{\theta}}\,\boldsymbol{\theta}\,\boldsymbol{\theta}$; и так далее. Значит, цифры в наших системах несут на себе и литерные свойства, указывающие на число битов, занимаемые числом.

Чаще всего будем придерживаться нормализованной формы записи чисел (выбор такой формы станет ясным в следующем параграфе). $\mathbf{N}$ – битовое число (где $\mathbf{N = 8q + p}$ и $\mathbf{0 \leq p \leq 7}$) будет иметь в своей записи в начале и конце по $\mathbf{q}$ цифр, принадлежащих $\mathbf{Sh}$

(если $\mathbf{q = 0}$, то таких цифр не будет). В середине одну цифру, принадлежащую **Zh**, **Vh**, **Ah**, **Sh** для $\mathbf{p}$, равного 1, 2, 3, 4 соответственно. В случае $\mathbf{p = 6}$ в середине будут 2 цифры, принадлежащие **Ah**, а если $\mathbf{p}$, равно 5 или 7, то в середине будут 3 цифры из принадлежащие **Vh**, **Zh**, **Vh** или **Ah**, **Zh**, **Ah** соответственно.

Например, 5-и, 6-и, 7-и, 8-и битовые числа:

$$\bar\theta\bar\theta\theta\theta\bar\theta,\ \ \theta\bar\theta\bar\theta\bar\theta\theta\theta,\ \ \bar\theta\theta\theta\theta\bar\theta\theta\bar\theta,\ \ \theta\bar\theta\theta\theta\bar\theta\bar\theta\theta\theta$$

в нормализованной форме будут иметь записи:

$$\bar\nu\,\theta\,\bar\tau,\quad \bar\downarrow\downarrow,\quad \downarrow\theta\,\overline{\oplus},\quad 2\;3$$

соответственно.

Замечание 1. В системе **Ah** мы использовали знаки логических операций $\downarrow, \oplus, /$ и их отрицания для записи трёхбитовых цифр. Может возникнуть вопрос. Не приведёт ли это к недоразумению ? Отвечаем. Не приведёт.

Утверждение в *замечании* 1 станет ясным из следующего ниже определения симметрического оператора (кратко: $\mathbf{s}$ - оператора).

Простым позиционным $\mathbf{s}$ - оператором называется вектор α_n размерности $\mathbf{n+1}$ с двоичными координатами $\alpha^0, \alpha^1, \alpha^2, \dots, \alpha^n$, то есть

$$\langle\alpha_n\rangle \rightleftharpoons \langle\alpha^0, \alpha^1, \alpha^2, \dots, \alpha^n\rangle, \tag{1}$$

который в результате его применения к вектору — аргументу (77) даёт:

$$\langle\alpha^r\rangle \rightleftharpoons \langle\alpha_n\rangle(X_n), \quad r = \sum_{i=1}^{n} x_i. \tag{2}$$

Применение оператора (1) к таблице определения X_n, то есть табуляграмма этого применения (2), даёт координаты результирующего вектора размерности 2^n. Например, случаи $\mathbf{n = 2}$ и $\mathbf{n = 3}$ представлены *таблицами* 2 и 3 соответственно. В этих таблицах под векторами $\langle\omega\rangle$, $\langle\downarrow\rangle$, $\langle\oplus\rangle$, ... и $\langle 0\rangle$, $\langle 1\rangle$, $\langle 2\rangle$, ... записаны результаты их применения к $X_2 = (x_1, x_2)$ и $X_3 = (x_1, x_2, x_3)$ соответственно. Сравнивая *таблицу* 2 с *таблицей* 1, получаем подтверждение заявлению в *замечании* 1.

Таблица 2

x_1	x_2	ω	$\downarrow$	$\oplus$	$/$	$\overline{/}$	$\overline{\oplus}$	$\overline{\downarrow}$	$\overline{\omega}$
θ	θ	θ	$\bar\theta$	θ	$\bar\theta$	θ	$\bar\theta$	θ	$\bar\theta$
$\bar\theta$	θ	θ	θ	$\bar\theta$	$\bar\theta$	θ	θ	$\bar\theta$	$\bar\theta$
θ	$\bar\theta$	θ	θ	$\bar\theta$	$\bar\theta$	θ	θ	$\bar\theta$	$\bar\theta$
$\bar\theta$	$\bar\theta$	θ	θ	θ	θ	$\bar\theta$	$\bar\theta$	$\bar\theta$	$\bar\theta$

Таблица 3

x_1	x_2	x_3	0	1	2	3	4	5	6	7	$\bar 7$	$\bar 6$	$\bar 5$	$\bar 4$	$\bar 3$	$\bar 2$	$\bar 1$	$\bar 0$
θ	θ	θ	θ	$\bar\theta$	θ	$\bar\theta$	θ	$\bar\theta$	θ	$\bar\theta$	θ	$\bar\theta$	θ	$\bar\theta$	θ	$\bar\theta$	θ	$\bar\theta$
$\bar\theta$	θ	θ	θ	θ	$\bar\theta$	$\bar\theta$	θ	θ	$\bar\theta$	$\bar\theta$	θ	θ	$\bar\theta$	$\bar\theta$	θ	θ	$\bar\theta$	$\bar\theta$
θ	$\bar\theta$	θ	θ	θ	$\bar\theta$	$\bar\theta$	θ	θ	$\bar\theta$	$\bar\theta$	θ	θ	$\bar\theta$	$\bar\theta$	θ	θ	$\bar\theta$	$\bar\theta$
$\bar\theta$	$\bar\theta$	θ	θ	θ	θ	θ	$\bar\theta$	$\bar\theta$	$\bar\theta$	$\bar\theta$	θ	θ	θ	θ	$\bar\theta$	$\bar\theta$	$\bar\theta$	$\bar\theta$
θ	θ	$\bar\theta$	θ	θ	$\bar\theta$	$\bar\theta$	θ	θ	$\bar\theta$	$\bar\theta$	θ	θ	$\bar\theta$	$\bar\theta$	θ	θ	$\bar\theta$	$\bar\theta$
$\bar\theta$	θ	$\bar\theta$	θ	θ	θ	θ	$\bar\theta$	$\bar\theta$	$\bar\theta$	$\bar\theta$	θ	θ	θ	θ	$\bar\theta$	$\bar\theta$	$\bar\theta$	$\bar\theta$
θ	$\bar\theta$	$\bar\theta$	θ	θ	θ	θ	$\bar\theta$	$\bar\theta$	$\bar\theta$	$\bar\theta$	θ	θ	θ	θ	$\bar\theta$	$\bar\theta$	$\bar\theta$	$\bar\theta$
$\bar\theta$	$\bar\theta$	$\bar\theta$	θ	θ	θ	θ	θ	θ	θ	θ	$\bar\theta$	$\bar\theta$	$\bar\theta$	$\bar\theta$	$\bar\theta$	$\bar\theta$	$\bar\theta$	$\bar\theta$

Замечание 2. Сравнение таблиц показывает ещё, что $\& = \overline{/}$, $\sim\, = \overline{\oplus}$, $\vee = \overline{\downarrow}$, а значит $\overline{\&} = /$, $\overline{\sim} = \oplus$, $\overline{\vee} = \downarrow$, и таким образом арифметизация распространена на все бинарные операции. То, что как будто бы не охвачены операции $\rightarrow$ и $\leftarrow$, не должно нас смущать, так как $x_1 \rightarrow x_2 = \langle\overline{\downarrow}\rangle\,(\bar x_1, x_2)$, $x_1 \leftarrow x_2 = \langle\overline{/}\rangle\,(x_1, \bar x_2)$ и для самой унарной операции имеем:

$$\bar x = \langle\tau\rangle\,(x), \quad x = \langle\bar\tau\rangle\,(x),$$

но унарные θ - операторы, как простые, использоваться не будут, а сами унарные операции будут использованы в преобразованиях таблиц определения, о чём пойдёт речь ниже.

Теперь, используя *таблицу* **3**, обратим внимание на то, что функции f_1 и f_2 из (77) и (77) с помощью позиционных θ - операторов получают представление

$$f_1(X_3) = \langle\bar 5\rangle(X_3), \quad f_2(X_3) = \langle\bar 2\rangle(X_3).$$

Обобщением *простого* позиционного θ - оператора является *слож-*

ный позиционный *s* - оператор. Для его определения примем:

$$n \;=\; k + k_1 + k_2 + \ldots + k_j,$$

где в правой части равенства — все целые числа, и

$$r^1 \;=\; k \;+\; k_1,$$

$$r^2 \;=\; r^1 \;+\; k_2,$$

$$\ldots\ldots\ldots\ldots$$

$$\ldots\ldots\ldots\ldots$$

$$r^j \;=\; r^{j-1} \;+\; k_j; \quad r^j \;=\; n.$$

Сложным позиционным *s* - оператором называется вектор

$$\langle \alpha_k^{(0)} \,.\, \alpha_{r^1+1}^{(1)} \,.\, \alpha_{r^2+1}^{(2)} \,.\, \ldots \,.\, \alpha_{r^j+1}^{(j)} \rangle,$$

где $\langle \alpha_k^{(0)} \rangle$, $\langle \alpha_{r^1+1}^{(1)} \rangle$, $\langle \alpha_{r^2+1}^{(2)} \rangle$, $\ldots$, $\langle \alpha_{r^j+1}^{(j)} \rangle$ — *простые* позиционные *s* - операторы размерности $k+1$, r^1+2, r^2+2, r^j+2 соответственно, который в результате его применения к аргументу (1) даёт:

$$\langle z \rangle \;\rightleftharpoons\; \langle \alpha_k^{(0)} \,.\, \alpha_{r^1+1}^{(1)} \,.\, \alpha_{r^2+1}^{(2)} \,.\, \ldots \,.\, \alpha_{r^j+1}^{(j)} \rangle \, (X_n),$$

где

$$\begin{array}{lcllcl}
\langle y_1 \rangle & = & \langle \alpha_k^{(0)} \rangle \, (X_k), & X_k & = & (x_1,\, x_2,\, \ldots\, ,\, x_k), \\
\langle y_2 \rangle & = & \langle \alpha_{r^1+1}^{(1)} \rangle \, (X_{r^1}), & X_{r^1} & = & (y_1,\, x_{k+1},\, x_{k+2},\, \ldots\, ,\, x_{r^1}) \\
\langle y_3 \rangle & = & \langle \alpha_{r^2+1}^{(2)} \rangle \, (X_{r^2}), & X_{r^2} & = & (y_2,\, x_{r^1+1},\, x_{r^1+2},\, \ldots\, ,\, x_{r^2}), \\
\ldots & \ldots & \ldots\ldots\ldots\ldots & \ldots\ldots & \ldots & \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\
\ldots & \ldots & \ldots\ldots\ldots\ldots & \ldots\ldots & \ldots & \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\
\langle y_j \rangle & = & \langle \alpha_{r^{j-1}+1}^{(j-1)} \rangle \, (X_{r^{j-1}}), & X_{r^{j-1}} & = & (y_{j-1},\, x_{r^{j-2}+1},\, x_{r^{j-2}+2},\, \ldots\, ,\, x_{r^{j-1}}), \\
\langle z \rangle & = & \langle \alpha_{r^j+1}^{(j)} \rangle \, (X_{r^j}), & X_{r^j} & = & (y_j,\, x_{r^{j-1}+1},\, x_{r^{j-1}+2},\, \ldots\, ,\, x_{r^j}).
\end{array}$$

Замечание 3. В сложном позиционном *s* - операторе симметричность имеется лишь в составляющих его простых *s* - операторах.

В *таблице* **4** приведены примеры сложных *s* - операторов для $k = 2$, $k_1 = 1$ (здесь приняты такие же сокращения, что и в *таблицах* **2** и **3**).

