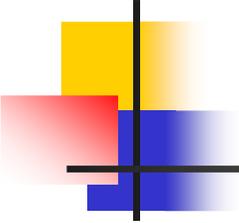




Нижегородский государственный университет
им. Н.И. Лобачевского
НАЦИОНАЛЬНЫЙ ИССЛЕДОВАТЕЛЬСКИЙ УНИВЕРСИТЕТ

**Электродинамические свойства квантовых
метаматериалов на основе волноводных
линий, содержащих джозефсоновские
переходы**

А. Швецов, А. М. Сатанин, А. Гельман,
А. Zagoskin, S. Savel'ev, F. Nori



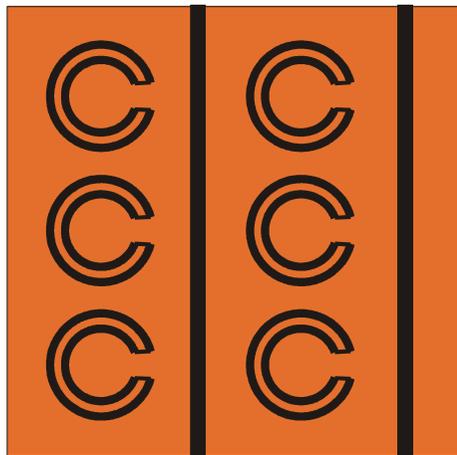
План доклада

- Модель волноводной структуры
- Квантовый фотонный кристалл
- Эффекты бистабильности в квантовом метаматериале

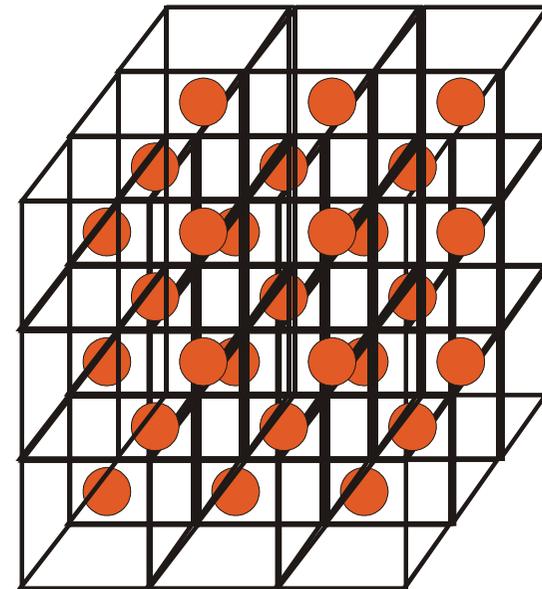
Мотивация

Создание материалов
с новыми
электродинамическими
свойствами

Возможность управления
свойствами материалов
путем изменения квантовых состояний
элементов, входящих в материал



$$\epsilon_{eff}(|E|^2) = \epsilon_D(|E|^2) - \frac{\omega_p^2}{\omega(\omega - i\gamma)}$$
$$\mu_{eff}(H) = 1 + \frac{(\pi a^2 / d^2) \omega^2}{\omega_{0NL}^2(H) - \omega^2 + i\Gamma\omega}$$



A. Zharov et al., PRL, V.91, 037401

D.R. Smith and J.B. Pendry,
J. Opt. Soc. Am. B, Vol. 23, 391

rf superconducting quantum interference device metamaterials

N. Lazarides

Department of Physics, University of Crete, P.O. Box 2208, 71003 Heraklion, Greece

G. P. Tsironis

Facultat de Física, Departament d'Estructura i Constituents de la Matèria, Universitat de Barcelona, Av.

Diagonal 647, E-08028 Barcelona, Spain

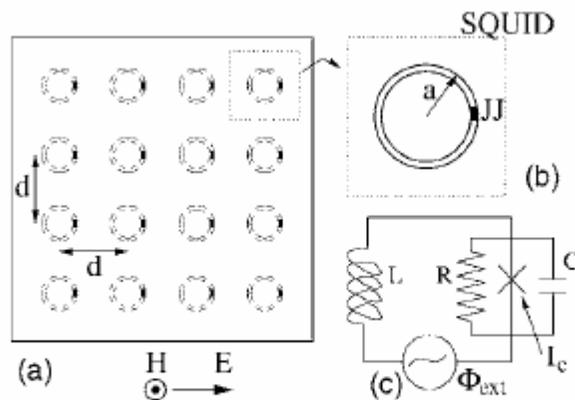


FIG. 1. Schematic drawing of the SQUID array, along with the equivalent circuit for a rf SQUID in external flux Φ_{ext} .

