

НЕЛИНЕЙНАЯ ДИНАМИКА МАГНИТОГИДРОДИНАМИЧЕСКИХ ТЕЧЕНИЙ ТЯЖЁЛОЙ ЖИДКОСТИ В ПРИБЛИЖЕНИИ МЕЛКОЙ ВОДЫ.

Петросян А.С., Карельский К.В., Тарасевич С.В.

Институт Космических Исследований РАН

Таруса, 21 октября 2011

СОДЕРЖАНИЕ

- Применение приближения мелкой воды для магнитной гидродинамики
- Уравнения МГД мелкой воды на ровной границе
- Непрерывные частные решения
- Разрывные частные решения
- Постановка задачи распада разрыва
- Возможные волновые конфигурации
- Условия реализации конфигураций
- Уравнения МГД мелкой воды на неровной границе
- Инварианты Римана
- Решения типа волн Римана
- Разрывные частные решения
- Замена переменных
- Решение задачи распада разрыва
- Результаты и выводы



ПОЛУЧЕНИЕ УРАВНЕНИЙ МЕЛКОЙ ВОДЫ

Вертикальные ускорения в слое жидкости много меньше силы тяжести

- Нейтронные звёзды
- Солнечный тахоклин
- Производство алюминия



ПОЛУЧЕНИЕ УРАВНЕНИЙ МЕЛКОЙ ВОДЫ

- Система уравнений МГД в поле силы тяжести
- Ось z антиколлинеарна вектору силы тяжести
- Гидростатичность распределения давлений
- Малость отклонения горизонтальных составляющих скорости и магнитного поля от средних по глубине значений

Интегрирование уравнений
по глубине



ПОЛУЧЕНИЕ УРАВНЕНИЙ МЕЛКОЙ ВОДЫ

$$\partial_t \begin{pmatrix} \rho u_1 \\ \rho u_2 \\ \rho u_3 \\ B_1 \\ B_2 \\ B_3 \end{pmatrix} + \partial_x \begin{pmatrix} \rho u_1^2 - B_1^2 + gh \\ \rho u_1 u_2 - B_1 B_2 \\ \rho u_1 u_3 - B_1 B_3 \\ 0 \\ u_1 B_2 - u_2 B_1 \\ u_1 B_3 - u_3 B_1 \end{pmatrix} + \partial_y \begin{pmatrix} \rho u_1 u_2 - B_1 B_2 \\ \rho u_2^2 - B_2^2 + gh \\ \rho u_2 u_3 - B_2 B_3 \\ u_2 B_1 - u_1 B_2 \\ 0 \\ u_2 B_3 - u_3 B_2 \end{pmatrix} + \partial_z \begin{pmatrix} \rho u_1 u_3 - B_1 B_3 \\ \rho u_2 u_3 - B_2 B_3 \\ \rho u_3^2 - B_3^2 + gh \\ u_3 B_1 - u_1 B_3 \\ u_3 B_2 - u_2 B_3 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ -\rho g \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

$$\frac{\partial u_1}{\partial x} + \frac{\partial u_2}{\partial y} + \frac{\partial u_3}{\partial z} = 0 \quad \frac{\partial B_1}{\partial x} + \frac{\partial B_2}{\partial y} + \frac{\partial B_3}{\partial z} = 0$$

Граничные условия

$$u_3|_{z=0} = 0$$

$$u_3|_{z=h} = \frac{Dh}{Dt} = \frac{\partial h}{\partial t} + u_1|_{z=h} \frac{\partial h}{\partial x} + u_2|_{z=h} \frac{\partial h}{\partial y}$$

$$B_3|_{z=0} = 0$$

$$B_3|_{z=h} = B_1|_{z=h} \frac{\partial h}{\partial x} + B_2|_{z=h} \frac{\partial h}{\partial y}$$