Таблица 4

x_1	x_2	$\downarrow$	$\oplus$	$/$	$\downarrow$	x_3	$\downarrow . \downarrow$	$\downarrow . \oplus$	$\downarrow . /$
θ	θ	$\bar\theta$	θ	$\bar\theta$	$\bar\theta$	θ	θ	$\bar\theta$	$\bar\theta$
$\bar\theta$	θ	θ	$\bar\theta$	$\bar\theta$	θ	θ	$\bar\theta$	θ	$\bar\theta$
θ	$\bar\theta$	θ	$\bar\theta$	$\bar\theta$	θ	θ	$\bar\theta$	θ	$\bar\theta$
$\bar\theta$	$\bar\theta$	θ	θ	θ	θ	θ	$\bar\theta$	θ	$\bar\theta$
θ	θ	$\bar\theta$	θ	$\bar\theta$	$\bar\theta$	$\bar\theta$	θ	θ	θ
$\bar\theta$	θ	θ	$\bar\theta$	$\bar\theta$	θ	$\bar\theta$	θ	$\bar\theta$	$\bar\theta$
θ	$\bar\theta$	θ	$\bar\theta$	$\bar\theta$	θ	$\bar\theta$	θ	$\bar\theta$	$\bar\theta$
$\bar\theta$	$\bar\theta$	θ	θ	θ	θ	$\bar\theta$	θ	$\bar\theta$	$\bar\theta$

Продолжение таблицы 4

$\oplus$	x_3	$\oplus . \downarrow$	$\oplus . \oplus$	$\oplus . /$	$/$	x_3	$/ . \downarrow$	$/ . \oplus$	$/ . /$
θ	θ	$\bar\theta$	θ	$\bar\theta$	$\bar\theta$	θ	θ	$\bar\theta$	$\bar\theta$
$\bar\theta$	θ	θ	$\bar\theta$	$\bar\theta$	$\bar\theta$	θ	θ	$\bar\theta$	$\bar\theta$
$\bar\theta$	θ	θ	$\bar\theta$	$\bar\theta$	$\bar\theta$	θ	θ	$\bar\theta$	$\bar\theta$
θ	θ	$\bar\theta$	θ	$\bar\theta$	θ	θ	$\bar\theta$	θ	$\bar\theta$
θ	$\bar\theta$	θ	$\bar\theta$	$\bar\theta$	$\bar\theta$	$\bar\theta$	θ	θ	θ
$\bar\theta$	$\bar\theta$	θ	θ	θ	$\bar\theta$	$\bar\theta$	θ	θ	θ
$\bar\theta$	$\bar\theta$	θ	θ	θ	$\bar\theta$	$\bar\theta$	θ	θ	θ
θ	$\bar\theta$	θ	$\bar\theta$	$\bar\theta$	θ	$\bar\theta$	θ	$\bar\theta$	$\bar\theta$

Если теперь записать то, что представлено в *таблицах* **2, 3** и **4**, то будем иметь *(координаты векторов не отделяются запятой, если для их записи используются литеры из алфавитов* **Zh, Vh, Ah** *и* **Sh** *)*:

$$\begin{array}{llll}
\langle\omega\rangle(X_2) = \langle 0\rangle, & \langle\downarrow\rangle(X_2) = \langle 1\rangle, & \langle\oplus\rangle(X_2) = \langle 6\rangle, & \langle/\rangle(X_2) = \langle 7\rangle, \\
\langle\bar\omega\rangle(X_2) = \langle\bar 0\rangle, & \langle\overline{\downarrow}\rangle(X_2) = \langle\bar 1\rangle, & \langle\overline{\oplus}\rangle(X_2) = \langle\bar 6\rangle, & \langle\overline{/}\rangle(X_2) = \langle\bar 7\rangle.
\end{array}$$

$$\begin{array}{llll}
\langle 0\rangle(X_3) = \langle 00\rangle, & \langle 1\rangle(X_3) = \langle 10\rangle, & \langle 2\rangle(X_3) = \langle 61\rangle, & \langle 3\rangle(X_3) = \langle 71\rangle, \\
\langle 4\rangle(X_3) = \langle\bar 7 6\rangle, & \langle 5\rangle(X_3) = \langle\bar 6 6\rangle, & \langle 6\rangle(X_3) = \langle\bar 1 7\rangle, & \langle 7\rangle(X_3) = \langle\bar 0 7\rangle, \\
\langle\bar 4\rangle(X_3) = \langle 7\bar 6\rangle, & \langle\bar 5\rangle(X_3) = \langle 6\bar 6\rangle, & \langle\bar 6\rangle(X_3) = \langle 1\bar 7\rangle, & \langle\bar 7\rangle(X_3) = \langle 0\bar 7\rangle, \\
\langle\bar 0\rangle(X_3) = \langle\bar 0\bar 0\rangle, & \langle\bar 1\rangle(X_3) = \langle\bar 1\bar 0\rangle, & \langle\bar 2\rangle(X_3) = \langle\bar 6\bar 1\rangle, & \langle\bar 3\rangle(X_3) = \langle\bar 7\bar 1\rangle.
\end{array}$$

$$\begin{array}{lll}
\langle\downarrow . \downarrow\rangle(X_3) = \langle\bar 1 0\rangle, & \langle\downarrow . \oplus\rangle(X_3) = \langle 1\bar 1\rangle, & \langle\downarrow . /\rangle(X_3) = \langle\bar 0\bar 1\rangle, \\
\langle\oplus . \downarrow\rangle(X_3) = \langle\bar 6 0\rangle, & \langle\oplus . \oplus\rangle(X_3) = \langle 6\bar 6\rangle, & \langle\oplus . /\rangle(X_3) = \langle\bar 0\bar 6\rangle, \\
\langle/ . \downarrow\rangle(X_3) = \langle\bar 7 0\rangle, & \langle/ . \oplus\rangle(X_3) = \langle 7\bar 7\rangle, & \langle/ . /\rangle(X_3) = \langle\bar 0\bar 7\rangle.
\end{array}$$

Последние соотношения выписаны из *таблицы* **4**.

Замечание 4. *Таблица* **4** не охватывает все операторы для случая $k = 2$ и $k_1 = 1$, но позже мы увидим, что даже этот скромный список содержит гораздо больше, чем необходимо для порождения полного списка этого случая.

1.3 Инвертированно – сопряжённая четвёрка векторов

Построение **s** - операторов, их применение и свойства, а позже мы увидим, что это верно и для других операторов, использует свойства двоичных векторов размерности **n** (кратко: **n** – мерные векторы), базирующиеся на двух простейших преобразованиях вектора: инвертирование и сопряжение. А именно, если

$$\langle R_n \rangle \; = \; \langle r_1, r_2, r_3, \ldots, r_n \rangle, \tag{3}$$

то **инвертированным**, **сопряжённым** и **двойственным** (**инвертированно – сопряжённым или сопряжённо – инвертированным**) к оператору **(3)** являются соответственно векторы:

$$\langle \bar{R}_n \rangle \; = \; \langle \bar{r}_1, \bar{r}_2, \bar{r}_3, \ldots, \bar{r}_n \rangle, \tag{4}$$

$$\langle R_n^* \rangle \; = \; \langle r_n, r_{n-1}, \ldots, r_2, r_1 \rangle, \tag{5}$$

$$\langle \bar{R}_n^* \rangle \; = \; \langle \bar{r}_n, \bar{r}_{n-1}, \ldots, \bar{r}_2, \bar{r}_1 \rangle. \tag{6}$$

Четвёрка векторов

$$\{\langle R_n \rangle, \, \langle R_n^* \rangle, \, \langle \bar{R}_n \rangle, \, \langle \bar{R}_n^* \rangle\} \tag{7}$$

и составляет **инвертированно – сопряжённую четвёрку (ИСЧ) векторов**, при этом достаточно знать один из векторов этой четвёрки, и тогда остальные три вектора являются его следствием. В самом деле:

$\langle R_n \rangle$	$\langle R_n^* \rangle$	$\langle \bar{R}_n \rangle$	$\langle \bar{R}_n^* \rangle$
$\langle R_n^* \rangle$	$\langle R_n \rangle$	$\langle \bar{R}_n^* \rangle$	$\langle \bar{R}_n \rangle$
$\langle \bar{R}_n \rangle$	$\langle \bar{R}_n^* \rangle$	$\langle R_n \rangle$	$\langle R_n^* \rangle$
$\langle \bar{R}_n^* \rangle$	$\langle \bar{R}_n \rangle$	$\langle R_n^* \rangle$	$\langle R_n \rangle$

(8)

Если вектор $\langle R_n \rangle = \langle R_n^* \rangle$, то $\langle \bar{R}_n \rangle = \langle \bar{R}_n^* \rangle$, и тогда ИСЧ превращается в самосопряжённую пару (ССП):

$$\{\langle R_n \rangle \, , \, \langle \bar{R}_n \rangle\}, \tag{9}$$

так как каждый из этих векторов — **самосопряжённый**.

Если вектор $\langle R_n\rangle = \langle \bar{R}^*_n\rangle$, то $\langle \bar{R}_n\rangle = \langle R^*_n\rangle$, и тогда ИСЧ превращается в самодвойственную пару (СДП):

$$\{\langle R_n\rangle\,,\,\langle R^*_n\rangle\}, \tag{10}$$

так как каждый из этих векторов — **самодвойственный**.

Замечание 5. Обратим теперь внимание на то, что молчаливо предполагалось уже в предыдущем параграфе, а именно, запись без запятой $\langle \alpha_n\,\beta_m\rangle$ есть вектор–результат конкатенации векторов $\langle\alpha_n\rangle$ и $\langle\beta_m\rangle$, означающий, что за координатами вектора $\langle\alpha_n\rangle$ следуют координаты вектора $\langle\beta_m\rangle$.

Установим теперь структуру самосопряжённого и самодвойственного векторов.

Лемма 1. Необходимым и достаточным условием самосопряжённости вектора *чётной* размерности $(\mathbf{n} = 2\ \mathbf{k})$ является вид вектора $\langle\alpha_k\ \alpha^*_k\rangle$, а *нечётной* размерности $(\mathbf{n} = 2\ \mathbf{k} + 1)$ — вид $\langle\alpha_k\ \theta\ \alpha^*_k\rangle$ или $\langle\alpha_k\ \bar{\theta}\ \alpha^*_k\rangle$, где $\langle\alpha_k\rangle$ — произвольный вектор.

Доказательство. В самом деле, согласно определению для самосопряжённости вектора $\langle R_{2k}\rangle$ необходимо и достаточно, чтобы $r_1 = r_{2k}$, $r_2 = r_{2k-1}$, $r_3 = r_{2k-2}$, ..., $r_k = r_{k+1}$, а это значит, что

$$\langle R_{2k}\rangle = \langle r_1,\ r_2,\ r_3,\ \ldots\ ,\ r_k,\ r_k,\ \ldots\ ,\ r_3,\ r_2,\ r_1\rangle.$$

Если же вектор нечётной размерности, то есть $\langle R_{2k+1}\rangle$, то для его самосопряжённости необходимо и достаточно, чтобы $r_1 = r_{2k+1}$, $r_2 = r_{2k}$, $r_3 = r_{2k-1}$, ..., $r_k = r_{k+2}$, $r_{k+1} = r_{k+1}$, а это значит, что

$$\langle R_{2k+1}\rangle = \langle r_1,\ r_2,\ r_3,\ \ldots\ ,\ r_k,\ r_{k+1},\ r_k,\ \ldots\ ,\ r_3,\ r_2,\ r_1\rangle.$$

и, следовательно, r_{k+1} может равняться как θ , так и $\bar{\theta}$. Лемма доказана.

Лемма 2. Необходимым и достаточным условием самодвойственности вектора чётной размерности $(\mathbf{n} = 2\ \mathbf{k})$ является вид вектора $\langle\alpha_k\ \bar{\alpha}^*_k\rangle$. Нечётной размерности самодвойственных векторов быть не может.

Доказательство. Согласно определению для самодвойственности вектора $\langle R_{2k}\rangle$ необходимо и достаточно, чтобы $r_1 = \bar{r}_{2k}$, $r_2 = \bar{r}_{2k-1}$, $r_3 = \bar{r}_{2k-2}$, ..., $r_k = \bar{r}_{k+1}$, а это значит, что

$$\langle R_{2k}\rangle = \langle r_1,\ r_2,\ r_3,\ \ldots\ ,\ r_k,\ \bar{r}_k,\ \ldots\ ,\ \bar{r}_3,\ \bar{r}_2,\ \bar{r}_1\rangle.$$

А поскольку не может быть, чтобы r_{k+1} равнялось $\bar{r}_{k+1}$, то самодвойственных векторов нечётной размерности быть не может.

Бинарный нетривиальный оператор $\odot$, то есть

$$\odot \in \{\downarrow,\ \oplus,\ /,\ \bar{/},\ \bar{\oplus},\ \bar{\downarrow}\}, \tag{11}$$

над двумя векторами одинаковой размерности является вектор той же размерности, координаты которого являются результатом покоординатного применения оператора $\odot$ над заданными векторами.