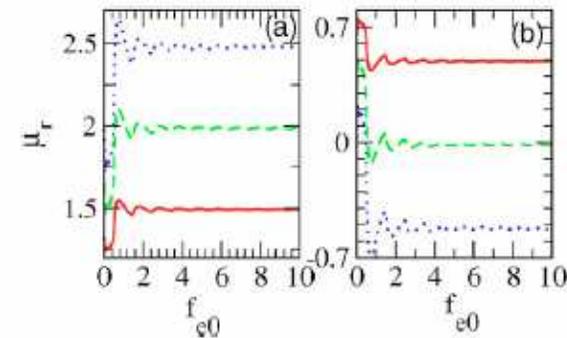
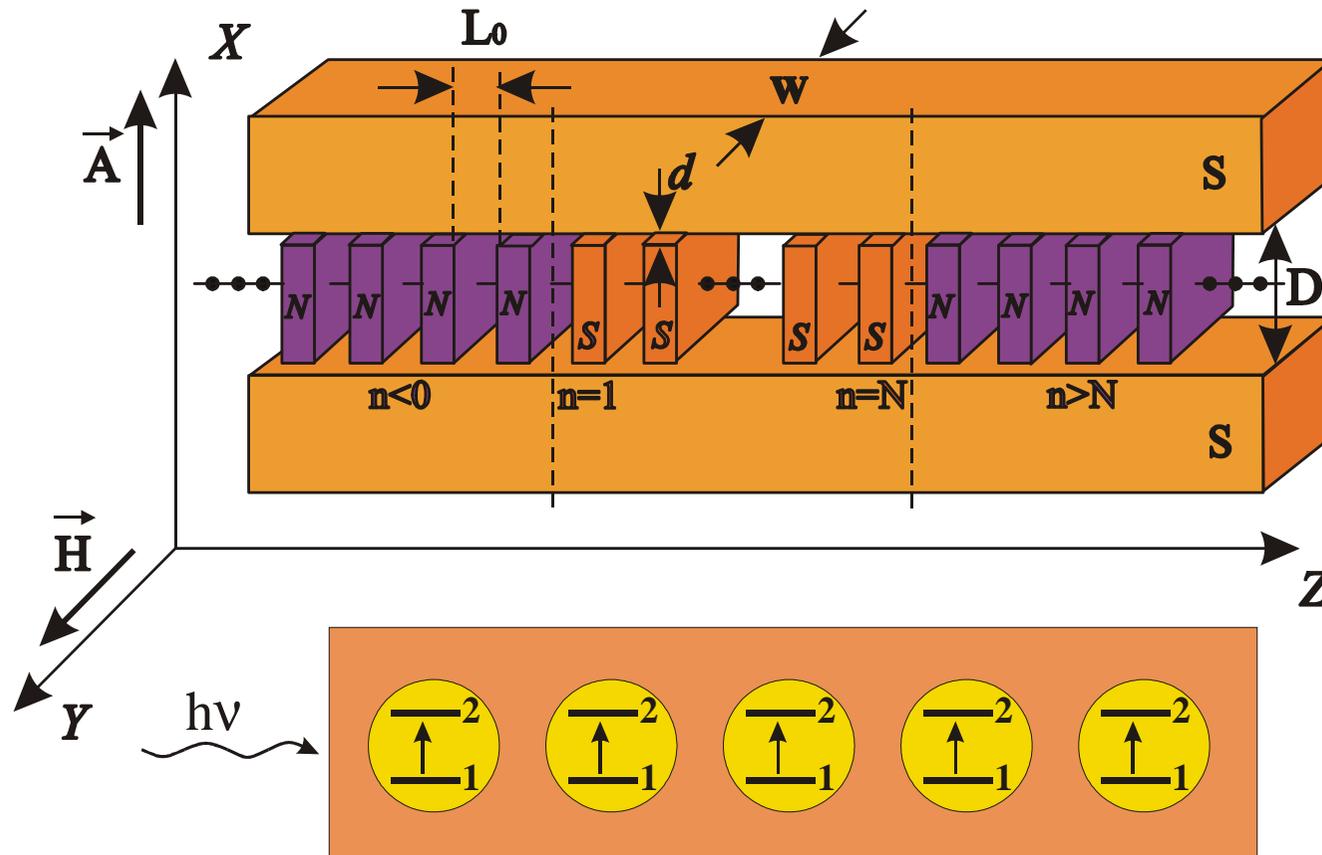


FIG. 4. (Color online) Relative permeability μ_r vs f_{e0} , for $\bar{F} = 0.01$ (red-solid curves), $\bar{F} = 0.02$ (green-dashed curves), $\bar{F} = 0.03$ (blue-dotted curves), and (a) $\Omega = 0.99$; (b) 1.01.

Волноводная линия, содержащая джозефсоновские переходы



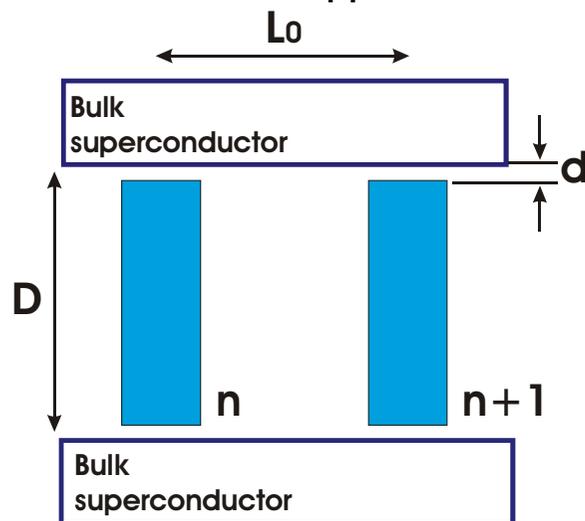
PRB 77, 144507 (2008) by A.L. Rakhmanov *et al.*

Энергия системы

Энергия поля в пассивной части волноводной линии

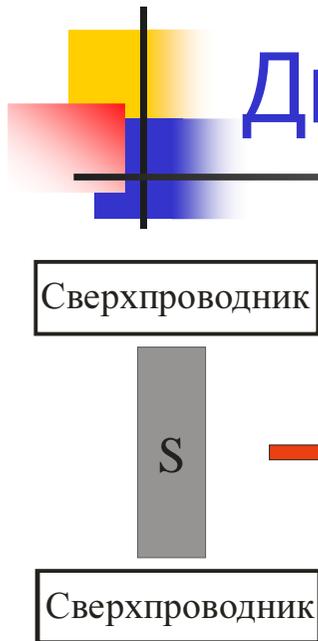
$$E_{NC} = \sum_{n \leq 0, n > N} \left[\frac{\tilde{C} D^2 \dot{A}_{xn}^2}{c^2} + \frac{DL_0 W \dot{A}_{xn}^2}{8\pi c^2} + \frac{DL_0 W}{8\pi} \left(\frac{A_{x,n+1} - A_{x,n}}{L_0} \right)^2 \right]$$

Энергия системы в активной (содержащей джозефсоновские переходы) части волноводной линии

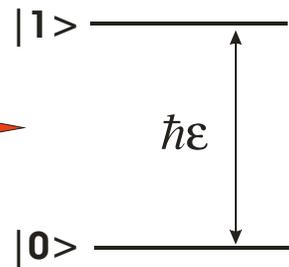


$$E_{SC} = \sum_{n=1}^{n=N} \left[\frac{E_J}{2\omega_J^2} \left(\left(\frac{2\pi D \dot{A}_{xn}}{\Phi_0} + \dot{\varphi}_n \right)^2 + \left(\frac{2\pi D \dot{A}_{xn}}{\Phi_0} - \dot{\varphi}_n \right)^2 \right) + \right. \\ \left. - E_J \left(\cos \left(\varphi_n + \frac{2\pi D A_{xn}}{\Phi_0} \right) + \cos \left(\varphi_n - \frac{2\pi D A_{xn}}{\Phi_0} \right) \right) + 2I_n \varphi_n \right. \\ \left. + \frac{DL_0 W \dot{A}_{xn}^2}{8\pi c^2} + \frac{DL_0 W}{8\pi} \left(\frac{A_{x,n+1} - A_{x,n}}{L_0} \right)^2 \right].$$