ПОЛУЧЕНИЕ УРАВНЕНИЙ МЕЛКОЙ ВОДЫ

$$\frac{\partial}{\partial x_0} \int_0^h u_1 dz + \frac{\partial}{\partial y_0} \int_0^h u_2 dz + \frac{\partial h}{\partial t} = 0$$

$$\rho \frac{\partial}{\partial t} \int_0^h u_1 dz + \rho \frac{\partial}{\partial x_0} \int_0^h u_1^2 dz - \rho \frac{\partial}{\partial x_0} \int_0^h B_1^2 dz + \rho g \frac{\partial (h^2 / 2)}{\partial x} + \rho \frac{\partial}{\partial y_0} \int_0^h u_1 u_2 dz - \rho \frac{\partial}{\partial y_0} \int_0^h B_1 B_2 dz = 0.$$

$$\rho \frac{\partial}{\partial t} \int_0^h u_2 dz + \rho \frac{\partial}{\partial x_0} \int_0^h u_1 u_2 dz - \rho \frac{\partial}{\partial x_0} \int_0^h B_1 B_2 dz + \rho g \frac{\partial (h^2 / 2)}{\partial y} + \rho \frac{\partial}{\partial y_0} \int_0^h u_2^2 dz - \rho \frac{\partial}{\partial y_0} \int_0^h B_2^2 dz = 0.$$

$$\frac{\partial}{\partial t} \int_0^h B_1 dz + \frac{\partial}{\partial y_0} \int_0^h B_1 u_2 dz - \frac{\partial}{\partial y_0} \int_0^h B_2 u_1 dz = 0$$

$$\frac{\partial}{\partial t} \int_0^h B_2 dz + \frac{\partial}{\partial x_0} \int_0^h B_2 u_1 dz - \frac{\partial}{\partial x_0} \int_0^h B_1 u_2 dz = 0$$

$$\frac{\partial}{\partial x_0} \int_0^h B_1 dz + \frac{\partial}{\partial y_0} \int_0^h B_2 dz = 0$$

*Вводя средние по глубине величины
и пренебрегая квадратами отклонений, получаем*



СИСТЕМА УРАВНЕНИЙ МГД МЕЛКОЙ ВОДЫ

Одномерный случай

$$\left\{ \begin{array}{l} \frac{\partial h}{\partial t} + \frac{\partial hu_1}{\partial x} = 0 \\ \frac{\partial hu_1}{\partial t} + (c_g^2 - u_1^2) \frac{\partial h}{\partial x} + 2u_1 \frac{\partial hu_1}{\partial x} = 0 \\ \frac{\partial hu_2}{\partial t} + (B_1 B_2 - u_1 u_2) \frac{\partial h}{\partial x} + u_2 \frac{\partial hu_1}{\partial x} + u_1 \frac{\partial hu_2}{\partial x} - B_1 \frac{\partial h B_2}{\partial x} = 0 \\ \frac{\partial h B_1}{\partial t} = 0 \\ \frac{\partial h B_2}{\partial t} = (u_2 B_1 - u_1 B_2) \frac{\partial h}{\partial x} + B_2 \frac{\partial hu_1}{\partial x} - B_1 \frac{\partial hu_2}{\partial x} + u_1 \frac{\partial h B_2}{\partial x} = 0 \end{array} \right.$$

$$\frac{\partial h B_1}{\partial x} = 0$$

h – глубина жидкости
 u_1, u_2 – скорость жидкости
 B_1, B_2 – приведённая напряжённость магнитного поля (\tilde{B} / ρ)
 $c_g = \sqrt{B_1^2 + gh}$ – скорость распространения малых возмущений
 x – пространственная координата
 t – временная координата



УРАВНЕНИЯ В ИНВАРИАНТАХ РИМАНА

$$\partial_t \begin{pmatrix} h \\ u_1 \\ u_2 \\ B_2 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} u_1 & h & 0 & 0 \\ \frac{c_g^2}{h} & u_1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & u_1 & -B_1 \\ 0 & 0 & -B_1 & u_1 \end{pmatrix} \partial_x \begin{pmatrix} h \\ u_1 \\ u_2 \\ B_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

$$hB_1 = \text{const}$$

Собств. вектора: $(c_g/h \ 1 \ 0 \ 0)$ $(-c_g/h \ 1 \ 0 \ 0)$ $(0 \ 0 \ 1 \ 1)$ $(0 \ 0 \ 1 \ -1)$

Производится умножение системы на собственные вектора и вводятся новые переменные