Если наряду с вектором (3) рассматривать векторы

$$\langle\theta_n\rangle\ ,\ \langle\bar{\theta}_n\rangle, \tag{12}$$

все координаты которых суть θ_n и $\bar{\theta}_n$ соответственно, то можем записать результаты применения оператора $\odot$ к паре векторов из (7), при этом будем записывать результат лишь в случае $\odot \in \{\downarrow, \oplus, /\}$, так как инвертированием последнего находится значение и в случае $\bar{\odot}$.

Лемма 3. Верны равенства

$$\langle\oplus\rangle\,(\langle R_n\rangle\,,\,\langle R_n\rangle) \;=\; \langle\downarrow\rangle\,(\langle R_n\rangle\,,\,\langle\bar{R}_n\rangle) \;=\; \langle\theta_n\rangle, \tag{13}$$

$$\langle\odot\rangle\,(\langle R_n\rangle\,,\,\langle R_n\rangle) \;=\; \langle\bar{R}_n\rangle, \quad \odot \in \{\downarrow,\ /\}, \tag{14}$$

$$\langle\odot\rangle\,(\langle R_n\rangle\,,\,\langle\bar{R}_n\rangle) \;=\; \langle\bar{\theta}_n\rangle, \quad \odot \in \{\oplus,\ /\}. \tag{15}$$

В верности этой леммы легко убедиться самостоятельно, используя лишь определения операторов (11).

Лемма 4. Бинарный оператор (11) над заданным вектором $\langle R_n\rangle$ и сопряжённым с ним вектором $\langle R_n^*\rangle$ даёт в результате самосопряжённый вектор, то есть

$$\langle\odot\rangle\,(\langle R_n\rangle, \langle R_n^*\rangle) \;=\; \langle S_n\rangle, \quad \langle S_n^*\rangle, \;=\; \langle S_n\rangle. \tag{16}$$

Доказательство. Действительно, координаты вектора $\langle S_n\rangle$ суть $s_i = \langle\odot\rangle(r_i,\ r_{n-i+1})$, где $i = 1, 2, \ldots, n$, но тогда

$$s_{n-i+1} \;=\; \langle\odot\rangle\,(r_{n-i+1},\ r_i) \;=\; s_i.$$

Последнее равенство верно в силу симметричности оператора $\odot$. Лемма доказана.

Пусть теперь $\langle P_k \rangle$ и $\langle Q_k \rangle$ — два вектора размерности $\mathbf{k}$. Положим:

$$\langle R_n \rangle \rightleftharpoons \langle P_k \, Q_k \rangle, \tag{17}$$

когда $\mathbf{n = 2k}$, а для $\mathbf{n = 2k + 1}$ примем

$$\langle R_n \rangle \rightleftharpoons \langle P_k \, \varepsilon \, Q_k \rangle, \tag{18}$$

где $\varepsilon \in Zh$. Ещё примем

$$\langle S_k \rangle \rightleftharpoons \langle \odot \rangle \left(\langle P_k \rangle \, , \, \langle \bar{Q}_k^* \rangle \right). \tag{19}$$

В связи с тем, что понятие самодвойственности для векторов нечётной размерности лишено смысла, введём понятие **почти самодвойственности**, назвав вектор $\langle \alpha_k \, \varepsilon \, \bar{\alpha}_k^* \rangle$ **почти самодвойственным**, поскольку двойственный к нему вектор $\langle \alpha_k \, \bar{\varepsilon} \, \bar{\alpha}_k^* \rangle$ не совпадает с исходным лишь в одной $(\mathbf{k} + 1)$–ой координате.

Лемма 5. Бинарный оператор (11) над заданным вектором $\langle R_n \rangle$ и двойственным с ним вектором $\langle \bar{R}_n^* \rangle$ даёт в результате самодвойственный вектор, если $\mathbf{n = 2k}$, а в случае $\mathbf{n = 2k + 1}$, то — почти самодвойственный вектор, а именно, если $\langle R_n \rangle$ имеет вид (17), то

$$\langle \odot \rangle \left(\langle R_n \rangle \, , \, \langle \bar{R}_n^* \rangle \right) = \langle S_k \, \bar{S}_k^* \rangle, \tag{20}$$

а если $\langle R_n \rangle$ имеет вид (18), то

$$\langle \odot \rangle \left(\langle R_n \rangle \, , \, \langle \bar{R}_n^* \rangle \right) = \langle S_k \, \lambda \, \bar{S}_k^* \rangle, \tag{21}$$

где $\langle S_k \rangle$ определено равенством (19), а

$$\lambda = \langle \odot \rangle \left(\langle \varepsilon \, , \, \bar{\varepsilon} \rangle \right) = \begin{cases} \bar{\theta}, & \text{если} \quad \odot \in \{\oplus, /\}, \\ \theta, & \text{если} \quad \odot = \downarrow . \end{cases} \tag{22}$$

Доказательство. Пусть $\mathbf{n = 2k}$. Тогда $\langle \bar{R}_n^* \rangle = \langle \bar{Q}_k^* \, \bar{P}_k^* \rangle$ и $\langle \odot \rangle \left(\langle R_n \rangle \, , \, \langle \bar{R}_n^* \rangle \right) = \langle \odot \rangle \left(\langle P_k \, Q_k \rangle \, , \, \langle \bar{Q}_k^* \, \bar{P}_k^* \rangle \right) = \langle S_k \, \bar{S}_k^* \rangle$, так как из (19) следует, что $\langle \bar{S}_k^* \rangle = \langle \odot \rangle \left(\langle Q_k \rangle \, , \, \langle \bar{P}_k^* \rangle \right)$. Верность (20) доказана.

Если же $\mathbf{n = 2k{+}1}$, то $\langle \bar{R}_n^* \rangle = \langle \bar{Q}_k^* \, \bar{\varepsilon} \, \bar{P}_k^* \rangle$ и $\langle \odot \rangle \left(\langle R_n \rangle \, , \, \langle \bar{R}_n^* \rangle \right) = \langle \odot \rangle \left(\langle P_k \, \varepsilon \, Q_k \rangle \, , \, \langle \bar{Q}_k^* \, \bar{\varepsilon} \, \bar{P}_k^* \rangle \right) = \langle S_k \, \lambda \, \bar{S}_k^* \rangle$, где λ определена в (22). Значит, верно и равенство (21).

Замечание 6. Теперь обратим внимание на введённое в предыдущем параграфе определение нормализованной формы записи. Вектор в такой записи при выполнении над ним преобразований инвертирования и сопряжения сохраняет свою нормализованную форму (*вот та причина, по которой именно так введено это определение*). Но, чтобы легко было выполнять эти преобразования, следует помнить *таблицу* **5**, в которой приведены четвёрки вида (7) для цифр из **Vh** , **Ah** , и **Sh** с указанием типа, при этом следует иметь ввиду (8).

Таблица 5

a	a^*	$\bar{a}$	$\bar{a}^*$	Тип	a	a^*	$\bar{a}$	$\bar{a}^*$	Тип
ν	ν	$\bar{\nu}$	$\bar{\nu}$	ССП	0	0	$\bar{0}$	$\bar{0}$	ССП
τ	$\bar{\tau}$	$\bar{\tau}$	τ	СДП	6	6	$\bar{6}$	$\bar{6}$	ССП
					3	$\bar{3}$	$\bar{3}$	3	СДП
ω	ω	$\bar{\omega}$	$\bar{\omega}$	ССП	5	$\bar{5}$	$\bar{5}$	5	СДП
$\oplus$	$\oplus$	$\overline{\oplus}$	$\overline{\oplus}$	ССП	1	$\bar{7}$	$\bar{1}$	7	ИСЧ
$\downarrow$	$\overline{/}$	$\bar{\downarrow}$	$/$	ИСЧ	2	4	$\bar{2}$	$\bar{4}$	ИСЧ

Например. Для каждого из векторов $\bar{\nu}\ \boldsymbol{\theta}\ \bar{\tau}$, $\bar{\downarrow}\ \downarrow$, $\downarrow\ \bar{\boldsymbol{\theta}}\ /$, $1\ 6\ /\ \downarrow\ 4\ 5$ сопряжёнными являются: $\tau\ \boldsymbol{\theta}\ \bar{\nu}$, $\overline{/}\ /$, $\bar{\downarrow}\ \bar{\boldsymbol{\theta}}\ \overline{/}$, $\bar{5}\ 2\ \overline{/}\ \bar{\downarrow}\ 6\ \bar{7}$ соответственно.

1.6.1 σ–операторы

σ–оператором k–го класса:

$$\sigma_k, \quad \text{где} \quad k = 0, 1, 2, \dots, \tag{23}$$

называется оператор, который, будучи применённым к двоичному набору (77), даёт *двоичные* значения $\boldsymbol{\theta}$ или $\bar{\boldsymbol{\theta}}$, причём значение $\bar{\boldsymbol{\theta}}$ принимает тогда и только тогда, когда число

$$N = \sum_{i=1}^{n} x_i \tag{24}$$

совпадает с одним из чисел множества:

$$\{M, M+1, M+2, \dots, M+2^k-1\}, \tag{25}$$

где $M = 2^k(2m+1)$ и $m = 0, 1, 2, \dots$.

Отметим, что в соответствии с данным определением, σ–операторы — это бесконечные векторы, *первые* 2^k координаты которых суть θ, а следующие 2^k координаты равны $\bar{\theta}$ и далее всё периодически повторяется:

$$
\begin{aligned}
\sigma_0 &\rightleftharpoons \{\theta\bar{\theta}\theta\bar{\theta}\theta\bar{\theta}\theta\bar{\theta}\theta\bar{\theta}\theta\bar{\theta}\theta\bar{\theta}\theta\bar{\theta}\ldots\},\\
\sigma_1 &\rightleftharpoons \{\theta\theta\bar{\theta}\bar{\theta}\theta\theta\bar{\theta}\bar{\theta}\theta\theta\bar{\theta}\bar{\theta}\theta\theta\bar{\theta}\bar{\theta}\ldots\},\\
\sigma_2 &\rightleftharpoons \{\theta\theta\theta\theta\bar{\theta}\bar{\theta}\bar{\theta}\bar{\theta}\theta\theta\theta\theta\bar{\theta}\bar{\theta}\bar{\theta}\bar{\theta}\ldots\},\ \ldots\,.
\end{aligned}
$$

Одно из замечательных свойств σ–оператора **(23)** заключается в том, что для него верна следующая очевидная

Теорема 8. Если число N, определённое в **(24)**, записать в двоичном представлении так:

$$N = y_0 + 2y_1 + 2^2y_2 + \ldots + 2^jy_j + \ldots\,, \tag{26}$$

то

$$y_0 = \sigma_0(X_n),\ y_1 = \sigma_1(X_n),\ y_2 = \sigma_2(X_n),\ \ldots\,,\ y_j = \sigma_j(X_n),\ \ldots\,. \tag{27}$$

В том, что это действительно так, легко убедиться, взглянув на *таблицу истинности*, которую пишем, когда таблично определяем функцию алгебры логики, перечисляя все возможные наборы для аргументов функций.

Разумеется, что вместо бесконечных σ–операторов можно рассматривать конечные σ–операторы порядка r (предполагая $r > k$): σ_k^r — это операторы, *первые* 2^r координаты которых совпадают с координатами бесконечного оператора σ_k (обращаем внимание, что в σ–операторе счёт координат начинается с *нуля*).

Замечание 11. *Теорема* **8** остаётся верной и для конечных σ_k^j–операторов (где $k = 0, 1, 2, \ldots, j-1$), если

$$j \rightleftharpoons [\,log_2 N\,] + 1 \tag{28}$$

(здесь квадратные скобки указывают на то, что мы берём целую часть действительного числа $log_2 N$). Это значит, что *теорема* **8** в этом случае слегка изменит свою форму, точнее, верна

Теорема 9. Если число N, определённое в **(24)**, запишется в двоичном представлении так:

$$N = y_0 + 2y_1 + 2^2y_2 + \ldots + 2^{j-1}y_{j-1}, \tag{29}$$

то

$$y_0 = \sigma_0^j(X_n),\ y_1 = \sigma_1^j(X_n),\ y_2 = \sigma_2^j(X_n),\ \dots,\ y_{j-1} = \sigma_{j-1}^j(X_n). \quad (30)$$

Определение (28) показывает, как следует вводить порядок, чтобы от *бесконечных* σ–операторов переходить к *конечным*. А это значит, что свойства операторов можно формулировать, учитывая лишь класс оператора и не обращая особого внимания на их порядок. С учётом сказанного, обратим внимание на то, что верны следующие теоремы.