Двухуровневое приближение



Низколежащие возбуждения джозефсоновских переходов



Гамильтониан кубита с номером n:

$$\hat{H}_n = -\frac{(\hbar\omega_J)^2}{E_J} \left(\frac{\partial}{\partial \varphi_n} \right)^2 - 2(E_J \cos \varphi_n - I_n \varphi_n)$$

$$\hat{V}_n = 2E_J(1 - \cos a_n) \cos \varphi_n$$

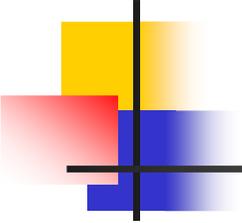
$$a_n = 2\pi D A_{xn} / \Phi_0$$

Волновая функция:

$$|\psi_n(t)\rangle = c_0(n, t) |0\rangle \exp(i\epsilon t/2) + c_1(n, t) |1\rangle \exp(-i\epsilon t/2)$$

$$i\hbar \dot{c}_\alpha(n, t) = \sum_{\beta=0,1} \langle \alpha | V_n(t) | \beta \rangle c_\beta(n, t) e^{i(\omega_\alpha - \omega_\beta)t}$$

$$\omega_1 = \epsilon/2 \quad \omega_0 = -\epsilon/2$$



Уравнения для поля

Активная область:

$$\ddot{a}_n - v^2(a_{n+1} + a_{n-1} - 2a_n) + r \cdot \sin a_n < \psi_n | \cos \varphi_n | \psi_n > = 0$$

$$v^2 = \frac{DW\Phi_0^2}{32\pi^3 L_0 D^2 \left(\frac{E_J}{\omega_J^2} + \frac{\Phi_0^2 L_0 W}{32\pi^3 c^2 D} \right)}, \quad r = \frac{E_J}{\left(\frac{E_J}{\omega_J^2} + \frac{\Phi_0^2 L_0 W}{32\pi^3 c^2 D} \right)}$$

Пассивная область:

$$\ddot{a}_n - v^2(a_{n+1} + a_{n-1} - 2a_n) = 0$$

Уравнение для поля. Случай непрерывной среды.

Поле достаточно слабое:

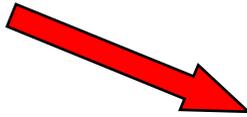
$$a_n \ll 1 \quad \sin a_n \approx a_n$$

Волновое уравнение:

$$\ddot{a}_n - v^2(a_{n+1} + a_{n-1} - 2a_n) + r \cdot \sin a_n \langle \psi_n | \cos \varphi_n | \psi_n \rangle = 0$$

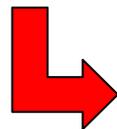
$$v^2 = \frac{rW\Phi_0^2}{32\pi^3 L_0 DE_J}$$

$$r = \omega_J^2 \left(1 + \frac{\Phi_0^2 L_0 W \omega_J^2}{32\pi^3 c^2 DE_J} \right)^{-1}$$


$$\frac{\partial^2 a}{\partial t^2} - \tilde{v}^2 \frac{\partial^2 a}{\partial z^2} + \chi(z, t) \cdot a = 0$$

$$\tilde{v} = vL_0$$

$$\chi(z, t) = r \langle \psi(z, t) | \cos \varphi | \psi(z, t) \rangle$$



Определяется квантовым состоянием кубитов в активной области

Квантовая динамика на решетке

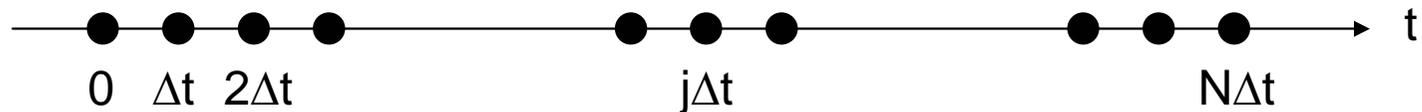
Эволюция вектора состояния описывается уравнением Шредингера:

$$i\hbar \frac{\partial}{\partial t} |\psi(t)\rangle = \hat{H} |\psi(t)\rangle$$

$$|\psi(t)\rangle = \hat{U}(t) |\psi(0)\rangle$$

Оператор эволюции:

$$\hat{U}(t) = \exp\left(-i \frac{\hat{H}t}{\hbar}\right)$$



$$|\psi(t + \Delta t)\rangle = \hat{U}(\Delta t) |\psi(t)\rangle$$

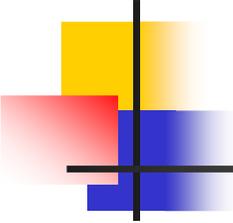


Схема Кэли

Оператор эволюции на интервале Δt :

$$\hat{U}(\Delta t) = \exp\left(-i \frac{\hat{H}\Delta t}{\hbar}\right)$$

Аппроксимация:

$$\hat{U}(\Delta t) = \frac{\hat{I} - i\hat{H}\Delta t / 2\hbar}{\hat{I} + i\hat{H}\Delta t / 2\hbar} \quad \hat{U}^\dagger \hat{U} = \hat{I} !$$

где \hat{I} – единичный оператор

$$\left(\hat{I} + \frac{i\hat{H}\Delta t}{2\hbar}\right) |\psi(t + \Delta t)\rangle = \left(\hat{I} - \frac{i\hat{H}\Delta t}{2\hbar}\right) |\psi(t)\rangle$$

$$|\psi(t + \Delta t)\rangle = \left(\hat{I} + \frac{i\hat{H}\Delta t}{2\hbar}\right)^{-1} \cdot \left(\hat{I} - \frac{i\hat{H}\Delta t}{2\hbar}\right) \cdot |\psi(t)\rangle$$