УРАВНЕНИЯ В ИНВАРИАНТАХ РИМАНА

$$\frac{\partial r}{\partial t} + (u_1 + c_g) \frac{\partial r}{\partial x} = 0$$

$$\frac{\partial s}{\partial t} + (u_1 - c_g) \frac{\partial s}{\partial x} = 0$$

$$\frac{\partial p}{\partial t} + (u_1 - B_1) \frac{\partial p}{\partial x} = 0$$

$$\frac{\partial q}{\partial t} + (u_1 + B_1) \frac{\partial q}{\partial x} = 0$$

$$\frac{\partial B_1 h}{\partial t} = 0$$

$$r = u_1 + \varphi(h)$$

$$s = u_1 - \varphi(h)$$

$$p = u_2 + B_2$$

$$q = u_2 - B_2$$

$$c_g = \sqrt{B_1^2 + gh}$$

$$\varphi(h) = \int \frac{c_g}{h} dh$$



ВОЛНЫ РИМАНА

Альфвеновские волны

$$r = \text{const}, s = \text{const}, p = \text{const}$$

$$u_2(x, t) + B_2(x, t) = u_2(x, 0) + B_2(x, 0)$$

$$u_1(x, t) = u_1(x, 0)$$

$$B_1(x, t) = B_1(x, 0)$$

$$h(x, t) = h(x, 0)$$

$$u_2(x, t) - B_2(x, t) = u_2(x_0, 0) - B_2(x_0, 0)$$

вдоль $\frac{dx}{dt} = u_1 + B_1$
характеристик

$$r = \text{const}, s = \text{const}, q = \text{const}$$

$$u_2(x, t) - B_2(x, t) = u_2(x, 0) - B_2(x, 0)$$

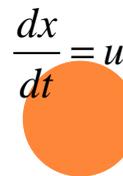
$$u_1(x, t) = u_1(x, 0)$$

$$B_1(x, t) = B_1(x, 0)$$

$$h(x, t) = h(x, 0)$$

$$u_2(x, t) + B_2(x, t) = u_2(x_0, 0) + B_2(x_0, 0)$$

вдоль $\frac{dx}{dt} = u_1 - B_1$
характеристик



ВОЛНЫ РИМАНА

Магнитогравитационные волны

Волна, бегущая влево

$$r = \text{const}, q = \text{const}, p = \text{const}$$

$$u_1(x, t) + \varphi(h(x, t)) = u_1(x, 0) + \varphi(h(x, 0))$$

$$u_2(x, t) = u_2(x, 0)$$

$$B_2(x, t) = B_2(x, 0)$$

$$B_1(x, t)h(x, t) = B_1(x, 0)h(x, 0)$$

$$u_1(x, t) - \varphi(h(x, t)) = u_1(x_0, 0) - \varphi(h(x_0, 0))$$

вдоль характеристик $\frac{dx}{dt} = u_1 - c_g$

Волна, бегущая вправо

$$s = \text{const}, q = \text{const}, p = \text{const}$$

$$u_1(x, t) - \varphi(h(x, t)) = u_1(x, 0) - \varphi(h(x, 0))$$

$$u_2(x, t) = u_2(x, 0)$$

$$B_2(x, t) = B_2(x, 0)$$

$$B_1(x, t)h(x, t) = B_1(x, 0)h(x, 0)$$

$$u_1(x, t) + \varphi(h(x, t)) = u_1(x_0, 0) + \varphi(h(x_0, 0))$$

вдоль характеристик $\frac{dx}{dt} = u_1 + c_g$



ВОЛНЫ РИМАНА

Магнитогравиационные волны

$$r = \text{const}, q = \text{const}, p = \text{const}$$

$$u_1 = \frac{1}{2}(r_0 + s) \quad \frac{\partial u_1}{\partial x} = \frac{1}{2} \frac{\partial s}{\partial x}$$

$$r_0 = u_1 + \varphi \quad \frac{\partial u_1}{\partial x} + \frac{\partial \varphi}{\partial h} \frac{\partial h}{\partial x} = 0$$

$$\frac{\partial s}{\partial x} > 0 \quad \frac{\partial h}{\partial x} < 0 \quad \text{волна понижения уровня}$$