Теорема 10. Если

$$\sigma_0(x_1, x_2, \dots, x_{i-1}, x_i, x_{i+1}, \dots, x_n) = \theta, \quad (31)$$

то

$$x_i = \sigma_0(x_1, x_2, \dots, x_{i-1}, x_i, x_{i+1}, \dots, x_n). \quad (32)$$

Верно и обратное, то есть из справедливости (32) следует справедливость (31).

Теорема 11. Пусть

$$z = \sigma_0(x_1, x_2, \dots, x_{i-1}, x_i, x_{i+1}, \dots, x_n). \quad (33)$$

Тогда

$$x_i = \sigma_0(x_1, x_2, \dots, x_{i-1}, z, x_{i+1}, \dots, x_n). \quad (34)$$

Верно, что из справедливости (34) следует справедливость равенства (33)

Теорема 12. Если

$$\left.\begin{aligned} &\sigma_0(x_1, \dots, x_{i-1}, z, x_{i+1}, \dots, x_n) = \theta, \\ &\sigma_0(x_{n+1}, \dots, x_{j-1}, z, x_{j+1}, \dots, x_{n+m}) = \theta \end{aligned}\right\} \quad (35)$$

то переменная z, входящая в каждое из уравнений системы (35), может быть исключена, то есть

$$\sigma_0\left(x_1, \dots, x_{i-1}, x_{i+1}, \dots, x_n, x_{n+1}, \dots, x_{j-1}, x_{j+1}, \dots, x_{n+m}\right) = \theta. \quad (36)$$

Соотношение (36) верно и в том случае, если вместо z иметь $z_1, z_2, \dots, z_s$ в каждое из уравнений системы (35).

Теоремы 10 — 12 достаточно просты и не могут вызвать никаких затруднений, поэтому их обоснование опущено. Разумеется, что здесь не ставилась цель установить все свойства σ–операторов, неоднократный возврат к которым предполагается в последующих главах.

А так как над конечными σ–операторами предполагается выполнять логические операции, то ниже рассмотрим способ их записи, который удобен, поскольку в нём хорошо выражен позиционный принцип.

1.6.2 Метод записи конечных σ–операторов

Как мы знаем, для записи конечных σ–операторов используются векторы размерности 2^n, то есть порядка n, координаты которых суть θ (*нули*) и (или) $\bar{\theta}$ (*единицы*), при этом (в силу определения) для конечного σ–оператора удобнее всего использовать литеры из алфавита Vh, хотя использование алфавита Sh не исключается и в некоторых случаях может оказаться предпочтительным.

При этом мы будем придерживаться таких способов записи: если α — какой–то вектор порядка k (размерности 2^k), то запись α_j означает, что каждая координата вектора α имеет повтор порядка j (то есть 2^j повторов) и, таким образом, вектор α_j имеет порядок $j+k$. А запись α^i означает, что

$$\alpha^i = \underbrace{\alpha\,\alpha\,\alpha\,\ldots\,\alpha}_{2^i \text{ раз}} \tag{37}$$

то есть вновь имеем ввиду экспоненциальное вхождение α.

Таким образом, запись α^i_j — это вектор порядка $k+j+i$, если только α — вектор порядка k.

Поскольку векторы из алфавита Vh имеют *порядок* 1, то векторы $\nu^i_j, \tau^i_j, \bar{\tau}^i_j, \bar{\nu}^i_j$ имеют порядок $j+i+1$. Вектор $a \in Sh$ имеет *порядок* 2, значит, вектор a^i_j имеет порядок $j+i+2$.

Чтобы оттенить экспоненциальное вхождение координат и то, что как *верхний* так и *нижний* индексы у вектора указывают на экспоненциальный характер вхождения, будем использовать двойные ломаные скобки: $\langle\langle\ \ \rangle\rangle$. Например:

$$\langle\langle\tau^1_1\rangle\rangle = \langle\langle\tau_1\,\tau_1\rangle\rangle = \langle\langle\bar{\theta}\bar{\theta}\,\theta\theta\,\bar{\theta}\bar{\theta}\,\theta\theta\rangle\rangle,$$

$$\langle\langle\tau_2\rangle\rangle = \langle\langle\bar{\theta}\bar{\theta}\,\bar{\theta}\bar{\theta}\,\theta\theta\,\theta\theta\rangle\rangle, \quad \langle\langle\bar{\tau}_2\rangle\rangle = \langle\langle\theta\theta\,\theta\theta\,\bar{\theta}\bar{\theta}\,\bar{\theta}\bar{\theta}\rangle\rangle,$$

$$\langle\langle\tau^2\rangle\rangle = \langle\langle\bar{\theta}\theta\,\bar{\theta}\theta\,\bar{\theta}\theta\,\bar{\theta}\theta\rangle\rangle, \quad \langle\langle\bar{\tau}^2\rangle\rangle = \langle\langle\theta\bar{\theta}\,\theta\bar{\theta}\,\theta\bar{\theta}\,\theta\bar{\theta}\rangle\rangle,$$

$$\langle\langle\tau_3\rangle\rangle = \langle\langle\bar{\theta}_3\theta_3\rangle\rangle,\ \langle\langle\bar{\tau}_3\rangle\rangle = \langle\langle\theta_3\bar{\theta}_3\rangle\rangle,\ \langle\langle\tau^3\rangle\rangle = \langle\langle\tau^2\tau^2\rangle\rangle,$$

$$\langle\langle\bar{\tau}_1^2\rangle\rangle = \langle\langle\bar{\tau}_1^1\,\bar{\tau}_1^1\rangle\rangle, \quad \langle\langle\tau_2^1\rangle\rangle = \langle\langle\tau_2\,\tau_2\rangle\rangle.$$

Совершенно ясно, что для конечных σ–операторов класса k и порядка j, то есть для σ_k^j и $\bar{\sigma}_k^j$, указанный способ приводит к равенствам:

$$\sigma_k^j = \langle\langle\bar{\tau}_k^{j-k-1}\rangle\rangle, \quad \bar{\sigma}_k^j = \langle\langle\tau_k^{j-k-1}\rangle\rangle. \tag{38}$$

Обращаем внимание, что записи *правых* и *левых* частей (38) обладают различными возможностями. Точнее, всякий конечный σ–оператор с верхними и нижними индексами может быть записан с использованием двойных ломаных скобок, но не всякий оператор, записанный по указанному выше способу с использованием *двойных ломаных скобок*, может быть записан через σ с верхними и нижними индексами.

В соответствии со сказанным, в дальнейшем мы расширяем понятие σ–оператора, называя конечным σ–оператором всякий оператор, записанный по указанному выше способу с использованием *двойных ломаных скобок*, а из множества таких σ–операторов будем выделять операторы, которые допускают записи через σ с верхними и нижними индексами, называя их *базовыми* σ–операторами.

Операторы

$$\langle\langle(\tau\,\bar{\nu})^3\rangle\rangle, \quad \langle\langle(\bar{\nu}\,\tau)^3\rangle\rangle, \quad \langle\langle(\nu\,\tau\,\bar{\tau}\,\tau)^2\rangle\rangle, \quad \langle\langle(\nu_2\,(\nu\,\tau)^1)^1\rangle\rangle \tag{39}$$

суть конечные σ–операторы *пятого* порядка (обращаем внимание на то, что отсутствие нижнего или (и) верхнего индекса означает равенство их *нулю*).

Замечание 12. Всякий конечный σ–оператор может рассматриваться и как бесконечный σ–оператор, если подразумевать записанное в двойных ломаных скобках периодически продолженным, а это значит: в случае бесконечного σ–оператора иногда запись может быть заменена более простой с сохранением смысла.

Например. Операторы (39), когда рассматриваются как бесконечные, то могут быть заменены на операторы

$$\langle\langle\tau\,\bar{\nu}\rangle\rangle, \quad \langle\langle\bar{\nu}\,\tau\rangle\rangle, \quad \langle\langle\nu\,\tau\,\bar{\tau}\,\tau\rangle\rangle, \quad \langle\langle\nu_2\,(\nu\,\tau)^1\rangle\rangle \tag{40}$$

соответственно.

Замечание 13. Операторы (39) и (40) могут быть записаны с использованием алфавита Sh так:

$$\langle\langle\bar{4}^3\rangle\rangle, \quad \langle\langle 7^3\rangle\rangle, \quad \langle\langle(46)^2\rangle\rangle, \quad \langle\langle(0_1\,4^1)^1\rangle\rangle;$$

$$\langle\langle\bar{4}\rangle\rangle,\ \ \langle\langle 7\rangle\rangle,\ \ \langle\langle 46\rangle\rangle,\ \ \langle\langle 0_1\, 4^1\rangle\rangle.$$

Изложение идей, связанных с σ–операторами, будет продолжено в III *главе*, точнее в **3.5**.

3.3 Позиционные фундаментальные симметрические операторы

В § 2 *главы* I были определены сложные s – операторы, но о их свойствах ничего не было сказано, а в предыдущем параграфе были рассмотрены простые s – операторы на расширенных таблицах определения, но это расширение имело вводный характер, кроме *теоремы* 10 и понятий, связанных с ней. Теперь мы соединим и продолжим эти два начинания введением понятия о позиционном фундаментальном симметрическом операторе (кратко: FS – операторе).

FS – оператор — это простой s – оператор, который всегда применяется к совершенным наборам – аргументам (см. конец предыдущего параграфа). В записи применения FS – оператора (77) индекс n указывает на число переменных, а само X_n^s является таблицей определения FS – оператора.

Поскольку символы FS – оператора и результаты применения FS – оператора к области определения совпадают, то необходимость в записи области определения (тем более, что она стандартна) не всегда есть. А это означает, что почти всегда мы её будем опускать.

Полнота системы FS – операторов очевидна, но экспоненциальный характер их записи побуждает нас использовать для этих целей другие приёмы.

Для записи функций алгебры логики FS – операторами будем использовать систему бинарных продукций (образующих правил) из множества:

$$Q = \{T, \bar{T}, T^*, \bar{T}^*, M, \bar{M}, M^*, \bar{M}^*\},$$

состоящего их двух инвертированно – сопряжённых четвёрок продукций (в множестве Q — это *первые* и *вторые* четыре продукции соответственно). Действие каждой из продукций множества Q на заданный вектор α_j превращает его в конкатенацию двух векторов, так что размерность исходного вектора удваивается:

$$\left.\begin{array}{llll} \langle\alpha_j T\rangle & \rightleftharpoons \langle\alpha_j\bar{\theta}_j\rangle, & \langle\alpha_j\bar{T}\rangle & \rightleftharpoons \langle\alpha_j\theta_j\rangle, \\ \langle\alpha_j T^*\rangle & \rightleftharpoons \langle\bar{\theta}_j\alpha_j\rangle, & \langle\alpha_j\bar{T}^*\rangle & \rightleftharpoons \langle\theta_j\alpha_j\rangle. \end{array}\right\} \tag{41}$$

$$\langle\alpha_j M\rangle \rightleftharpoons \langle\alpha_j\alpha_j\rangle, \qquad \langle\alpha_j\bar{M}\rangle \rightleftharpoons \langle\alpha_j\bar{\alpha}_j\rangle. \tag{42}$$

$$\langle\alpha_j M^*\rangle \rightleftharpoons \langle\alpha_j\alpha_j^*\rangle, \qquad \langle\alpha_j\bar{M}^*\rangle \rightleftharpoons \langle\alpha_j\bar{\alpha}_j^*\rangle. \tag{43}$$

В *определениях* (41) — (43) предполагается, что вектор α_j является вектором с двоичными координатами порядка j, то есть размерности 2^j, а все 2^j координаты векторов θ_j и $\bar{\theta}_j$ суть соответственно *нулевые* и *единичные*. Что касается векторов $\bar{\alpha}_j$, α_j^*, $\bar{\alpha}_j^*$, то это векторы — *инвертированный*, *сопряжённый* и *двойственный* к вектору α_j.

Ниже, как правило, в качестве начальных векторов, к которым применяются продукции из множества Q, будут использоваться векторы

$$\langle\tau_j\rangle = \langle\bar{\theta}_j\theta_j\rangle,\ \langle\bar{\tau}_j\rangle = \langle\theta_j\bar{\theta}_j\rangle,\ \langle\nu_j\rangle = \langle\theta_j\theta_j\rangle,\ \langle\bar{\nu}_j\rangle = \langle\bar{\theta}_j\bar{\theta}_j\rangle, \tag{44}$$

но чаще будут использоваться *первые* два вектора.