Метод канонических преобразований

$$\ddot{a}_n - v^2(a_{n+1} + a_{n-1} - 2a_n) = -\chi \sin(a_n)$$

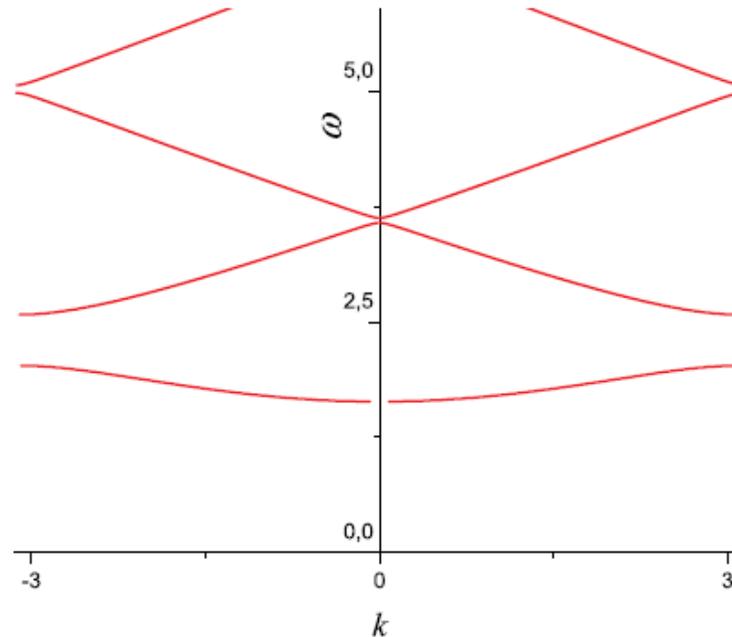
$$\dot{a}_n = p_n$$

$$\dot{p}_n = v^2(a_{n+1} + a_{n-1} - 2a_n) - \chi \sin(a_n)$$

$$a_n(t + \Delta t) = p_n(t) \cdot \Delta t + a_n(t)$$

$$p_n(t + \Delta t) = p_n(t) + v^2(a_{n+1}(t + \Delta t) + a_{n-1}(t + \Delta t) - 2a_n(t + \Delta t)) - \chi \sin(a_n(t + \Delta t))$$

Спектр фотонного кристалла



Спектр фотонного кристалла, полученного для волноводной линии, содержащей джозефсоновские переходы. Предполагается, что состояния двойных джозефсоновских переходов модулированы с пространственным периодом $2L$. Так, переходы с координатами $0 < z < L$ находятся в состоянии γ , а с координатами $L < z < 2L$ – в состоянии δ . Здесь $V_{\gamma\gamma}$ и $V_{\delta\delta}$ – матричные элементы оператора взаимодействия с электромагнитным полем. Аналитическое выражение для спектра такой структуры имеет вид:

$$\cos(\kappa_{\gamma}L)\cos(\kappa_{\delta}L) - \frac{\kappa_{\gamma}^2 + \kappa_{\delta}^2}{2\kappa_{\gamma}\kappa_{\delta}}\sin(\kappa_{\gamma}L)\sin(\kappa_{\delta}L) = \cos(2kL) \quad \kappa_{\gamma}^2 = \frac{\omega^2 - V_{\gamma\gamma}}{\beta^2}, \quad \kappa_{\delta}^2 = \frac{\omega^2 - V_{\delta\delta}}{\beta^2}.$$

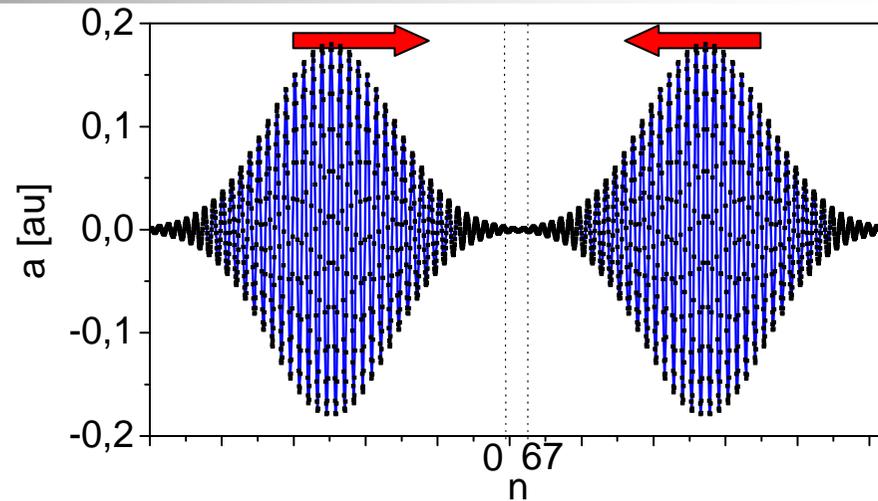
Создание периодической населенности кубитов

Встречные импульсы:

Частота $\omega \approx \omega_J/2$,

скорость $\tilde{v} = c$,

ширина импульсов $l = 240L_0$.



Резонансное приближение: $2\omega \approx \varepsilon \quad \frac{2\pi\tilde{v}}{l} \ll \omega$

$$i\hbar\dot{c}_0(z, t) = a^2(z, t) \left(d_{00}c_0 + d_{01}c_1 e^{-i\varepsilon t} \right)$$

$$i\hbar\dot{c}_1(z, t) = a^2(z, t) \left(d_{10}c_0 e^{i\varepsilon t} + d_{11}c_1 \right)$$

$$d_{\alpha\beta} = E_J \langle \alpha | \cos \varphi_n | \beta \rangle$$

Населенность кубитов после прохождения импульсов

Поле, действующее на n-ый кубит:

$$a^{(1)}(z, t) = \exp\left(-\frac{(z - (\omega/k)t)^2}{l^2}\right) \left(Ae^{i(kz - \omega t)} + c.c.\right)$$

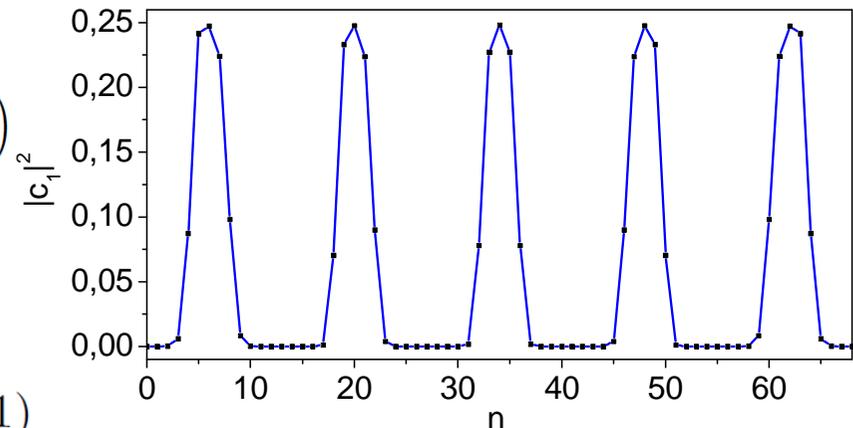
$$a^{(2)}(z, t) = \exp\left(-\frac{(z + (\omega/k)t)^2}{l^2}\right) \left(Ae^{i(kz + \omega t + \phi_0)} + c.c.\right)$$