$$\frac{\partial s}{\partial x} < 0 \quad \frac{\partial h}{\partial x} > 0 \quad \text{волна повышения уровня}$$

$$s = \text{const}, q = \text{const}, p = \text{const}$$

$$u_1 = \frac{1}{2}(r + s_0) \quad \frac{\partial u_1}{\partial x} = \frac{1}{2} \frac{\partial r}{\partial x}$$

$$s_0 = u_1 - \varphi \quad \frac{\partial u_1}{\partial x} - \frac{\partial \varphi}{\partial h} \frac{\partial h}{\partial x} = 0$$

$$\frac{\partial r}{\partial x} > 0 \quad \frac{\partial h}{\partial x} > 0 \quad \text{волна понижения уровня}$$

$$\frac{\partial r}{\partial x} < 0 \quad \frac{\partial h}{\partial x} < 0 \quad \text{волна повышения уровня}$$

ВОЛНЫ РИМАНА

Автомодельные решения

Магнитогравитационная
волна разрежения, бегущая
влево

$$r = \text{const}, q = \text{const}, p = \text{const}$$

$$u_1(x, t) + \varphi(h(x, t)) = u_1(x, 0) + \varphi(h(x, 0))$$

$$u_2(x, t) = u_2(x, 0)$$

$$B_2(x, t) = B_2(x, 0)$$

$$B_1(x, t)h(x, t) = B_1(x, 0)h(x, 0)$$

$$u_1(x, t) - \varphi(h(x, t)) = u_1(x_0, 0) - \varphi(h(x_0, 0))$$

вдоль характеристик $\frac{dx}{dt} = u_1 - c_g$
выходящих из точки $(x_0, 0)$

Магнитогравитационная
волна разрежения, бегущая
вправо

$$s = \text{const}, q = \text{const}, p = \text{const}$$

$$u_1(x, t) - \varphi(h(x, t)) = u_1(x, 0) - \varphi(h(x, 0))$$

$$u_2(x, t) = u_2(x, 0)$$

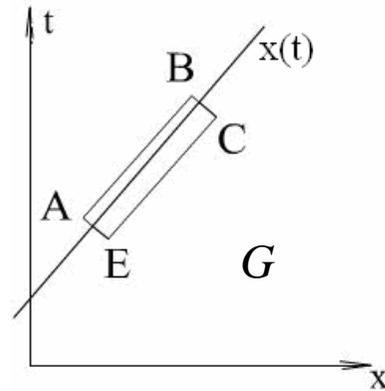
$$B_2(x, t) = B_2(x, 0)$$

$$B_1(x, t)h(x, t) = B_1(x, 0)h(x, 0)$$

$$u_1(x, t) + \varphi(h(x, t)) = u_1(x_0, 0) + \varphi(h(x_0, 0))$$

вдоль характеристик $\frac{dx}{dt} = u_1 + c_g$
выходящих из точки $(x_0, 0)$

РАЗРЫВНЫЕ РЕШЕНИЯ



$$\left\{ \begin{array}{l} \frac{\partial h}{\partial t} + \frac{\partial hu_1}{\partial x} = 0 \\ \frac{\partial hu_1}{\partial t} + \frac{\partial (hu_1^2 - hB_1^2 + 1/2gh^2)}{\partial x} = 0 \\ \frac{\partial hu_2}{\partial t} + \frac{\partial (hu_1u_2 - hB_1B_2)}{\partial x} = 0 \\ \frac{\partial hB_1}{\partial t} = 0 \\ \frac{\partial hB_2}{\partial t} + \frac{\partial (hu_1B_2 - hB_1u_2)}{\partial x} = 0 \end{array} \right.$$

$$\oint_{\partial G} h dx - (hu_1) dt = 0$$

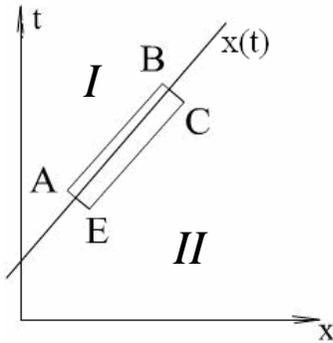
$$\oint_{\partial G} (hu_1) dx - (hu_1^2 - hB_1^2 + \frac{g}{2} h^2) dt = 0$$