Теперь обратим внимание, что поскольку каждое из выражений

$$\left.\begin{array}{llll} \langle\bar{\alpha}_j\bar{T}\rangle & = \langle\bar{\alpha}_j\theta_j\rangle, & \langle\bar{\alpha}_j T\rangle & = \langle\bar{\alpha}_j\bar{\theta}_j\rangle, \\ \langle\bar{\alpha}_j\bar{T}^*\rangle & = \langle\theta_j\bar{\alpha}_j\rangle, & \langle\bar{\alpha}_j T^*\rangle & = \langle\bar{\theta}_j\bar{\alpha}_j\rangle, \end{array}\right\} \tag{45}$$

$$\left.\begin{array}{llll} \langle\alpha_j^* T^*\rangle & = \langle\bar{\theta}_j\alpha_j^*\rangle, & \langle\alpha_j^*\bar{T}^*\rangle & = \langle\theta_j\alpha_j^*\rangle, \\ \langle\alpha_j^* T\rangle & = \langle\alpha_j^*\bar{\theta}_j\rangle, & \langle\alpha_j^*\bar{T}\rangle & = \langle\alpha_j^*\theta_j\rangle, \end{array}\right\} \tag{46}$$

$$\left.\begin{array}{llll} \langle\bar{\alpha}_j^*\bar{T}^*\rangle & = \langle\theta_j\bar{\alpha}_j^*\rangle, & \langle\bar{\alpha}_j^* T^*\rangle & = \langle\bar{\theta}_j\bar{\alpha}_j^*\rangle, \\ \langle\bar{\alpha}_j^*\bar{T}\rangle & = \langle\bar{\alpha}_j^*\theta_j\rangle, & \langle\bar{\alpha}_j^* T\rangle & = \langle\bar{\alpha}_j^*\bar{\theta}_j\rangle \end{array}\right\} \tag{47}$$

является соответственно **инвертированным**, **сопряжённым** и **двойственным** к каждому из выражений (41), то тем самым доказана следующая

Теорема 11. Если B — одна из продукций *первой* четвёрки множества Q, то инвертированный, сопряжённый и двойственный вектор к заданному вектору $\langle\alpha_j B\rangle$ суть соответственно векторы $\langle\bar{\alpha}_j\bar{B}\rangle$, $\langle\alpha_j^* B^*\rangle$, $\langle\bar{\alpha}_j^*\bar{B}^*\rangle$, при этом двойные операции инвертирования, сопряжения и двойственности ведут к снятию этой операции.

А так как верны равенства:

$$\begin{aligned} \langle \bar\alpha_j M \rangle &= \langle \bar\alpha_j \bar\alpha_j \rangle, & \langle \bar\alpha_j \bar M \rangle &= \langle \bar\alpha_j \alpha_j \rangle, \\ \langle \bar\alpha_j M^* \rangle &= \langle \bar\alpha_j \bar\alpha_j^* \rangle, & \langle \bar\alpha_j \bar M^* \rangle &= \langle \bar\alpha_j \alpha_j^* \rangle, \end{aligned}$$

то это значит, что сравнивая их с **(42)** и **(43)**, тем самым доказана

Теорема 12. Если B — одна из продукций *второй* четвёрки множества Q, то из условия $y = \langle \alpha_j B \rangle$ следует, что $\bar y = \langle \bar\alpha_j B \rangle$.

Легко убедиться, что верна следующая

Теорема 13. Если примем, что

$$y_1 = \langle \alpha_j M \rangle, \quad y_2 = \langle \alpha_j \bar M \rangle, \quad y_3 = \langle \alpha_j M^* \rangle, \quad y_4 = \langle \alpha_j \bar M^* \rangle,$$

то

$$y_1^* = \langle \alpha_j^* M \rangle, \quad y_2^* = \langle \bar\alpha_j^* \bar M \rangle, \quad y_3^* = \langle \alpha_j M^* \rangle, \quad y_4^* = \langle \bar\alpha_j \bar M^* \rangle.$$

Следствие 1. Из *теорем* **12** и **13** следует, что

$$\bar y_1^* = \langle \bar\alpha_j^* M \rangle, \quad \bar y_2^* = \langle \alpha_j^* \bar M \rangle, \quad \bar y_3^* = \langle \bar\alpha_j M^* \rangle, \quad \bar y_4^* = \langle \alpha_j \bar M^* \rangle.$$

В дальнейшем полезно иметь ввиду ещё и следующую очевидную лемму.

Лемма 1. Если $z_1 = \langle \tau_j \rangle$, $z_2 = \langle \bar\tau_j \rangle$, то

$$\begin{aligned} \bar z_1 &= \langle \bar\tau_j \rangle, & z_1^* &= \langle \bar\tau_j \rangle, & \bar z_1^* &= \langle \tau_j \rangle, \\ \bar z_2 &= \langle \tau_j \rangle, & z_2^* &= \langle \tau_j \rangle, & \bar z_2^* &= \langle \bar\tau_j \rangle. \end{aligned}$$

Для FS – операторов различных функций алгебры логики важным является понятие **области определения** (таблицы определения) рассматриваемой функции. Будем говорить, что область (таблица) определения функции есть X_j, если целочисленные неотрицательные индексы каждого из литералов (*литерал* — это общее имя для переменной x_i и её отрицание $\bar x_i$) не больше j. Если функция алгебры логики $f(X_j)$ имеет FS – оператор $\langle \alpha_j \rangle$, то этот факт будем записывать так:

$$f(X_j) \simeq \langle \alpha_j \rangle. \tag{48}$$

Если принять, что в **(44)** минимальным индексом является *нулевой*, и

$$\langle \tau \rangle \rightleftharpoons \langle \tau_0 \rangle = \langle \bar\theta \theta \rangle, \qquad \langle \bar\tau \rangle \rightleftharpoons \langle \bar\tau_0 \rangle = \langle \theta \bar\theta \rangle,$$

то очевидной является следующая

Лемма 2. Для селекторных функций (проекций) верны соотношения:

$$x_{j+1} \simeq \langle \bar{\tau}_j \rangle, \qquad \bar{x}_{j+1} \simeq \langle \tau_j \rangle.$$

Для записи функций с использованием классических бинарных операций из множества

$$\{\downarrow, \oplus, /, \bar{/}, \bar{\oplus}, \bar{\downarrow}\}, \tag{49}$$

где $\bar{/} \rightleftharpoons \&$ (**конъюнкция**), $\bar{\downarrow} \rightleftharpoons \vee$ (**дизъюнкция**), $\bar{\oplus} \rightleftharpoons \sim$ (**эквивалентность**), будем применять следующую *теорему*.

Теорема 14. Если функция алгебры логики $f(X_j)$ имеет FS – оператор $\langle \alpha_j \rangle$, то тогда следующие ниже функции с областью определения X_{j+1} имеют FS – операторы:

$$f(X_{j+1}) = f(X_j) \simeq \langle \alpha_j M \rangle, \tag{50}$$

$$f(X_j) \downarrow x_{j+1} \simeq \langle \bar{\alpha}_j \bar{T} \rangle, \qquad f(X_j) \downarrow \bar{x}_{j+1} \simeq \langle \bar{\alpha}_j \bar{T}^* \rangle, \tag{51}$$

$$f(X_j) \oplus x_{j+1} \simeq \langle \alpha_j \bar{M} \rangle, \qquad f(X_j) \oplus \bar{x}_{j+1} \simeq \langle \bar{\alpha}_j \bar{M} \rangle, \tag{52}$$

$$f(X_j) / x_{j+1} \simeq \langle \bar{\alpha}_j T^* \rangle, \qquad f(X_j) / \bar{x}_{j+1} \simeq \langle \bar{\alpha}_j T \rangle, \tag{53}$$

$$f(X_j) \bar{/} x_{j+1} \simeq \langle \alpha_j \bar{T}^* \rangle, \qquad f(X_j) \bar{/} \bar{x}_{j+1} \simeq \langle \alpha_j \bar{T} \rangle, \tag{54}$$

$$f(X_j) \bar{\oplus} x_{j+1} \simeq \langle \bar{\alpha}_j \bar{M} \rangle, \qquad f(X_j) \bar{\oplus} \bar{x}_{j+1} \simeq \langle \alpha_j \bar{M} \rangle, \tag{55}$$

$$f(X_j) \bar{\downarrow} x_{j+1} \simeq \langle \alpha_j T \rangle, \qquad f(X_j) \bar{\downarrow} \bar{x}_{j+1} \simeq \langle \alpha_j T^* \rangle. \tag{56}$$

Доказательство. Верность **(50)** следует из того, что поскольку область определения увеличилась вдвое, то битовую длину вектора – оператора следует циклически повторить, что и записано в правой части **(50)**.

Остальные соотношения **(51)** — **(56)** получаются в результате выполнения прямых выкладок, которые могут быть без труда повторены так, как мы это делаем на примере *первого* и *последнего* соотношений:

$$f(X_j) \downarrow x_{j+1} \simeq \langle \alpha_j \alpha_j \rangle \downarrow \langle \theta_j \bar{\theta}_j \rangle = \langle \bar{\alpha}_j \theta_j \rangle = \langle \bar{\alpha}_j \bar{T} \rangle,$$

$$f(X_j) \bar{\downarrow} \bar{x}_{j+1} \simeq \langle \alpha_j \alpha_j \rangle \bar{\downarrow} \langle \bar{\theta}_j \theta_j \rangle = \langle \bar{\theta}_j \alpha_j \rangle = \langle \alpha_j T^* \rangle.$$

Теорема 14 показывает, что из общей системы продукций множества Q естественным образом выделяется подмножество основных продукций

$$Q_1 = \{T, T^*, \bar{T}, \bar{T}^*, M, \bar{M}\},$$

достаточных для того, чтобы записать операции из множества (49) над заданными литералами. Если ограничиться конъюнкцией и дизъюнкцией над заданными литералами, то столь же естественным образом из общей системы выделяется *второе* подмножество основных продукций

$$Q_2 = \{T, T^*, \bar{T}, \bar{T}^*, M\}.$$

Для записи же только дизъюнкций над заданными литералами (дизъюнктов) достаточно базовой системы

$$Q_3 = \{T, T^*, M\},$$

а для записи только конъюнкций над заданными литералами (конъюнктов) достаточно базовой системы

$$Q_4 = \{\bar{T}, \bar{T}^*, M\}.$$

Точно таким же образом для записи лишь сложений по *модулю 2* над литералами достаточно базовой системы

$$Q_5 = \{\bar{M}, M\}.$$

Продукции M^* и $\bar{M}^*$ являются вспомогательными и могут использоваться для записи операций из системы (49) над уже имеющимися операторами:

$$\begin{aligned}
\langle \alpha_j M^* \rangle &= \langle \alpha_j T \rangle \,\bar{/}\, \langle \alpha_j^* T^* \rangle = \langle \bar{\alpha}_j \bar{T} \rangle \downarrow \langle \bar{\alpha}_j^* \bar{T}^* \rangle = \\
&= \langle \alpha_j \bar{T} \rangle \,\bar{\downarrow}\, \langle \alpha_j^* \bar{T}^* \rangle = \langle \bar{\alpha}_j T \rangle \,/\, \langle \bar{\alpha}_j^* T^* \rangle = \\
&= \langle \alpha_j T \rangle \,\bar{\oplus}\, \langle \alpha_j^* T^* \rangle = \langle \bar{\alpha}_j \bar{T} \rangle \,\bar{\oplus}\, \langle \bar{\alpha}_j^* \bar{T}^* \rangle = \\
&= \langle \alpha_j \bar{T} \rangle \oplus \langle \alpha_j^* \bar{T}^* \rangle = \langle \bar{\alpha}_j T \rangle \oplus \langle \bar{\alpha}_j^* T^* \rangle. \qquad (57)
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\langle \alpha_j \bar{M}^* \rangle &= \langle \alpha_j T \rangle \,\bar{/}\, \langle \bar{\alpha}_j^* T^* \rangle = \langle \bar{\alpha}_j \bar{T} \rangle \downarrow \langle \alpha_j^* \bar{T}^* \rangle = \\
&= \langle \alpha_j \bar{T} \rangle \,\bar{\downarrow}\, \langle \bar{\alpha}_j^* \bar{T}^* \rangle = \langle \bar{\alpha}_j T \rangle \,/\, \langle \alpha_j^* T^* \rangle = \\
&= \langle \alpha_j T \rangle \,\bar{\oplus}\, \langle \bar{\alpha}_j^* T^* \rangle = \langle \bar{\alpha}_j \bar{T} \rangle \,\bar{\oplus}\, \langle \alpha_j^* \bar{T}^* \rangle = \\
&= \langle \alpha_j \bar{T} \rangle \oplus \langle \bar{\alpha}_j^* \bar{T}^* \rangle = \langle \bar{\alpha}_j T \rangle \oplus \langle \alpha_j^* T^* \rangle. \qquad (58)
\end{aligned}$$

В системе продукций множества Q и его подмножеств Q_1, Q_2, Q_3, Q_4, Q_5 все продукции имеют индекс нуль, который не записывается, но подразумевается. Простейший способ расширения указанных множеств продукций может быть выполнен введением индексов $i = 1, 2, 3, \ldots,$ полагая

$$Q^i = \{T_i, \bar{T}_i, T_i^*, \bar{T}_i^* M_i, \bar{M}_i, M_i^*, \bar{M}_i^*\},$$

и аналогично для подмножеств $Q_1^i, Q_2^i, Q_3^i, Q_4^i, Q_5^i,$ при этом общее определение действия продукций с положительными индексами таково.

