Нелинейная динамика тяжелого сжимаемого газа в приближении мелкой воды

Петросян А.С, Карельский К.В, Черняк А.В.
5768687@gmail.com

501 сектор
Институт Космических Исследований РАН

Таруса, 20 октября 2011

Содержание

1. Статическая сжимаемость

Сжимаемость (Gauthier, Creurer):

- динамическая (акустические эффекты)

  M ≥ 1   или высокочастотные колебания

- статическая (стратификация)

  $H \sim O(H_S)$, $H_S = \left(\frac{1}{\rho}\frac{d\rho}{dz}\right)^{-1}$ - приведенная высота.

  На этой высоте плотностная стратификация становится существенной (Batchelor «Введение в динамику жидкости»)

1. Применение

- Крупномасштабные атмосферные\океанические течения с высотой\глубиной порядка H_S.
- движениях воздуха с частицами пыли или песка (Huppert, compressible-driven gravity currents), океанические течения с илом.
- Вулканы, пирокластические течения (Dobran, Neri. Numerical simulation of collapsing volcanic columns. Jaupart, C. 1991 Effects on compressibility on the flow of lava. Bull. Volcanol. 54, 1–9)
- Песчаные бури на Марсе (Parsons 2000, Are fast-growing Martian dust storms compressible?)

2. Исходная система уравнений движения тяжелого сжимаемого газа со свободной поверхностью.

- Уравнения движения Эйлера в поле силы тяжести
- Политропный совершенный сжимаемый газ, непрерывные процессы адиабатические.

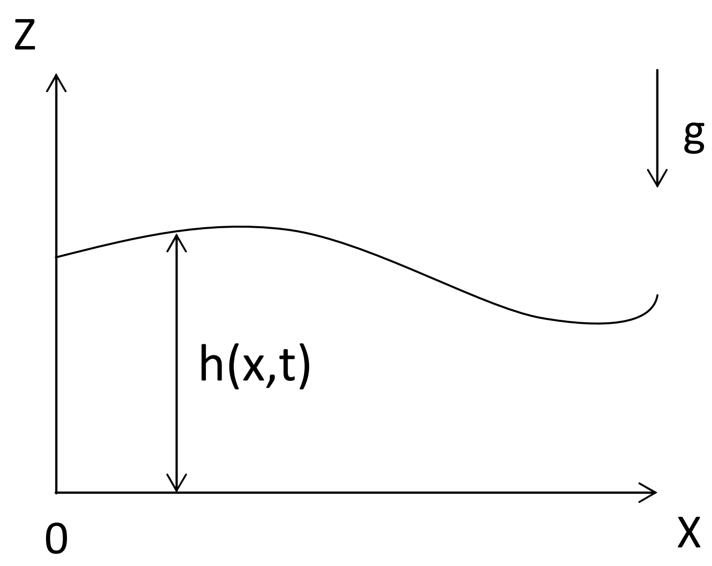
$$\begin{cases} \rho \dfrac{du}{dt} = -\dfrac{\partial p}{\partial x} \\ \rho \dfrac{dw}{dt} = -\dfrac{\partial p}{\partial z} - \rho g \\ \dfrac{\partial \rho}{\partial t} + \dfrac{\partial(\rho u)}{\partial x} + \dfrac{\partial(\rho w)}{\partial z} = 0 \end{cases}$$

$$\begin{cases} p = \rho R T \\ E = c_V T \\ dE = -p d\left(\dfrac{1}{\rho}\right) \end{cases}$$

3. Приближение мелкой воды.

- Слой газа высоты h(x,t)
- Гидростатическое распределение давления, $\frac{H}{L} \ll 1$
- Граничные условия непротекания:

$$\begin{cases} w\big|_{z=0} = 0 \\ w\big|_{z=h} = \dfrac{\partial h}{\partial t} + u\big|_{z=h} \dfrac{\partial h}{\partial x} \end{cases}$$