$$\oint_{\partial G} (hu_2) dx - (hu_1u_2 - hB_1B_2) dt = 0$$

$$\oint_{\partial G} (hB_1) dx = 0$$

$$\oint_{\partial G} (hB_2) dx - (hu_1B_2 - hB_1u_2) dt = 0$$

РАЗРЫВНЫЕ РЕШЕНИЯ



$$D = D(t) = x'(t)$$

$$u_{1I}(t) = \lim_{x \rightarrow x(t)-0} u_1(x, t)$$

$$u_{2I}(t) = \lim_{x \rightarrow x(t)-0} u_2(x, t)$$

$$B_{1I}(t) = \lim_{x \rightarrow x(t)-0} B_1(x, t)$$

$$B_{2I}(t) = \lim_{x \rightarrow x(t)-0} B_2(x, t)$$

$$h_I(t) = \lim_{x \rightarrow x(t)-0} h(x, t)$$

$$u_{1II}(t) = \lim_{x \rightarrow x(t)+0} u_1(x, t)$$

$$u_{2II}(t) = \lim_{x \rightarrow x(t)+0} u_2(x, t)$$

$$B_{1II}(t) = \lim_{x \rightarrow x(t)+0} B_1(x, t)$$

$$B_{2II}(t) = \lim_{x \rightarrow x(t)+0} B_2(x, t)$$

$$h_{II}(t) = \lim_{x \rightarrow x(t)+0} h(x, t)$$

$$\left\{ \begin{array}{l} Dh_I - h_I u_{1I} = Dh_{II} - h_{II} u_{1II} \\ Dh_I u_{1I} - h_I u_{1I}^2 + h_I B_{1I}^2 - g / 2h_I^2 = Dh_{II} u_{1II} - h_{II} u_{1II}^2 + h_{II} B_{1II}^2 - g / 2h_{II}^2 \\ Dh_I B_{1I} = Dh_{II} B_{1II} \\ Dh_I u_{2I} - h_I u_{1I} u_{2I} + h_I B_{1I} B_{2I} = Dh_{II} u_{2II} - h_{II} u_{1II} u_{2II} + h_{II} B_{1II} B_{2II} \\ Dh_I B_{2I} - h_I u_{1I} B_{2I} + h_I u_{2I} B_{1I} = Dh_{II} B_{2II} - h_{II} u_{1II} B_{2II} + h_{II} u_{2II} B_{1II} \end{array} \right.$$



РАЗРЫВНЫЕ РЕШЕНИЯ

Альфвеновские волны

$$\left\{ \begin{array}{l} Dh_I - h_I u_{1I} = Dh_{II} - h_{II} u_{1II} \\ Dh_I u_{1I} - h_I u_{1I}^2 + h_I B_{1I}^2 - g / 2h_I^2 = Dh_{II} u_{1II} - h_{II} u_{1II}^2 + h_{II} B_{1II}^2 - g / 2h_{II}^2 \\ Dh_I B_{1I} = Dh_{II} B_{1II} \\ Dh_I u_{2I} - h_I u_{1I} u_{2I} + h_I B_{1I} B_{2I} = Dh_{II} u_{2II} - h_{II} u_{1II} u_{2II} + h_{II} B_{1II} B_{2II} \\ Dh_I B_{2I} - h_I u_{1I} B_{2I} + h_I u_{2I} B_{1I} = Dh_{II} B_{2II} - h_{II} u_{1II} B_{2II} + h_{II} u_{2II} B_{1II} \end{array} \right.$$