Если $i = 0, 1, 2, 3, \ldots,$ $j \geq i,$ $\langle \alpha_{j+1} \rangle = \langle \alpha_j^0 \alpha_j^1 \rangle,$ $B_{i+1} \in Q^{i+1},$ то

$$\langle \alpha_{j+1} B_{i+1} \rangle \rightleftharpoons \langle \alpha_j^0 B_i \alpha_j^1 B_i \rangle. \tag{59}$$

Приложение этого определения для записи операторов видно из следующей ниже *теоремы*.

Теорема 15. Если $k \geq 1$ и функция алгебры логики $f(X_{j+k})$ имеет FS – оператор

$$\langle \alpha_{j+k} \rangle = \langle \alpha_j^0 \alpha_j^1 \alpha_j^2 \alpha_j^3 \ \ldots \ \alpha_j^{s-1} \alpha_j^s \rangle, \quad \text{где} \quad s = 2^k - 1,$$

то тогда следующие функции с областью определения X_{j+k} имеют FS – операторы:

$$f(X_{j+k}) \downarrow x_{j+1} \leftrightharpoons \langle \bar{\alpha}_j^0 \bar{\alpha}_j^2 \bar{\alpha}_j^4 \ \ldots \ \bar{\alpha}_j^{s-1} \bar{T}_{k-1} \rangle, \tag{60}$$

$$f(X_{j+k}) \downarrow \bar{x}_{j+1} \leftrightharpoons \langle \bar{\alpha}_j^1 \bar{\alpha}_j^3 \bar{\alpha}_j^5 \ \ldots \ \bar{\alpha}_j^s \bar{T}_{k-1}^* \rangle, \tag{61}$$

$$f(X_{j+k}) / x_{j+1} \leftrightharpoons \langle \bar{\alpha}_j^1 \bar{\alpha}_j^3 \bar{\alpha}_j^5 \ \ldots \ \bar{\alpha}_j^s T_{k-1}^* \rangle, \tag{62}$$

$$f(X_{j+k}) / \bar{x}_{j+1} \leftrightharpoons \langle \bar{\alpha}_j^0 \bar{\alpha}_j^2 \bar{\alpha}_j^4 \ \ldots \ \bar{\alpha}_j^{s-1} T_{k-1} \rangle, \tag{63}$$

$$f(X_{j+k}) \bar{/} x_{j+1} \leftrightharpoons \langle \alpha_j^1 \alpha_j^3 \alpha_j^5 \ \ldots \ \alpha_j^s \bar{T}_{k-1}^* \rangle, \tag{64}$$

$$f(X_{j+k}) \bar{/} \bar{x}_{j+1} \leftrightharpoons \langle \alpha_j^0 \alpha_j^2 \alpha_j^4 \ \ldots \ \alpha_j^{s-1} \bar{T}_{k-1} \rangle, \tag{65}$$

$$f(X_{j+k}) \bar{\downarrow} x_{j+1} \leftrightharpoons \langle \alpha_j^0 \alpha_j^2 \alpha_j^4 \ \ldots \ \alpha_j^{s-1} T_{k-1} \rangle, \tag{66}$$

$$f(X_{j+k}) \bar{\downarrow} \bar{x}_{j+1} \leftrightharpoons \langle \alpha_j^1 \alpha_j^3 \alpha_j^5 \ \ldots \ \alpha_j^s T_{k-1}^* \rangle. \tag{67}$$

Доказательство. В верности этой теоремы легко убедиться, выполнив прямые выкладки. Образцы этих выкладок показаны на соотношениях (60) и (65):

$$f\,(X_{j+k}) \downarrow x_{j+1} \overset{\sim}{\rightarrow} \langle \alpha_j^0 \alpha_j^1 \alpha_j^2 \alpha_j^3 \;\ldots\; \alpha_j^{s-1} \alpha_j^s \rangle \downarrow \langle \theta_j \bar{\theta}_j \theta_j \bar{\theta}_j \;\ldots\; \theta_j \bar{\theta}_j \rangle =$$

$$= \langle \bar{\alpha}_j^0 \theta_j \bar{\alpha}_j^2 \theta_j \;\ldots\; \bar{\alpha}_j^{s-1} \theta_j \rangle = \langle \bar{\alpha}_j^0 \bar{\alpha}_j^2 \;\ldots\; \bar{\alpha}_j^{s-1} \bar{T}_{k-1} \rangle,$$

$$f\,(X_{j+k})\, \bar{/}\, \bar{x}_{j+1} \overset{\sim}{\rightarrow} \langle \alpha_j^0 \alpha_j^1 \alpha_j^2 \alpha_j^3 \;\ldots\; \alpha_j^{s-1} \alpha_j^s \rangle\, \bar{/}\, \langle \bar{\theta}_j \theta_j \bar{\theta}_j \theta_j \;\ldots\; \bar{\theta}_j \theta_j \rangle =$$

$$= \langle \alpha_j^0 \theta_j \alpha_j^2 \theta_j \;\ldots\; \alpha_j^{s-1} \theta_j \rangle = \langle \alpha_j^0 \alpha_j^2 \;\ldots\; \alpha_j^{s-1} \bar{T}_{k-1} \rangle.$$

Замечание 7. Опущенные в *теореме* 14 операции $\oplus$ и $\bar{\oplus}$ приводят к результатам

$$f\,(X_{j+k}) \oplus x_{j+1} \;\overset{\sim}{\rightarrow}\; \langle \alpha_j^0 \bar{\alpha}_j^1 \alpha_j^2 \bar{\alpha}_j^3 \;\ldots\; \alpha_j^{s-1} \bar{\alpha}_j^s \rangle, \tag{68}$$

$$f\,(X_{j+k}) \oplus \bar{x}_{j+1} \;\overset{\sim}{\rightarrow}\; \langle \bar{\alpha}_j^0 \alpha_j^1 \bar{\alpha}_j^2 \alpha_j^3 \;\ldots\; \bar{\alpha}_j^{s-1} \alpha_j^s \rangle, \tag{69}$$

$$f\,(X_{j+k})\, \bar{\oplus}\, x_{j+1} \;\overset{\sim}{\rightarrow}\; \langle \bar{\alpha}_j^0 \alpha_j^1 \bar{\alpha}_j^2 \alpha_j^3 \;\ldots\; \bar{\alpha}_j^{s-1} \alpha_j^s \rangle, \tag{70}$$

$$f\,(X_{j+k})\, \bar{\oplus}\, \bar{x}_{j+1} \;\overset{\sim}{\rightarrow}\; \langle \alpha_j^0 \bar{\alpha}_j^1 \alpha_j^2 \bar{\alpha}_j^3 \;\ldots\; \alpha_j^{s-1} \bar{\alpha}_j^s \rangle, \tag{71}$$

из которых можно извлечь полезные выводы, наложив определённые требования на оператор функции $f\,(X_{j+k})$.

Операторы правых частей (60) — (67) приобретают бо́льший интерес с учётом следующей *леммы*.

Лемма 3. Если $B_0, B_1, B_2, \ldots, B_{k-1} \in Q_1$ и

$$\langle \alpha_{j+k} \rangle = \langle \alpha_j^0 \alpha_j^1 \alpha_j^2 \alpha_j^3 \;\ldots\; \alpha_j^{s-1} \alpha_j^s \rangle = \langle \alpha_j B_0 B_1 \ldots B_{k-1} \rangle, \tag{72}$$

то

$$\left. \begin{aligned} \langle \alpha_j^0 \alpha_j^2 \alpha_j^4 \;\ldots\; \alpha_j^{s-1} \rangle &= \langle \beta_j^0 B_1 B_2 \ldots B_{k-1} \rangle, \\ \langle \alpha_j^1 \alpha_j^3 \alpha_j^5 \;\ldots\; \alpha_j^s \rangle &= \langle \beta_j^1 B_1 B_2 \ldots B_{k-1} \rangle \end{aligned} \right\}, \tag{73}$$

где

$$\langle \alpha_j B_0 \rangle = \langle \beta_j^0 \beta_j^1 \rangle. \tag{74}$$

Доказательство. Верность *леммы* становится очевидной, если использовать рекурсивное рассуждение, которое заключается в том, что в выражении (72) продукция $B_i \in Q_1$, (где $i > 0$) ведёт к приписыванию к выражению $\langle \alpha_j B_0 B_1 B_2 \ldots B_{i-1} \rangle$ справа или слева (как вектору) $\bar{\theta}_{j+i}$ или θ_{j+i}, когда B_i совпадает с одной из продукций $T, T^*, \bar{T}, \bar{T}^*$, и к приписыванию справа такого же выражения или инвертированного, когда B_i совпадает с M или $\bar{M}$. Продукция B_i, приписываемая к каждому из выражений (73), даёт половинный эффект, так как её место смещается левее на одну позицию из – за того, что в выражениях (73) продукция B_0 исключена.

Примеры, иллюстрирующие *лемму* 3.

$$
\begin{aligned}
1)\ \ &\langle \alpha_j T\,T^*\bar{T}\,T \rangle &&= \langle \bar{\theta}_j\bar{\theta}_j\alpha_j\bar{\theta}_j\theta_j\,\theta_j\,\theta_j\,\theta_j\,\bar{\theta}_j\,\bar{\theta}_j\bar{\theta}_j\,\bar{\theta}_j\,\bar{\theta}_j\bar{\theta}_j\bar{\theta}_j\,\bar{\theta}_j \rangle, \\
&\langle \alpha_j T^*\bar{T}\,T \rangle &&= \langle \bar{\theta}_j\alpha_j\ \theta_j\,\theta_j\ \bar{\theta}_j\,\bar{\theta}_j\,\bar{\theta}_j\,\bar{\theta}_j \rangle, \\
&\langle \bar{\theta}_j T^*\bar{T}\,T \rangle &&= \langle \bar{\theta}_j\bar{\theta}_j\ \theta_j\,\theta_j\ \bar{\theta}_j\,\bar{\theta}_j\,\bar{\theta}_j\,\bar{\theta}_j \rangle = \langle \tau_{j+1}T \rangle.
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
2)\ \ &\langle \alpha_j M\,T\,T^*\bar{M} \rangle &&= \langle \bar{\theta}_j\bar{\theta}_j\bar{\theta}_j\,\bar{\theta}_j\,\alpha_j\,\alpha_j\ \bar{\theta}_j\bar{\theta}_j\theta_j\,\theta_j\,\theta_j\theta_j\bar{\alpha}_j\,\bar{\alpha}_j\,\theta_j\,\theta_j \rangle, \\
&\langle \alpha_j T\,T^*\bar{M} \rangle &&= \langle \bar{\theta}_j\bar{\theta}_j\alpha_j\,\bar{\theta}_j\,\theta_j\,\theta_j\,\bar{\alpha}_j\,\theta_j \rangle; \quad \text{второй оператор такой же.}
\end{aligned}
$$

Замечание 8. Точно такими же рассуждениями можно показать, что *лемма* 3 остаётся справедливой и в том случае, когда условие на продукции заменяется на более общее, а именно:

$$B_0,\, B_1,\, B_2,\, \dots\,,\, B_{k-1} \in Q_1 \cup Q_2^r \tag{75}$$

и если

$$B_i \in Q_2^r, \quad \text{то} \quad r < i. \tag{76}$$

Иллюстрационные примеры к этому замечанию.