- Заданные p, T на свободной поверхности

$$\begin{cases} p|_{z=h} = p_a \\ T|_{z=h} = T_a \end{cases}$$

3. Осредненные уравнения по высоте

- Масштабы: высота h_0 , скорость $\sqrt{gh_0}$

время $\sqrt{\dfrac{h_0}{g}}$, плотность ρ_i, температура T_i

$$\begin{cases} \dfrac{\partial l}{\partial t} + \dfrac{\partial (lu)}{\partial x} = 0 \\ \dfrac{\partial u}{\partial t} + \dfrac{a^2}{l}\dfrac{\partial l}{\partial x} + u\dfrac{\partial u}{\partial x} = 0 \end{cases}$$

$$l \equiv \frac{1}{B}\left[\left(1 + h \cdot \frac{B}{A}\right)^A - 1\right] = h\overline{\rho}$$

$$a \equiv \sqrt{l\left(1 + l \cdot B\right)^{\frac{1-A}{A}}}$$

$$A = \frac{\gamma}{\gamma - 1} \qquad B = \frac{h_0}{H_s} \qquad H_s = \frac{RT_i}{g}$$

4. Постановка задачи Римана.

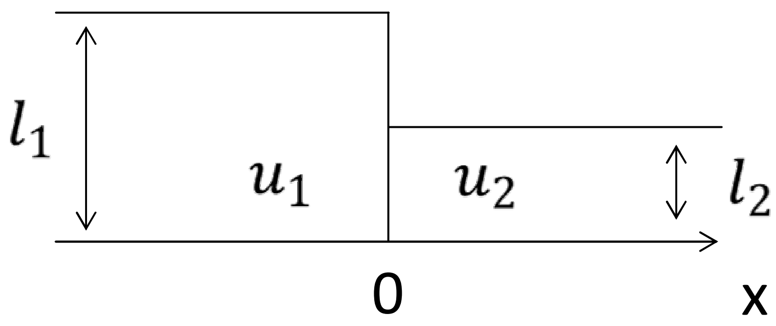
- Заданы кусочно-постоянные начальные

условия l_i, u_i при x>0 и x<0

- Определить течение при $t > 0$

$$\begin{cases} \dfrac{\partial l}{\partial t} + \dfrac{\partial (lu)}{\partial x} = 0 \\ \dfrac{\partial u}{\partial t} + \dfrac{a^2}{l}\dfrac{\partial l}{\partial x} + u\dfrac{\partial u}{\partial x} = 0 \end{cases}$$

$t = 0$



$l_1 \geq l_2$

5. Решение Задачи Римана.

1. Нахождение всех автомодельных непрерывных решений – центрированные волны Римана.
2. Разрывные решения. Соотношения Ранкина-Гюгонио. Ударные волны.
3. «Конструирование» решения по начальным условиям

5. Непрерывные решения. Простые волны Римана

$$\begin{cases} d\left(u+\psi\left(l\right)\right)=0, \dfrac{dx}{dt}=u+a\left(l\right) \\ d\left(u-\psi\left(l\right)\right)=0, \dfrac{dx}{dt}=u-a\left(l\right) \end{cases} \qquad \psi(x,t)\equiv\psi(l)\equiv\int\frac{a\left(l\right)}{l}dl$$

- Инварианты Римана

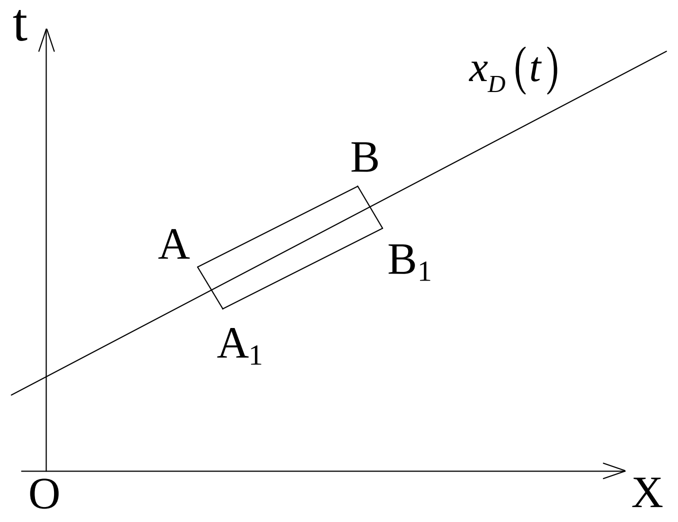
$$\begin{cases} r=u+\psi(l) \\ s=u-\psi(l) \end{cases} \qquad \begin{cases} u=\dfrac{r+s}{2} \\ \psi(l)=\dfrac{r-s}{2} \end{cases}$$

- Волны Римана, прямые характеристики

5. Разрывные решения. Соотношения Ранкина-Гюгонио. Ударные волны.