$$h_I = h_{II} \quad u_{1I} = u_{1II} \quad B_{1I} = B_{1II}$$

$$D = u_1 \pm B_1$$

$$B_{2I} - B_{2II} = \mp (u_{2I} - u_{2II})$$



РАЗРЫВНЫЕ РЕШЕНИЯ

Магнитогравитационные волны

$$\left\{ \begin{array}{l} Dh_I - h_I u_{1I} = Dh_{II} - h_{II} u_{1II} \\ Dh_I u_{1I} - h_I u_{1I}^2 + h_I B_{1I}^2 - g / 2h_I^2 = Dh_{II} u_{1II} - h_{II} u_{1II}^2 + h_{II} B_{1II}^2 - g / 2h_{II}^2 \\ Dh_I B_{1I} = Dh_{II} B_{1II} \\ Dh_I u_{2I} - h_I u_{1I} u_{2I} + h_I B_{1I} B_{2I} = Dh_{II} u_{2II} - h_{II} u_{1II} u_{2II} + h_{II} B_{1II} B_{2II} \\ Dh_I B_{2I} - h_I u_{1I} B_{2I} + h_I u_{2I} B_{1I} = Dh_{II} B_{2II} - h_{II} u_{1II} B_{2II} + h_{II} u_{2II} B_{1II} \end{array} \right.$$

$$B_{2I} = B_{2II}, u_{2I} = u_{2II}$$

$$h_I B_{1I} = h_{II} B_{1II}$$

$$D = \frac{h_I u_{1I} - h_{II} u_{1II}}{h_I - h_{II}}$$

$$u_{1I} - u_{1II} = \pm (h_I - h_{II}) \sqrt{\frac{g / 2(h_I + h_{II}) + (B_{1I} h_I)^2 / (h_I h_{II})}{h_I h_{II}}}$$



РАЗРЫВНЫЕ РЕШЕНИЯ

Тангенциальные разрывы

Для случая $B_1 \equiv 0$

$$h_I = h_{II} \quad u_{1I} = u_{1II} \quad B_{1I} = B_{1II} = 0$$

$$D = u_1$$

слева B_{2I}, u_{2I}

справа B_{2II}, u_{2II}

Для случая $B_1 \neq 0$ все величины непрерывны



ПОСТАНОВКА ЗАДАЧИ РАСПАДА РАЗРЫВА

$$\left\{ \begin{array}{l} \frac{\partial h}{\partial t} + \frac{\partial hu_1}{\partial x} = 0 \\ \frac{\partial hu_1}{\partial t} + (c_g - u_1) \frac{\partial h}{\partial x} + 2u_1 \frac{\partial hu_1}{\partial x} = 0 \\ \frac{\partial hu_2}{\partial t} + (B_1 B_2 - u_1 u_2) \frac{\partial h}{\partial x} + u_2 \frac{\partial hu_1}{\partial x} + u_1 \frac{\partial hu_2}{\partial x} - B_1 \frac{\partial h B_2}{\partial x} = 0 \\ \frac{\partial h B_1}{\partial t} = 0 \\ \frac{\partial h B_2}{\partial t} = (u_2 B_1 - u_1 B_2) \frac{\partial h}{\partial x} + B_2 \frac{\partial hu_1}{\partial x} - B_1 \frac{\partial hu_2}{\partial x} + u_1 \frac{\partial h B_2}{\partial x} = 0 \end{array} \right.$$

$$\frac{\partial h B_1}{\partial x} = 0$$

$$\left\{ \begin{array}{l} t = 0 \\ h = h_I, u_1 = u_{1I}, u_2 = u_{2I}, B_1 = B_{1I}, B_2 = B_{2I}; x < 0 \\ h = h_{II}, u_1 = u_{1II}, u_2 = u_{2II}, B_1 = B_{1II}, B_2 = B_{2II}; x > 0 \\ B_{1I} h_I = B_{1II} h_{II} \end{array} \right.$$

h – глубина жидкости
*u*₁, *u*₂ – скорость жидкости
*B*₁, *B*₂ – приведённая напряжённость магнитного поля
*c*_g = √(*B*₁² + *gh*) – скорость распространения малых возмущений