$$
\begin{aligned}
1)\ \ &\langle \alpha_j M\,T\,\bar{T}_1T_2^* \rangle &&= \langle \bar{\theta}_{j+1}\alpha_j\alpha_j\,\bar{\theta}_{j+1}\,\theta_{j+1}\,\bar{\theta}_{j+1}\,\bar{\theta}_{j+2}\theta_{j+1} \rangle, \\
&\langle \alpha_j T\,\bar{T}_1T_2^* \rangle &&= \langle \bar{\theta}_j\alpha_j\ \bar{\theta}_j\,\theta_j\,\bar{\theta}_{j+1}\,\theta_j \rangle; \quad \text{второй оператор такой же.} \\
2)\ \ &\langle \alpha_j T\,T^*\bar{T}\,T\,T_2T_1^* \rangle &&= \langle \bar{\theta}_{j+4}\bar{\theta}_{j+1}\,\alpha_j\,\bar{\theta}_j\,\bar{\theta}_{j+2}\,\theta_{j+2}\,\bar{\theta}_{j+2}\,\bar{\theta}_{j+5} \rangle, \\
&\langle \alpha_j T^*\bar{T}\,T\,T_2T_1^* \rangle &&= \langle \bar{\theta}_{j+3}\bar{\theta}_j\,\alpha_j\bar{\theta}_{j+1}\,\theta_{j+1}\,\bar{\theta}_{j+1}\,\bar{\alpha}_{j+4} \rangle, \\
&\langle \bar{\theta}_j T^*\bar{T}\,T\,T_2T_1^* \rangle &&= \langle \bar{\theta}_{j+3}\bar{\theta}_{j+2}\theta_{j+1}\,\bar{\theta}_{j+1}\bar{\theta}_{j+4} \rangle = \langle \tau_{j+1}T\,T_2T_1^* \rangle.
\end{aligned}
$$

3.4 Постановка и запись задач распознавания с использованием FS–операторов

Задачи логического распознавания — это такие задачи, в которых требуется ответить на вопрос: *"да"* или *"нет"*. Например, имеет ли данная система уравнений решение; имеются ли бесконечно много простых чисел – близнецов и так далее. Список таких задач является обширным и многие из них являются чрезвычайно трудными.

Хотя целый класс дискретных задач в принципе может быть решён простым перебором, но практическое осуществление этой процедуры даже с помощью ЭВМ наталкивается на трудности, связанные с большими затратами времени и машинной памяти, так как число шагов переборного метода растёт экспоненциально в зависимости от размеров задачи (исключение составляют отдельные задачи).

Задача выполнимости, упомянутая во введении, в определённом смысле является одной из самых интересных. Эта задача, впервые сформулированная для нужд кибернетики и вычислительной математики около трёх десятков лет назад ([29], [30]), известна в классической логике [25], [24] значительно раньше. Она используется в качестве некоторой меры сложности в теории трудноpешаемых задач [15]. Хотя это — абстрактная задача, она имеет большое количество разнообразных интерпретаций и держит рекорд по числу практических приложений: важнейшие этапы минимизации дизъюнктивных нормальных форм [31], комбинаторика логического проектирования [32], логические уравнения [33], [34], построение тестов для логических схем [35], нахождение дизъюнктивных нормальных функций, реализуемых схемами [36]. Эта задача занимает центральное место в теории алгоритмов [37], [34]. Она не безинтересна для разработчиков систем искусственного интеллекта [38], [39], [40]. Большое количество задач, сводимых к задаче выполнимости, можно найти в [15].

В задаче выполнимости (в её классической формулировке) требуется ответить: *существует ли набор значений переменных, называемый выполняющим, который превращает данную* КНФ *в истинное высказывание ?* (Форма называется КНФ, если она является конъюнкцией одного или более конъюнктивных членов, каждый из которых является дизъюнктом). При положительном ответе КНФ называется выполнимой, при отрицательном — невыполнимой (противоречивой); если кроме распознавания выполнимости требуется ещё предъявить выполняющий набор, то задачу называют выполнимой с предъявлением, которую мы будем иметь ввиду в дальнейшем, кратко записывая ВЫП.

Примеры задач ВЫП. В каждой из нижеследующих КНФ $f_1(X_5)$ и $f_2(X_7)$ требуется определить: выполнима ли предъявленная форма 7

$$
\begin{aligned}
f_1(X_5) \;\rightleftharpoons\;& (\bar{x}_1 \bar{\downarrow} x_2)\,\bar{/}\,(\bar{x}_1 \bar{\downarrow} \bar{x}_2)\,\bar{/}\,(x_1 \bar{\downarrow} \bar{x}_2 \bar{\downarrow} x_4)\,\bar{/}\,(x_1 \bar{\downarrow} x_2 \bar{\downarrow} \bar{x}_3)\,\bar{/} \\
\bar{/}\;\;& (x_1 \bar{\downarrow} \bar{x}_2 \bar{\downarrow} \bar{x}_5)\,\bar{/}\,(x_1 \bar{\downarrow} \bar{x}_2 \bar{\downarrow} \bar{x}_4 \bar{\downarrow} x_5)\,\bar{/}\,(x_2 \bar{\downarrow} x_3).
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
f_2(X_7) \;\rightleftharpoons\;& (x_1 \bar{\downarrow} x_3 \bar{\downarrow} \bar{x}_4 \bar{\downarrow} x_6)\,\bar{/}\,(x_1 \bar{\downarrow} \bar{x}_2 \bar{\downarrow} x_3 \bar{\downarrow} \bar{x}_5)\,\bar{/}\,(x_4 \bar{\downarrow} x_5 \bar{\downarrow} \bar{x}_6 \downarrow \bar{x}_7)\,\bar{/} \\
\bar{/}\;\;& (x_1 \bar{\downarrow} x_4 \bar{\downarrow} \bar{x}_5)\,\bar{/}\,(\bar{x}_2 \bar{\downarrow} \bar{x}_3 \bar{\downarrow} x_6 \bar{\downarrow} x_7)\,\bar{/}\,(\bar{x}_3 \bar{\downarrow} \bar{x}_4 \bar{\downarrow} \bar{x}_7)\,\bar{/} \\
\bar{/}\;\;& (\bar{x}_5 \bar{\downarrow} x_6 \bar{\downarrow} x_7)\,\bar{/}\,(x_5 \bar{\downarrow} \bar{x}_6 \bar{\downarrow} x_7).
\end{aligned}
$$

3.4.1 Операторы задачи ВЫП и её табличное представление

В задачах ВЫП имеем дело с конъюнкцией дизъюнктов. Для представления дизъюнктов FS – операторами можно воспользоваться *леммой* **2** и *теоремой* **14**, точнее, соотношениями **(56)** из *теоремы* **14**.

Для дизъюнктов формы $f_1(X_5)$ имеем:

$$
\begin{array}{rcllllll}
\bar{x}_1 \bar{\downarrow} x_2 & \simeq & \langle \tau & T & M & M & M \rangle, \\
\bar{x}_1 \bar{\downarrow} \bar{x}_2 & \simeq & \langle \tau & T^* & M & M & M \rangle, \\
x_1 \bar{\downarrow} \bar{x}_2 \bar{\downarrow} x_4 & \simeq & \langle \bar{\tau} & T^* & M & T & M \rangle, \\
x_1 \bar{\downarrow} x_2 \bar{\downarrow} \bar{x}_3 & \simeq & \langle \bar{\tau} & T & T^* & M & M \rangle, \\
x_1 \bar{\downarrow} \bar{x}_2 \bar{\downarrow} \bar{x}_5 & \simeq & \langle \bar{\tau} & T^* & M & M & T^* \rangle, \\
x_1 \bar{\downarrow} \bar{x}_2 \bar{\downarrow} \bar{x}_4 \bar{\downarrow} x_5 & \simeq & \langle \bar{\tau} & T^* & M & T^* & T \rangle, \\
x_2 \bar{\downarrow} x_3 & \simeq & \langle & \bar{\tau}_1 & T & M & M \rangle.
\end{array}
$$

Для дизъюнктов формы $f_2(X_7)$ имеем:

$$
\begin{array}{rclllllll}
x_1 \bar{\downarrow} x_3 \bar{\downarrow} \bar{x}_4 \bar{\downarrow} x_6 & \simeq & \langle \bar{\tau} & M & T & T^* & M & T & M \rangle, \\
x_1 \bar{\downarrow} \bar{x}_2 \bar{\downarrow} x_3 \bar{\downarrow} \bar{x}_5 & \simeq & \langle \bar{\tau} & T^* & T & M & T^* & M & M \rangle, \\
x_4 \bar{\downarrow} x_5 \bar{\downarrow} \bar{x}_6 \bar{\downarrow} \bar{x}_7 & \simeq & \langle & & & \bar{\tau}_3 & T & T^* & T^* \rangle, \\
x_1 \bar{\downarrow} x_4 \bar{\downarrow} \bar{x}_5 & \simeq & \langle \bar{\tau} & M & M & T & T^* & M & M \rangle, \\
\bar{x}_2 \bar{\downarrow} \bar{x}_3 \bar{\downarrow} x_6 \bar{\downarrow} x_7 & \simeq & \langle & \tau_1 & T^* & M & M & T & T \rangle, \\
\bar{x}_3 \bar{\downarrow} \bar{x}_4 \bar{\downarrow} \bar{x}_7 & \simeq & \langle & & \tau_2 & T^* & M & M & T^* \rangle, \\
\bar{x}_5 \bar{\downarrow} x_6 \bar{\downarrow} x_7 & \simeq & \langle & & & & \tau_4 & T & T \rangle, \\
x_5 \bar{\downarrow} \bar{x}_6 \bar{\downarrow} x_7 & \simeq & \langle & & & & \bar{\tau}_4 & T^* & T \rangle.
\end{array}
$$

В табличном представлении задачи ВЫП каждый дизъюнкт имеет FS – оператор в системе продукций Q_3 и занимает одну строку таблицы. Число столбцов таблицы совпадает с числом переменных. Заполнение таблицы осуществляется так. В дизъюнкте литералу с минимальным индексом i ставится в соответствие $\bar{\tau}_{i-1}$, если – это x_i и τ_{i-1} для $\bar{x}_i$. Эти начала записываются в $(i-1)$–ом столбце. В остальных столбцах правее $(i-1)$–го записываем T в j–ом столбце, если в дизъюнкте входит x_{j+1} и записываем T^* для $\bar{x}_{j+1}$. Если в дизъюнкте литерала с индексом $j+1$ нет, то записываем продукцию M. Принимем, что FS–операторы, занимающие каждый по строке в таблице, соединены конъюнктивно. Разумеется, что по таблице можно однозначно восстановить задачу в КНФ. КНФ для $f_1(X_5)$ и $f_2(X_7)$ имеются табличное представление: *таблица* 1 и *таблица* 2 соответственно.

Таблица 1

0	1	2	3	4
τ	T	M	M	M
τ	T^*	M	M	M
$\bar{\tau}$	T^*	M	T	M
$\bar{\tau}$	T	T^*	M	M
$\bar{\tau}$	T^*	M	M	T^*
$\bar{\tau}$	T^*	M	T^*	T
	$\bar{\tau}$	T	M	M

Таблица 2

0	1	2	3	4	5	6
$\bar{\tau}$	M	T	T^*	M	T	M
$\bar{\tau}$	T^*	T	M	T^*	M	M
			$\bar{\tau}$	T	T^*	T^*
$\bar{\tau}$	M	M	T	T^*	M	M
	τ	T^*	M	M	T	T
		τ	T^*	M	M	T^*
				τ	T	T
				$\bar{\tau}$	T^*	T

Замечание 9. В строках таблицы задачи ВЫП индекс у τ или $\bar{\tau}$ опущен, но он предполагается равным номеру столбца. Поскольку в задачах имеется конъюнкция операторов, то перестановка строк в таблицах не влияет на решение задач, представленных таблично. Перестановка столбцов в таблице задачи ВЫП означает переименование переменных, поэтому, если в такой задаче находится решение, то должно быть учтено переименование.

Для операторов таблицы будут использоваться понятия: *длина оператора* и *ранг оператора*. Длина оператора таблицы с n столбцами $0, 1, 2, \ldots, n-1$ и с началом τ_{i-1} или $\bar{\tau}_{i-1}$ равна $n-i+1$, а ранг оператора равен $n-i-k+1$, где k — сумма продукций M в операторе, то есть ранг оператора совпадает с числом литералов, входящих в дизъюнкт. Значит, при перестановке столбцов ранг оператора не изменяется, а длина оператора может измениться.