- У.В. Распространяется по газу с параметрами 1, оставляя позади газ с параметрами 2

$$\begin{cases} D = \dfrac{l_2 u_2 - l_1 u_1}{l_2 - l_1} \\ u_2 = u_1 + Sign\left(D - u_1\right)\sqrt{\left(\varphi\left(l_2\right) - \varphi\left(l_1\right)\right)\left(\dfrac{1}{l_1} - \dfrac{1}{l_2}\right)} \\ l_2 \geq l_1 \end{cases}$$



$$\varphi(l) = \int a^2 dl$$

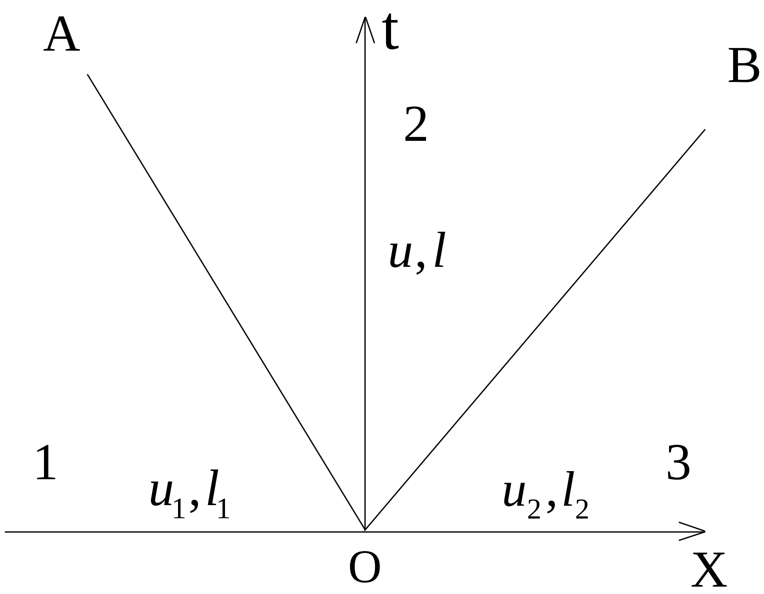
$$= \frac{A^2}{B^2}\frac{1}{(1+A)}(1 + l \cdot B)^{\frac{1}{A}}\left(l \cdot \frac{B}{A} - 1\right)$$

5. «Конструирование» решения по начальным условиям

1. Система уравнений и интегральные следствия (соотношения Ранкина-Гюгонио) инвариантны относительно замены $\tilde{t} = kt, \tilde{x} = kx, k > 0$

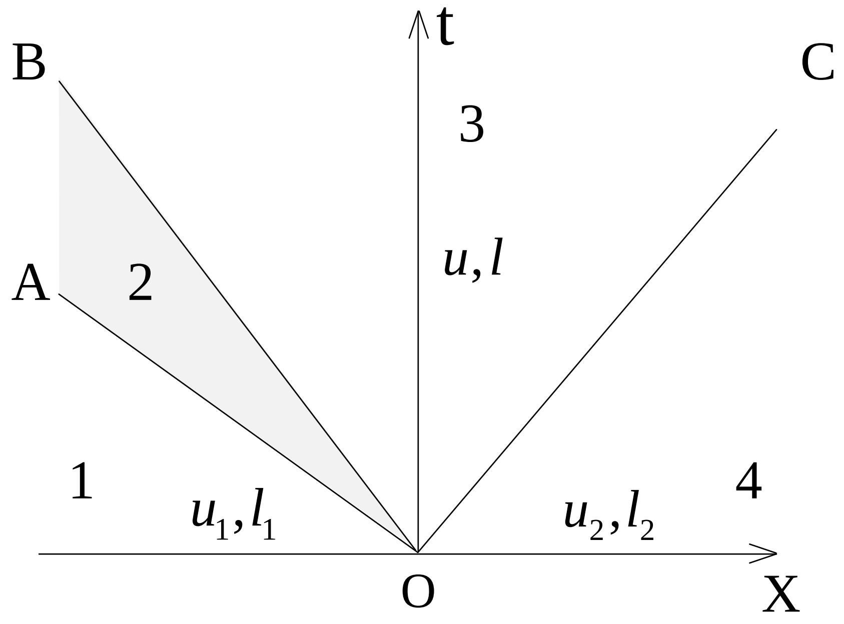
   Значит, если решение единственно и существует – то оно автомодельно.
2. Существует автомодельное решение – строим его.