Вероятность возбуждения n-го кубита:

$$|c_1(z, t)| = \frac{|\Omega(z)|}{\sqrt{|\Omega(z)|^2 + \gamma(z)^2/4}} \sin\left(\sqrt{|\Omega(z)|^2 + \gamma(z)^2/4} t\right)$$

$$\gamma(z) = \Delta + 4A^2 \frac{d_{00} - d_{11}}{\hbar} (\cos(2kz + \phi_0) + 1)$$

$$|\Omega(z)| = \frac{2|d_{01}|A^2}{\hbar} (\cos(2kz + \phi_0) + 1)$$



$$\Delta = 2\omega - \varepsilon$$

Периодическая функция с периодом π/k

Возможность контролировать период записи путем изменения длины волны импульсов

Закон дисперсии квантового фотонного кристалла

Линеаризованное уравнение: $\frac{\partial^2 a}{\partial t^2} - \tilde{v}^2 \frac{\partial^2 a}{\partial z^2} + \chi(z, t) \cdot a = 0$

$$\chi(z, t) = \chi_0 + \tilde{\chi} (1 + \cos(2\pi z/L_m)) + 2 \frac{r}{E_J} \text{Re}[d_{01} c_0^*(z) c_1(z) e^{-i\epsilon t}]$$

$$\chi_0 = \frac{r}{E_J} (d_{00} |c_{0, \min}|^2 + d_{11} |c_{1, \min}|^2) \quad \tilde{\chi} = r (d_{11} - d_{00}) (|c_{1, \max}|^2 - |c_{1, \min}|^2) / 2E_J$$

Поиск решения в виде:

$$a_k(z, t) = u_k(z) \exp(i(kz - \omega t)) \quad u_k(z) = u_k(z + L_m)$$



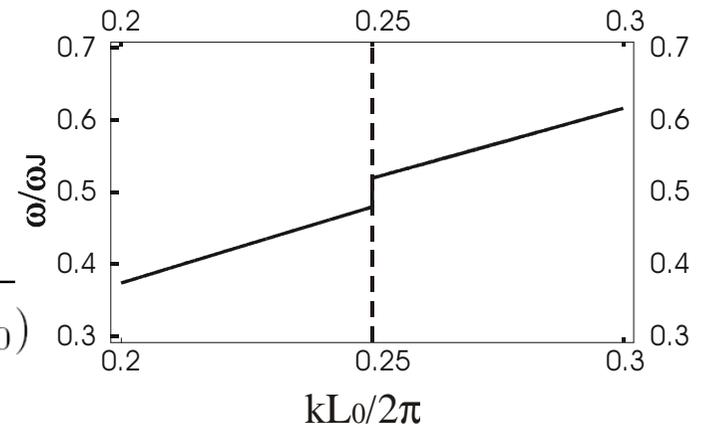
$$\omega_k^2 - \tilde{v}^2 k^2 = \pm |W_k| + W_{k=0}$$

$$W_k = \frac{1}{L_m} \int_{-L_m/2}^{+L_m/2} \chi(z) \exp(i2kz) dz, \quad k = \frac{\pi n}{L_m}$$

$$W_{k_{n=1}} = \tilde{\chi}/2 \quad W_0 = \chi_0 + \tilde{\chi} \quad \omega_1 = \sqrt{(\tilde{v}k_1)^2 + W_0}$$

Ширина щели:

$$\delta\omega_1 \approx \tilde{\chi} / \sqrt{(\pi\tilde{v}/L_m)^2 + W_0}$$



Распространение электромагнитных импульсов через волноводную линию с периодической модуляцией населенности кубитов

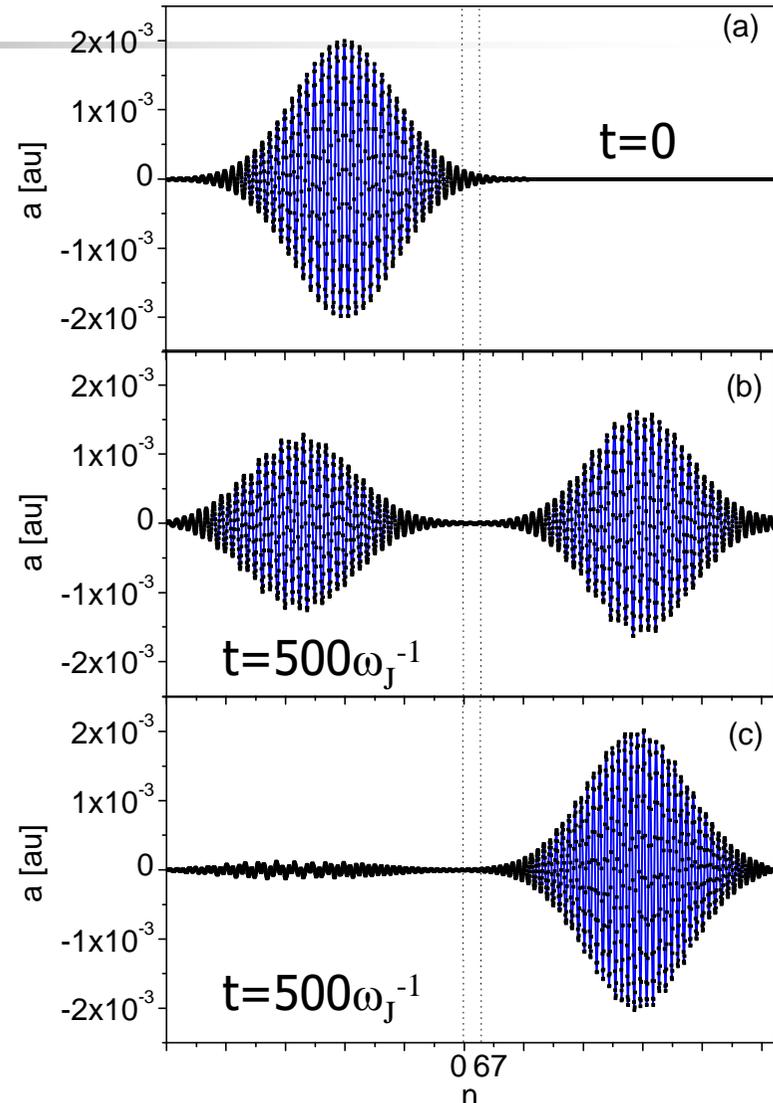
Пробный (слабый) импульс.

Частота $\omega = \omega_J/2$
(соответствует середине щели),
скорость $\tilde{v} = c$,
ширина импульса $l = 240L_0$.