Таблица называется *двойственной* к таблице задачи ВЫП, если в ней произведена замена τ на $\bar{\tau}$, $\bar{\tau}$ на τ, T на $\bar{T}$ и T^* на $\bar{T}^*$ и, кроме того, принимается, что FS–операторы, занимающие каждый по строке в таблице, соединены дизъюнктивно, что отмечается двойной вертикальной чертой в её начале. *Таблица* **3** является двойственной к *таблице* 1, и *таблица* **4** — двойственна к *таблице* **2**.

Таблица 3

0	1	2	3	4
$\bar{\tau}$	$\bar{T}$	M	M	M
$\bar{\tau}$	$\bar{T}^*$	M	M	M
τ	$\bar{T}^*$	M	$\bar{T}$	M
τ	$\bar{T}$	$\bar{T}^*$	M	M
τ	$\bar{T}^*$	M	M	$\bar{T}^*$
τ	$\bar{T}^*$	M	$\bar{T}^*$	$\bar{T}$
	τ	$\bar{T}$	M	M

Таблица 4

0	1	2	3	4	5	6
τ	M	$\bar{T}$	$\bar{T}^*$	M	$\bar{T}$	M
τ	$\bar{T}^*$	$\bar{T}$	M	$\bar{T}^*$	M	M
			τ	$\bar{T}$	$\bar{T}^*$	$\bar{T}^*$
τ	M	M	$\bar{T}$	$\bar{T}^*$	M	M
	$\bar{\tau}$	$\bar{T}^*$	M	M	$\bar{T}$	$\bar{T}$
		$\bar{\tau}$	$\bar{T}^*$	M	M	$\bar{T}^*$
				$\bar{\tau}$	$\bar{T}$	$\bar{T}$
				τ	$\bar{T}^*$	$\bar{T}$

В том случае, когда задача ВЫП является противоречивой, двойственная задача является тавтологией. Это действительно так, поскольку двойственная таблица к таблице задачи ВЫП является таблицей ДНФ, получающейся из КНФ в результате замены x_i на $\bar{x}_i$, $\bar{x}_i$ на x_i и $\bar{\downarrow}$ на $\bar{/}$, а $\bar{/}$ на $\bar{\downarrow}$.

3.4.2 Юнкты и их FS–операторы

Таблицы задачи ВЫП и двойственные к ним являются частным случаем более общих таблиц, которые могут быть составлены из операторов более общего характера. В самом деле, в таблице задачи ВЫП каждый оператор получается из дизъюнкта. Однако, вместо дизъюнкта мы можем иметь и другие образования, которые могут получаться в результате замены $\bar{\downarrow}$ на любую операцию из множества **(49)**, то есть иметь: $\downarrow$ – юнкт, $\oplus$ – юнкт, $/$ – юнкт, $\bar{/}$ – юнкт, $\bar{\oplus}$ – юнкт, используя в названии первый слог от операции перед словом *"юнкт"*, то есть соответственно: **вебъюнкт**, **модъюнкт**, **шефъюнкт**, **конъюнкт**, **эквиюнкт**. Например, из первого $\bar{\downarrow}$ – юнкта $f_2(X_7)$ можем получить следующие юнкты в перечисленной выше последовательности:

$$
\begin{aligned}
&x_1 \ \downarrow \ x_3 \ \downarrow \ \bar{x}_4 \ \downarrow \ x_6,\\
&x_1 \ \oplus \ x_3 \ \oplus \ \bar{x}_4 \ \oplus \ x_6,\\
&x_1 \ / \ x_3 \ / \ \bar{x}_4 \ / \ x_6,\\
&x_1 \ \bar{/} \ x_3 \ \bar{/} \ \bar{x}_4 \ \bar{/} \ x_6,\\
&x_1 \ \bar{\oplus} \ x_3 \ \bar{\oplus} \ \bar{x}_4 \ \bar{\oplus} \ x_6,
\end{aligned}
\tag{77}
$$

при этом предполагается, что операции выполняются в порядке их следования.

Если сохранить требование выполнять операции в порядке их следования, то разумеется, что совсем не обязательно, чтобы между литералами указывалась одна и та же операция, то есть мы могли бы строить и смешанные юнкты, если только индексы переменных возрастают, как например

$$
\begin{aligned}
&x_1 \ \downarrow \ x_3 \ / \ \bar{x}_4 \ \bar{\downarrow} \ x_6,\\
&x_1 \ \bar{/} \ x_3 \ \bar{\downarrow} \ \bar{x}_4 \ / \ x_6,\\
&x_1 \ \oplus \ x_3 \ \bar{/} \ \bar{x}_4 \ \bar{\oplus} \ x_6.
\end{aligned}
\tag{78}
$$

Используя *лемму* 2 и *теорему* 14 для перечисленных типов юнктов легко строятся FS–операторы. Перечисленные в (77) и (78) юнкты имеют FS–операторы соответственно:

$$
\begin{aligned}
&\langle \tau \ \ M \ \ \bar{T} \ \ T^* \ \ M \ \ \bar{T} \rangle,\\
&\langle \tau \ \ M \ \ \bar{M} \ \ \bar{M} \ \ M \ \ \bar{M} \rangle,\\
&\langle \tau \ \ M \ \ T^* \ \ \bar{T} \ \ M \ \ T^* \rangle,\\
&\langle \bar{\tau} \ \ M \ \ \bar{T}^* \ \ \bar{T} \ \ M \ \ \bar{T}^* \rangle,\\
&\langle \bar{\tau} \ \ M \ \ \bar{M} \ \ \bar{M} \ \ M \ \ \bar{M} \rangle,
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
&\langle \bar{\tau} \ \ M \ \ T \ \ T \ \ M \ \ T \rangle,\\
&\langle \tau \ \ M \ \ T^* \ \ \bar{T}^* \ \ M \ \ T^* \rangle,\\
&\langle \bar{\tau} \ \ M \ \ \bar{M} \ \ \bar{T} \ \ M \ \ T \rangle.
\end{aligned}
$$

От требования, чтобы индексы переменных в юнктах возрастали, можно отказаться, если в записи юнктов использовать только операции из множества

$$\{\downarrow, /, \bar{/}, \bar{\downarrow}\}, \tag{79}$$

так как в этом случае, для записи FS–операторов, кроме *леммы* 2 и *теоремы* 14 следует использовать *теорему* 15, *лемму* 3 и *замечание* 8. А это значит, что в записи FS–операторов будут использованы продукции из множества Q_2^5 с условием (76), что обусловлено множеством (79).

3.5 σ–операторы юнктов

Как известно, при постановке различных задач важную роль играют *юнкты*, которые, будучи соединённые знаками логических операций, дают нам полные формулировки задач. Но для записи самих юнктов необходимы базовые σ–операторы или селекторные операторы.

3.5.1 Селекторные операторы

Принятый нами способ задания таблицы определения X_n (*см.* 2.1) и записи базовых σ–операторов (*см.* (38)) позволяет заявить, что верна следующая очевидная

Теорема 16. Селекторные операторы или операторы переменных (при заданном n) имеют базовые σ–операторы:

$$\begin{array}{rr}
x_1 \stackrel{\sim}{\to} \langle\langle \bar{\tau}^{n-1} \rangle\rangle, & \bar{x}_1 \stackrel{\sim}{\to} \langle\langle \tau^{n-1} \rangle\rangle, \\
x_2 \stackrel{\sim}{\to} \langle\langle \bar{\tau}_1^{n-2} \rangle\rangle, & \bar{x}_2 \stackrel{\sim}{\to} \langle\langle \tau_1^{n-2} \rangle\rangle, \\
x_3 \stackrel{\sim}{\to} \langle\langle \bar{\tau}_2^{n-3} \rangle\rangle, & \bar{x}_3 \stackrel{\sim}{\to} \langle\langle \tau_2^{n-3} \rangle\rangle, \\
\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots & \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots \\
\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots & \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots \\
x_j \stackrel{\sim}{\to} \langle\langle \bar{\tau}_{j-1}^{n-j} \rangle\rangle, & \bar{x}_j \stackrel{\sim}{\to} \langle\langle \tau_{j-1}^{n-j} \rangle\rangle, \\
\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots & \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots \\
\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots & \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots \\
x_{n-1} \stackrel{\sim}{\to} \langle\langle \bar{\tau}_{n-2}^{1} \rangle\rangle, & \bar{x}_{n-1} \stackrel{\sim}{\to} \langle\langle \tau_{n-2}^{1} \rangle\rangle, \\
x_n \stackrel{\sim}{\to} \langle\langle \bar{\tau}_{n-1} \rangle\rangle, & \bar{x}_n \stackrel{\sim}{\to} \langle\langle \tau_{n-2} \rangle\rangle.
\end{array}$$

При выполнении выкладок удобно использовать некоторые достаточно очевидные свойства системы конечных σ–операторов:

$$\langle\langle \nu_j^i \rangle\rangle,\ \langle\langle \tau_j^i \rangle\rangle,\ \langle\langle \bar{\tau}_j^i \rangle\rangle,\ \langle\langle \bar{\nu}_j^i \rangle\rangle, \tag{80}$$

где предполагается, что целые неотрицательные i и j подчинены равенству

$$j + i = n - 1. \tag{81}$$

В перечне свойств конечных σ–операторов одно и то же выражение может иметь различные формы записи, поэтому условно принято, что последняя запись в перечне считается предпочтительной.

Свойство 1. Если $0 \le k \le i$ и $0 \le k \le j$, то

а) $\langle\langle \nu_j^i \rangle\rangle = \langle\langle \nu_{j-k}^{i+k} \rangle\rangle = \langle\langle \nu_{j+k}^{i-k} \rangle\rangle = \langle\langle \nu^{j+i} \rangle\rangle = \langle\langle \nu_{j+i} \rangle\rangle$,

б) $\langle\langle \bar{\nu}_j^i \rangle\rangle = \langle\langle \bar{\nu}_{j-k}^{i+k} \rangle\rangle = \langle\langle \bar{\nu}_{j+k}^{i-k} \rangle\rangle = \langle\langle \bar{\nu}^{j+i} \rangle\rangle = \langle\langle \bar{\nu}_{j+i} \rangle\rangle$,

в) $\langle\langle \nu_j\, \nu_j \rangle\rangle = \langle\langle \nu_{j+1} \rangle\rangle$,

г) $\langle\langle \bar{\nu}_j\, \bar{\nu}_j \rangle\rangle = \langle\langle \bar{\nu}_{j+1} \rangle\rangle$.

Верность свойств 1а) $\div$ 1г) следует из определений операторов $\langle\langle \nu_j^i \rangle\rangle$ и $\langle\langle \bar{\nu}_j^i \rangle\rangle$.

Свойство 2.

а) $\langle\langle (\bar{\nu}_j\, \nu_j)^i \rangle\rangle = \langle\langle \tau_{j+1}^i \rangle\rangle$,

б) $\langle\langle (\nu_j\, \bar{\nu}_j)^i \rangle\rangle = \langle\langle \bar{\tau}_{j+1}^i \rangle\rangle$.

В самом деле, в случае **а)**

$$\langle\langle \tau_{j+1}^i \rangle\rangle = \langle\langle (\bar{\theta}_{j+1}\, \theta_{j+1})^i \rangle\rangle = \langle\langle (\bar{\nu}_j\, \nu_j)^i \rangle\rangle,$$

что может быть записано и в обратном направлении.

Аналогичное верно и для **2б)**.

Лемма 4. Если $1 \le j < r \le n$, $p = r - j$ и a – общее имя для τ_{j-1} и $\bar{\tau}_{j-1}$, то селекторные функции x_j и $\bar{x}_j$ имеют σ–оператор $\langle\langle (a^p)^{n-r} \rangle\rangle$.

Доказательство. В самом деле,

$$x_j \ \simeq\ \langle\langle \bar{\tau}_{j-1}^{n-j} \rangle\rangle = \langle\langle (\bar{\tau}_{j-1}^{r-j})^{n-r} \rangle\rangle = \langle\langle (a^p)^{n-r} \rangle\rangle,$$

$$\bar{x}_j \ \simeq\ \langle\langle \tau_{j-1}^{n-j} \rangle\rangle = \langle\langle (\tau_{j-1}^{r-j})^{n-r} \rangle\rangle = \langle\langle (a^p)^{n-r} \rangle\rangle.$$