5. Автомодельное решение. две ударные волны



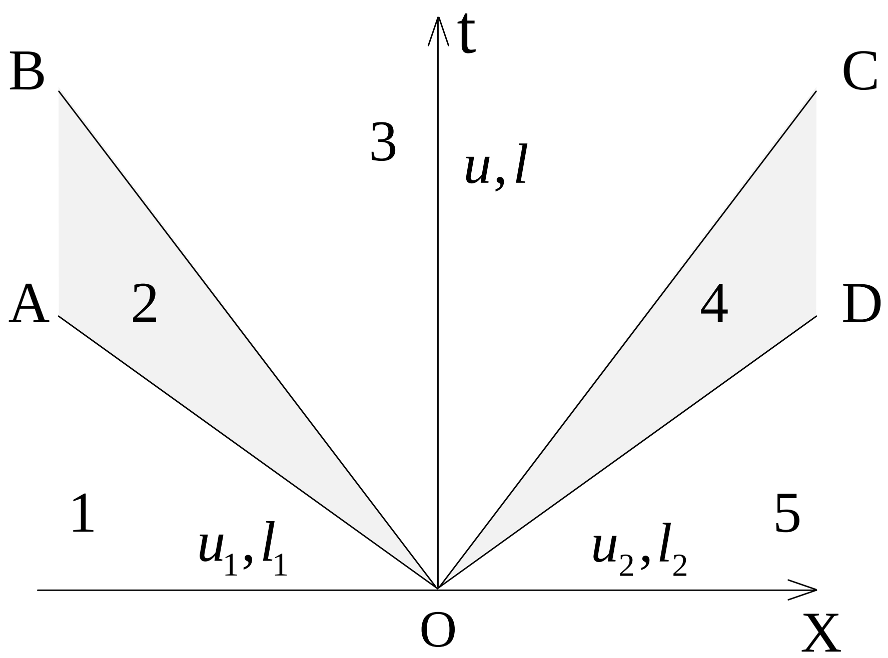
$$u_1 - u_2 \geq \sqrt{\left(\varphi(l_1) - \varphi(l_2)\right)\left(\frac{1}{l_2} - \frac{1}{l_1}\right)}$$

5. Автомодельное решение. волна разрежения – ударная волна



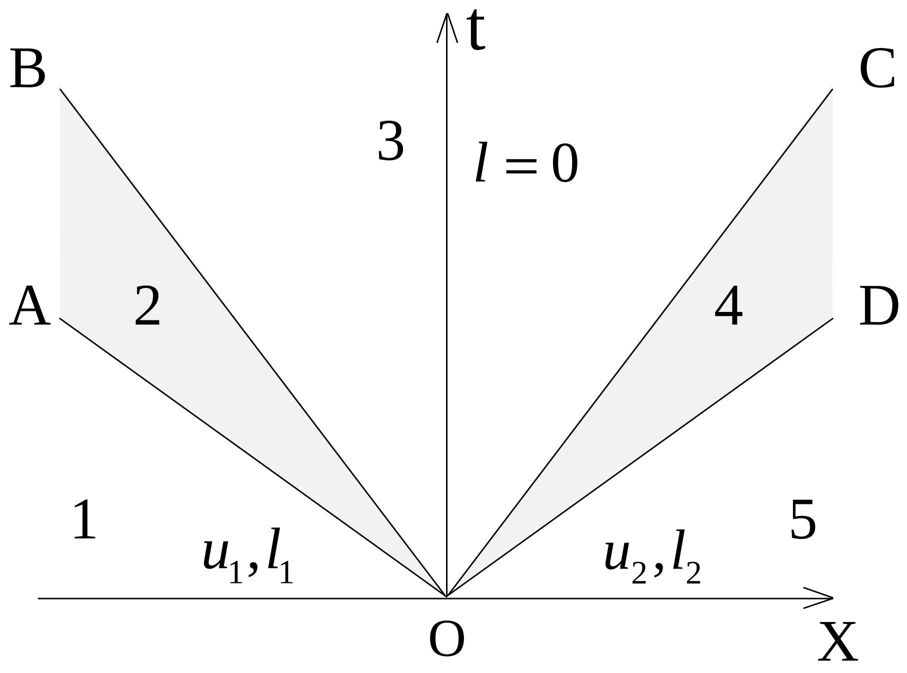
$$-\left(\psi\left(l_1\right)-\psi\left(l_2\right)\right)\leq u_1-u_2\leq\sqrt{\left(\varphi\left(l_1\right)-\varphi\left(l_2\right)\right)\left(\frac{1}{l_2}-\frac{1}{l_1}\right)}$$