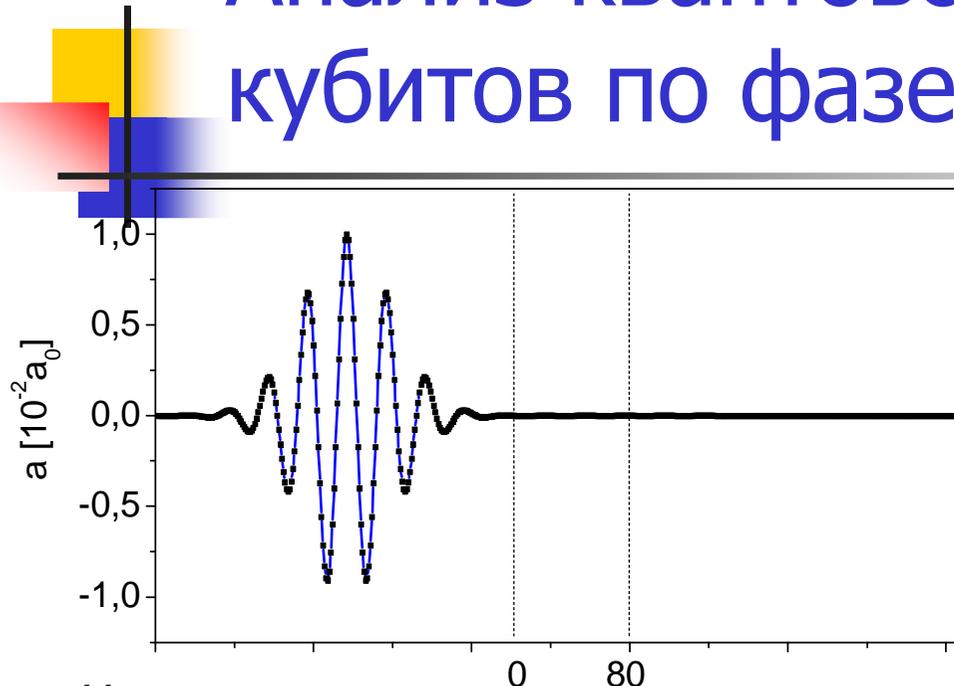
Частичное прохождение
импульса –

ширина щели $\delta\omega_1 = 0.04\omega_J$
сравнима с неопределенностью
частоты импульса $\Delta\omega = 2\pi\tilde{v}/l = 0.05\omega_J$

Частота начального импульса
лежала выше щели $\omega = 0.6\omega_J$,
скорость $\tilde{v} = c$,
ширина импульса $l = 240L_0$.



Анализ квантового состояния кубитов по фазе слабого сигнала



Частота $\omega=0.5\omega_J$,
 скорость $\tilde{v}=c$,
 ширина импульсов $l=40L_0$.

Волновое уравнение:

$$\frac{\partial^2 a}{\partial t^2} - \tilde{v}^2 \frac{\partial^2 a}{\partial z^2} = \chi(z, t) \cdot a$$

Функция χ достаточно мала:

$$\chi \ll \omega^2$$



$$\frac{\partial A}{\partial t} \ll \omega A, \quad \frac{\partial A}{\partial z} \ll k A$$

Решение ищется в виде:

$$a(t, z) = A(z, t) \exp(i(kz - \omega t))$$

Волновое уравнение приводится к виду:

$$\tilde{v} \frac{\partial A}{\partial z} + \frac{\partial A}{\partial t} = \frac{i}{2\omega} \chi(z) A$$

Решение волнового уравнения для случая малого χ

Общее решение волнового уравнения:

$$\Phi \left(z - \tilde{v}t, \int \chi(z) dz + i2\tilde{v}\omega \ln(A) \right) = 0$$

Решение волнового уравнения для случая гауссовой огибающей импульса:

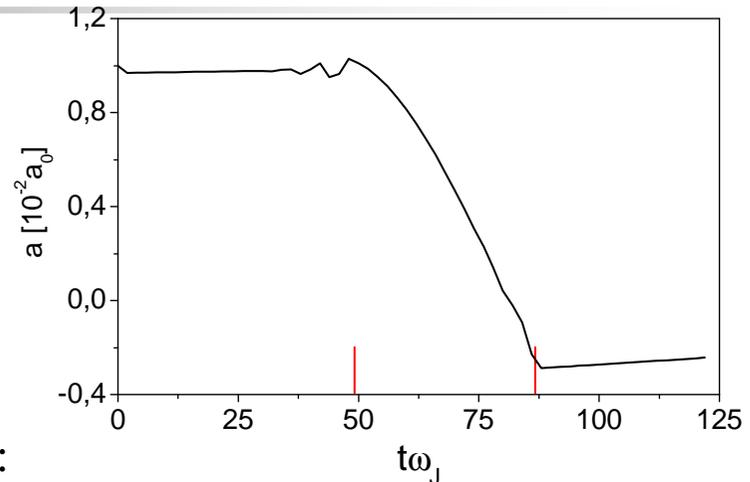
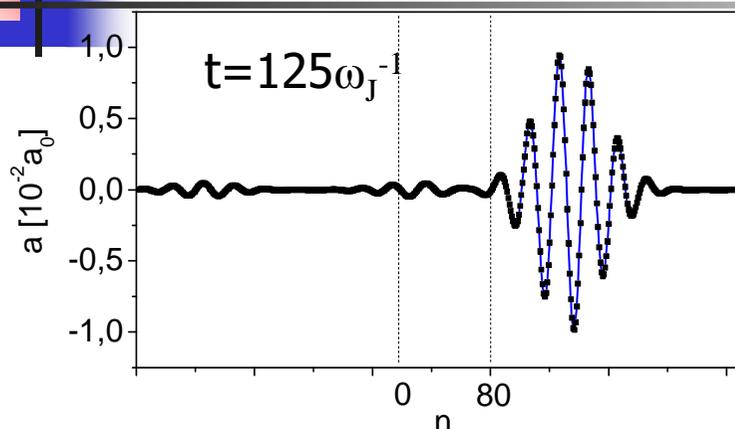
$$A(z, 0) = A_0 \exp \left(-\frac{z^2}{l^2} \right)$$
$$A(z, t) = A_0 \exp \left(-\frac{(z - \tilde{v}t)^2}{l^2} \right) \cdot \exp \left(-\frac{i}{2\tilde{v}\omega} \left(\int \chi(z - \tilde{v}t) d(z - \tilde{v}t) - \int \chi(z) dz \right) \right)$$

Случай $\chi(z) = const$:

$$a(z, t) = A_0 \exp \left(-\frac{(z - \tilde{v}t)^2}{l^2} \right) \cdot \exp (ik(z - \tilde{v}t)) \cdot \exp \left(\frac{i\chi t}{2\omega} \right)$$