5. Автомодельное решение.
Две волны разрежения



$$-\left(\psi\left(l_1\right)+\psi\left(l_2\right)\right)<u_1-u_2\leq-\left(\psi\left(l_1\right)-\psi\left(l_2\right)\right)$$

5. Автомодельное решение. Две волны разрежения, зона вакуума



$$u_1 - u_2 \le -\left(\psi\left(l_1\right) + \psi\left(l_2\right)\right)$$

6. Анализ результатов. Сравнение с классической мелкой водой.

$$B = \frac{h_0}{H_s}$$

$$l = h + \frac{(A-1)}{2A} h^2 B + \frac{(A-1)(A-2)}{6A^2} h^3 B^2 + o\left(B^2\right), B \to 0$$

$$a^2 = h - \frac{(A-1)}{2A} h^2 B + \frac{\left(A^2 - 1\right)}{6A^2} h^3 B^2 + o\left(B^2\right), B \to 0$$

$$\varphi(h) = \frac{1}{2} h^2 + \frac{(A-1)}{6A} h^3 B + \frac{(A-1)(A-2)}{24A^2} h^4 B^2 + o\left(B^2\right), B \to 0$$

$$\psi(h) = 2 \cdot h^{\frac{1}{2}} + \frac{(A-1)}{6A} h^{\frac{3}{2}} B - \frac{(A-1)(19A-23)}{240A^2} h^{\frac{5}{2}} B^2 + o\left(B^2\right), B \to 0$$

6. Анализ результатов. Сравнение с классической мелкой водой.

- Уменьшилась область начальных условий, при которых реализуется конфигурация «две волны разрежения, зона вакуума».
- Начальные условия, при которых в случае классической мелкой воды реализуется конфигурация «две волны разрежения, зона вакуума» теперь реализуют конфигурацию «две волны разрежения».

$$\begin{cases} u_1 - u_2 \le -2\left(\sqrt{h_1} + \sqrt{h_2}\right) \\ -2\left(\sqrt{h_1} + \sqrt{h_2}\right) - \dfrac{(A-1)}{6A}\left(h_1^{\frac{3}{2}} + h_2^{\frac{3}{2}}\right)B + o(B) \le u_1 - u_2 \end{cases}$$

6. Анализ результатов. Сравнение с классической мелкой водой.

- Увеличилась область начальных условий, при которых реализуется конфигурация «волна разрежения, ударная волна».
- Начальные условия, при которых в случае классической мелкой воды реализуются конфигурация «две волны разрежения»

$$-2\left(\sqrt{h_1}-\sqrt{h_2}\right)-\frac{(A-1)}{6A}\left(h_1^{\frac{3}{2}}-h_2^{\frac{3}{2}}\right)B+o(B)\le u_1-u_2\le -2\left(\sqrt{h_1}-\sqrt{h_2}\right)$$

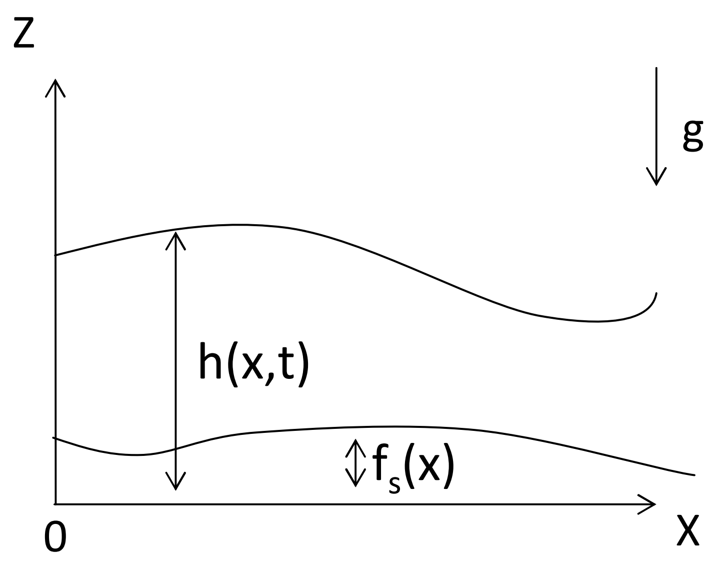
и конфигурация «две ударные волны»

$$(h_1-h_2)\sqrt{\frac{(h_1+h_2)}{2h_1h_2}}\le u_1-u_2\le (h_1-h_2)\sqrt{\frac{(h_1+h_2)}{2h_1h_2}}\left(1+\frac{(A-1)}{6A}\frac{\left(h_1^3-h_2^3\right)}{\left(h_1^2-h_2^2\right)}B\right)+o(B)$$

теперь «волна разрежения, ударная волна»

7. Произвольная поверхность.

$$\begin{cases} \dfrac{\partial L}{\partial t} + L\dfrac{\partial u}{\partial x} + u\dfrac{\partial L}{\partial x} = 0 \\ \dfrac{\partial u}{\partial t} + u\dfrac{\partial u}{\partial x} + \dfrac{a^2}{L}\dfrac{\partial L}{\partial x} = -\dfrac{\partial f_s}{\partial x} \end{cases}$$



$$\begin{cases} du + d\psi = -\dfrac{df_s}{dx}dt, \dfrac{dx}{dt} = u + a \\ du - d\psi = -\dfrac{df_s}{dx}dt, \dfrac{dx}{dt} = u + a \end{cases}$$

7. Простые волны Римана.

$$\begin{cases} dr = -\dfrac{df_s}{dx}dt, \dfrac{dx}{dt} = u + a \\ ds = -\dfrac{df_s}{dx}dt, \dfrac{dx}{dt} = u - a \end{cases}$$

$$\begin{cases} r = u + \psi \\ s = u - \psi \end{cases}$$

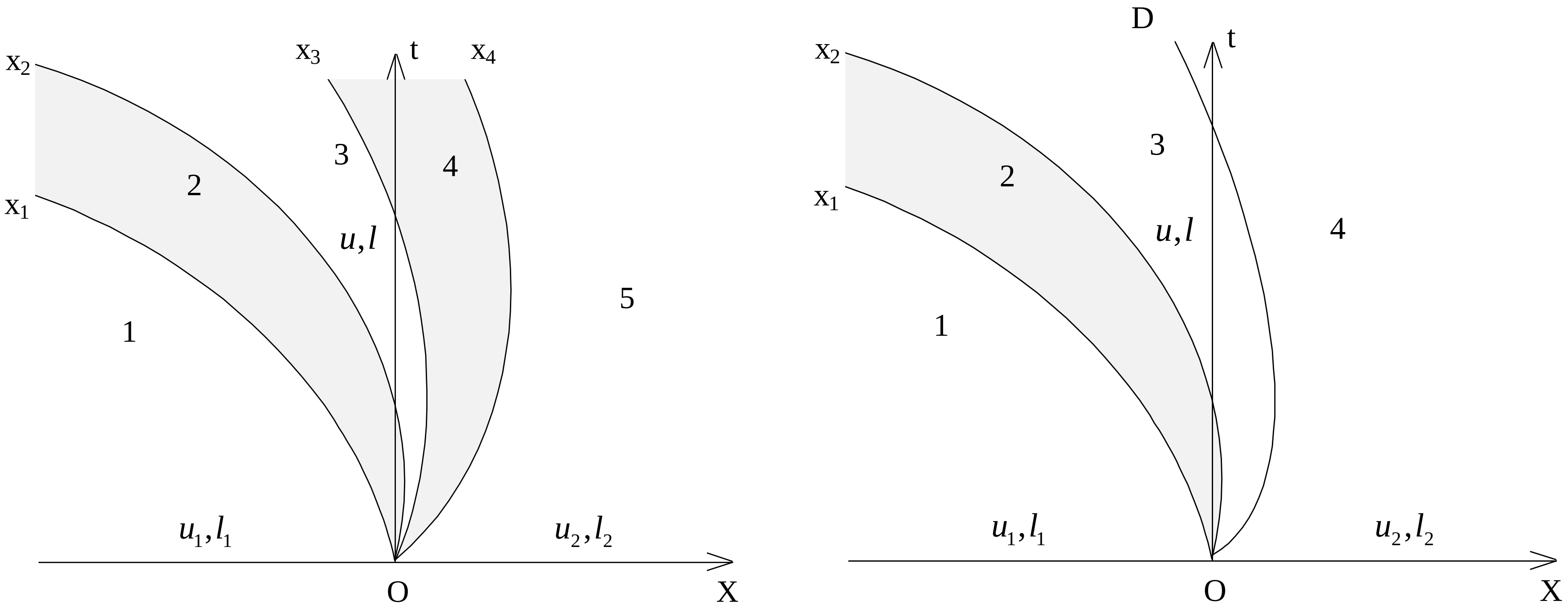
Простая волна – одно из уравнений выполняется тождественно во всей области