В движущейся точке $z - \tilde{v}t = 0$ сдвиг фазы определяется величиной $\chi/2\omega$

Изменение фазы сигнала. Численное моделирование



Закон дисперсии для волн в активной области:

$$-\omega^2 + \tilde{v}^2 k^2 = \chi$$

Групповая скорость распространения импульса в активной области:

$$V_{gr} = \frac{\tilde{v}^2 k}{\sqrt{\tilde{v}^2 k^2 - \chi}} < \tilde{v}, \quad (\chi < 0)$$

Изменение фазы согласно теоретическим оценкам:

$$\phi = \frac{\chi}{2\omega} t_\chi \quad \phi = -1.6$$

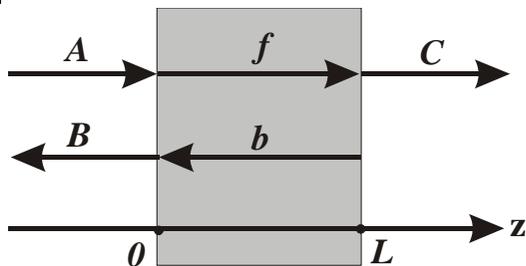
Длина активной области $l_\chi = 80L_0$,
 $\chi_{00} = -0.04\omega_J^2$

Время прохождения импульса
через активную область:

$$t_\chi = l_\chi / \tilde{v}$$

➔ В движущейся точке $z - \tilde{v}t = 0$ поле должно быть близко к нулю.

Коэффициент прохождения через волноводную линию



Решение ищется в виде:

$$a(z, t) = A \exp(i(kz - \omega t)) + B \exp(-i(kz + \omega t)) + c.c., \quad z < 0,$$

$$a(z, t) = C \exp(i(kz - \omega t)) + c.c., \quad z > L,$$

$$a(z, t) = f \exp(i(qz - \omega t)) + b \exp(-i(qz + \omega t)) + c.c., \quad 0 < z < L,$$

$$q = \sqrt{k^2 - \chi_0/\tilde{v}^2}$$

$$\frac{\partial^2 a}{\partial t^2} - \tilde{v}^2 \frac{\partial^2 a}{\partial z^2} = -\chi_0 \sin a$$

Волновое уравнение
(учет кубического члена в правой части):

$$\frac{\partial^2 a}{\partial t^2} - \tilde{v}^2 \frac{\partial^2 a}{\partial z^2} = -\chi_0 \left(1 - \frac{1}{6}a^2\right) a$$

Волновое уравнение с учетом кубической нелинейности

$$\frac{\partial f}{\partial z} = \frac{i\chi_0}{4q\tilde{v}^2} (|f|^2 + 2|b|^2) f,$$

$$\frac{\partial b}{\partial z} = \frac{-i\chi_0}{4q\tilde{v}^2} (|b|^2 + 2|f|^2) b.$$

Система уравнений имеет решение:

$$f(z) = \eta \exp\left(\frac{i\chi_0}{4q\tilde{v}^2} (|\eta|^2 + 2|\xi|^2) z\right) \quad \text{где } \xi \text{ и } \eta \text{ - постоянные}$$

$$b(z) = \xi \exp\left(\frac{-i\chi_0}{4q\tilde{v}^2} (|\xi|^2 + 2|\eta|^2) z\right)$$

Коэффициент прохождения через волноводную линию $T = |C|^2 / |A|^2$

$$T = \frac{t^4 \frac{q^2}{k^2}}{\left| 1 - r^2 \exp\left(i \left(2qL + 3 \frac{\chi_0}{4q\tilde{v}^2} \frac{1+r^2}{t^2} \frac{k^2}{q^2} T |A|^2 L\right)\right)\right|^2} \quad t = \frac{2k}{k+q}, \quad r = \frac{k-q}{k+q}$$

$T=1$ при выполнении условия:

$$2qL + 3 \frac{\chi_0}{4q\tilde{v}^2} \frac{1+r^2}{t^2 q^2 / k^2} T |A|^2 L = 2\pi n, \quad n \in Z$$

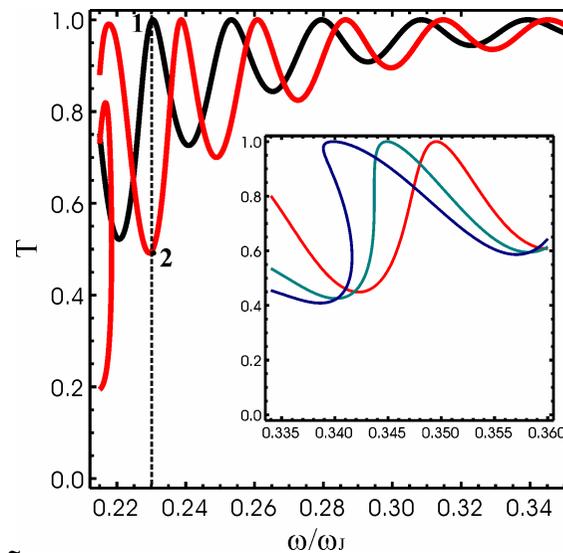
Бистабильность

Небольшие изменения в χ (в квантовом состоянии кубитов) ведет к сильному изменению коэффициента прохождения.