Откуда следует линейность $f_s(x) = kx + f_s(0)$

$$\begin{cases} r\left(x(t),t\right) = -kt + r\left(x(0),0\right) \\ s = -kt + s_0 \\ x(t) = -\dfrac{k}{2}\cdot t^2 + \dfrac{r\left(x(0),0\right) + s_0 + 2a}{2}\cdot t + x(0) \\ a = const \end{cases}$$

- Простая r-волна

8. Задача распада Разрыва



9. Заключение

- Учет сжимаемости в мелкой воде приводит к улучшению предсказаний скорости распространения газового потока с примесью твердых частиц.
- Альтернатива многослойным моделям.
- Решение задачи распада разрыва позволяет использовать численные методы типа Годунова, без выделения разрывов.

Спасибо за внимание!

Газ с твердыми частицами

- (Wallis, 1969) Течения газа с твердыми частицами можно моделировать идеальным псевдо-газом с приведенными значениями R, c_P, c_V

1. Монодисперсная смесь, равномерное распределение частиц.
2. Частицы не взаимодействуют. Давление смеси = давлению газа
3. Газ и частицы в термическом равновесии

Газ с твердыми частицами

ρ – плотность псевдо-газа

ρ_g - плотность газа, ρ_P - плотность частиц

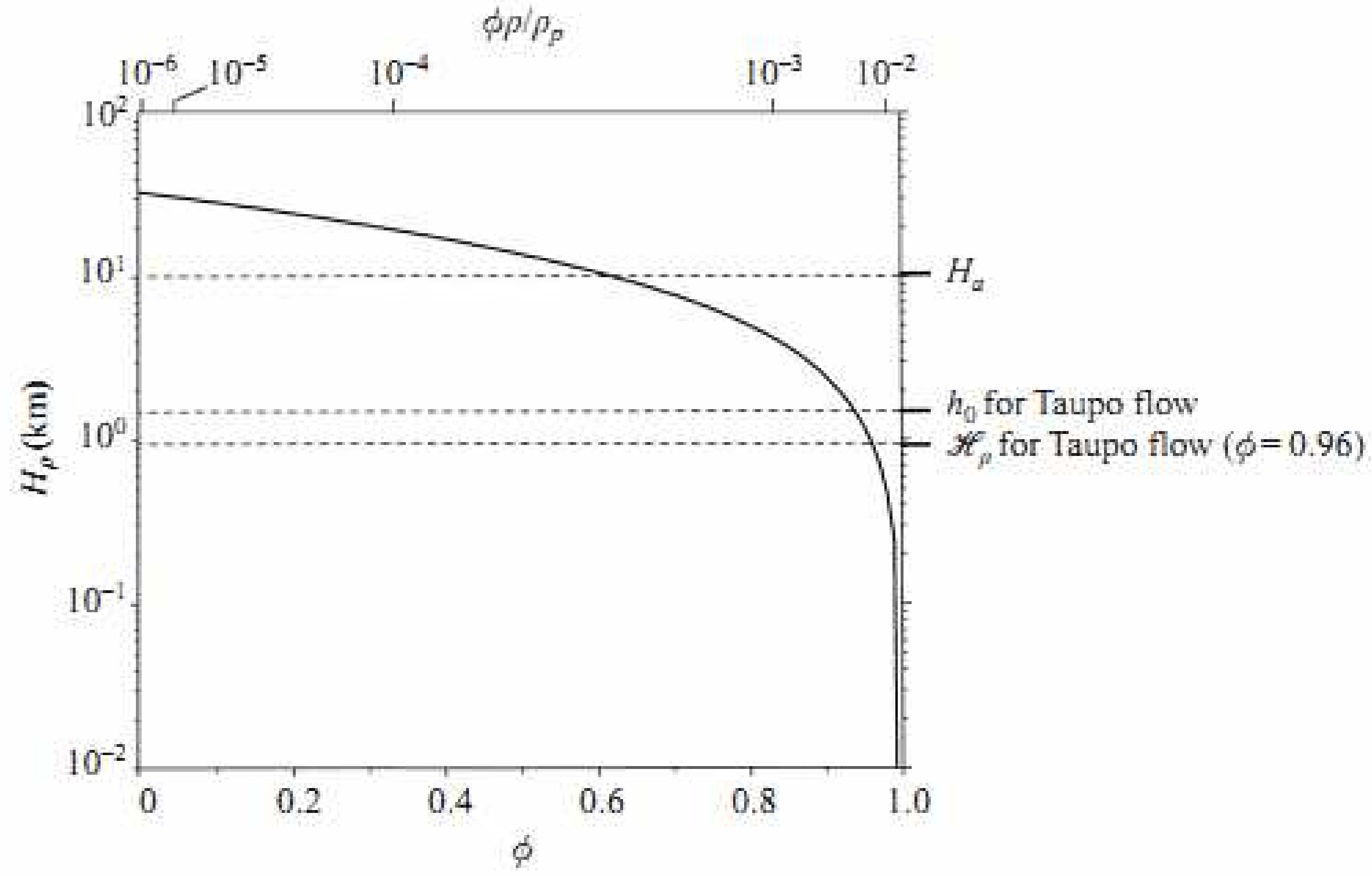
$$\frac{1}{\rho} = \frac{1-\phi}{\rho_g} + \frac{\phi}{\rho_P} \qquad \phi = \frac{m_P}{m}$$