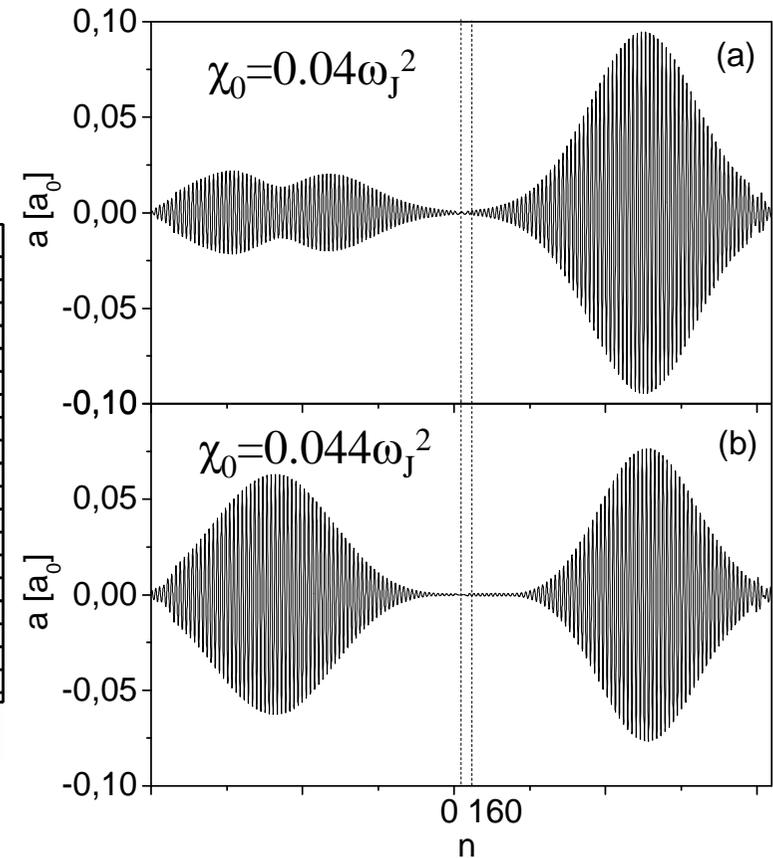
— (a) $\chi_0 = 0.04\omega_J^2$

— (b) $\chi_0 = 0.044\omega_J^2$

Вкладка: коэффициент прохождения T
Красный $A=0.1$
Голубой $A=0.14$
Синий $A=0.16$
 (для всех $\chi_0 = 0.1\omega_J^2$)

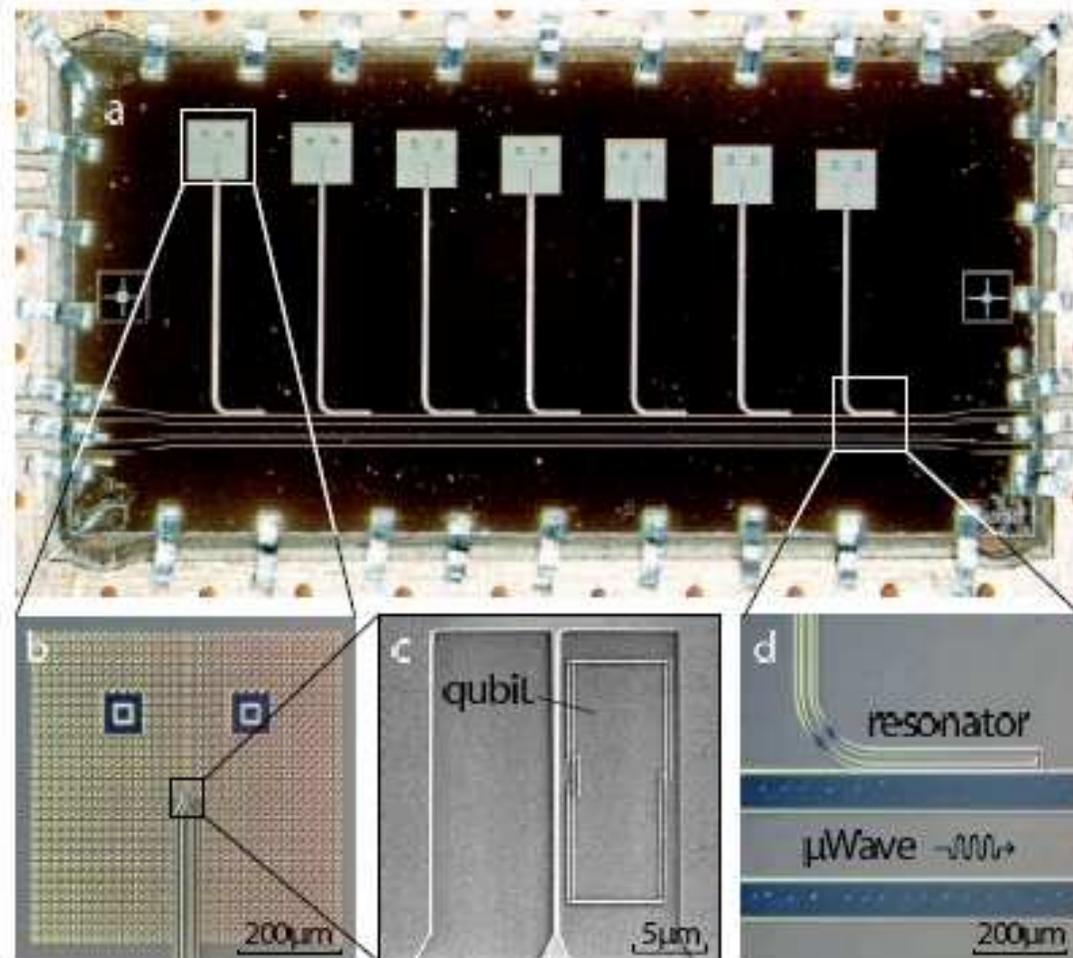


Частота $\omega = 0.23\omega_J$, скорость $\tilde{v} = c$, ширина импульсов $l = 960L_0$, амплитуда начального импульса $A = 0.1$, длина активной области $L = 160L_0$.



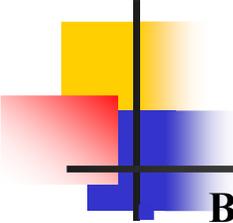
Возможность определять небольшие изменения квантовых состояний последовательности кубитов по отклику среды

Spectroscopy of a Qubit Array via a Single Transmission Line



M.Jerger, *et al.*,
arXiv:1102.0404v1(2011)

$$\frac{\Delta E_{\pm}}{\hbar} = \left(n + \frac{1}{2}\right) \omega_r + \frac{\omega_q}{2} \pm \sqrt{\left(\frac{\delta}{2}\right)^2 + \tilde{g}^2(n+1)}$$



Выводы

В работе рассмотрено распространение электромагнитных импульсов в волноводной линии, содержащей джозефсоновские переходы, которые формируют двухуровневые системы (кубиты). Показана возможность создания пространственной периодической модуляции населенности кубитов при помощи электромагнитных импульсов, распространяющихся навстречу друг другу вдоль волноводной линии. При этом период модуляции определяется длиной волны импульсов как $\lambda/2$. Полученная в результате структура проявляет свойства фотонных кристаллов, в ней могут наблюдаться энергетические щели в спектре частот, причем параметры такого кристалла определяются квантовым состоянием кубитов и могут варьироваться путем изменения параметров среды.

- **Наличие периодической модуляции населенности кубитов можно обнаружить по сильно нелинейному отклику, проявляющемуся в существовании областей частот, в которых среда становится непрозрачной для слабых электромагнитных импульсов.**
- **Показано, что квантовое состояние последовательности кубитов можно анализировать при помощи слабых электромагнитных импульсов.**
- **Малые изменения квантового состояния кубитов вызывает сильное изменение коэффициента прохождения волны, что дает возможность изучать состояния кубитов по отклику активной среды.**