$$\rho_P \geq \rho_g \qquad \frac{V_P}{V} = \frac{\rho}{\rho_P}\phi \ll 1$$

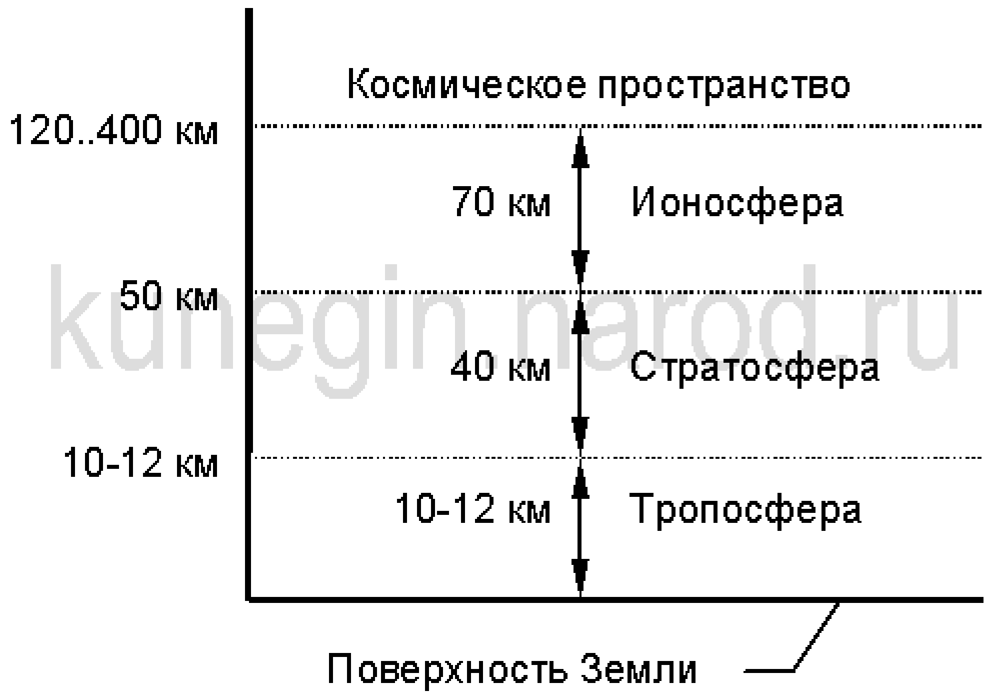
$$\rho_P = 2000 kg \cdot m^{-3}, \rho_g = 0.4 kg \cdot m^{-3} (500K), \phi = 0{,}96$$ (Woods, 1995)

Тогда $p = \rho_g RT = (1-\phi)\frac{\rho}{\left(1-\phi\frac{\rho}{\rho_P}\right)}RT = \rho R_m T$ $\qquad R_m = (1-\phi)R$

Газ с твердыми частицами



Атмосфера


Космическое пространство
120..400 км
70 км
Ионосфера
50 км
40 км
Стратосфера
10-12 км
10-12 км
Тропосфера
Поверхность Земли