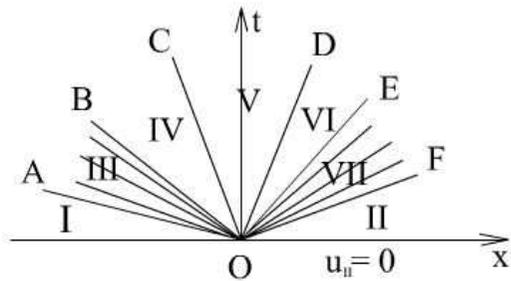
ВОЗМОЖНЫЕ ВОЛНОВЫЕ КОНФИГУРАЦИИ

Выбор системы координат

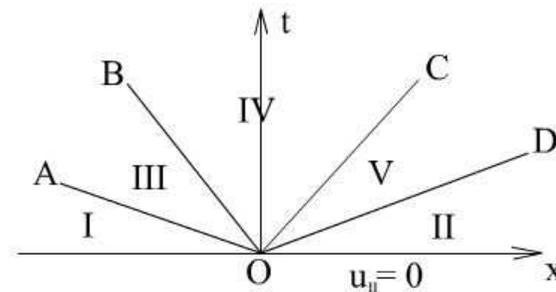
- Глубина жидкости справа не превышает глубину жидкости слева
- Жидкость справа покоится



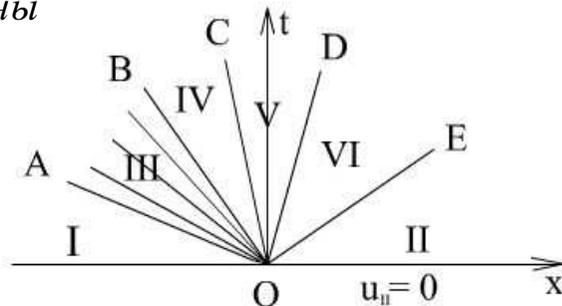
ВОЗМОЖНЫЕ ВОЛНОВЫЕ КОНФИГУРАЦИИ



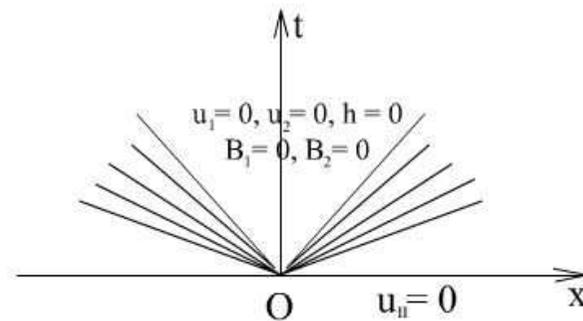
*Две магнитогравиационные волны
понижения уровня, две альфвеновские
волны*



*Две магнитогравиационные ударные
волны, две альфвеновские волны*



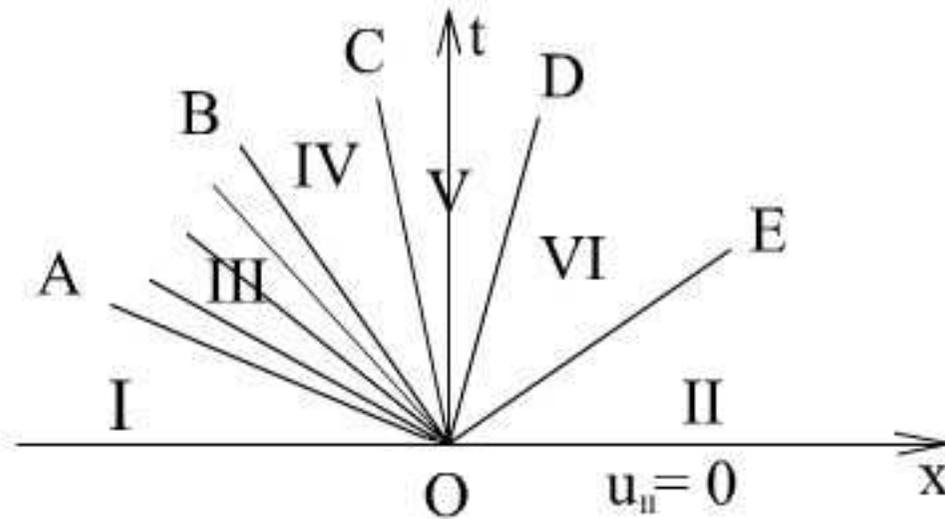
*Магнитогравиационная волна
понижения уровня,
магнитогравиационная ударная волна,
две альфвеновские волны*



*Две гидродинамические волны
понижения уровня, зона вакуума*



УСЛОВИЯ РЕАЛИЗАЦИИ КОНФИГУРАЦИЙ

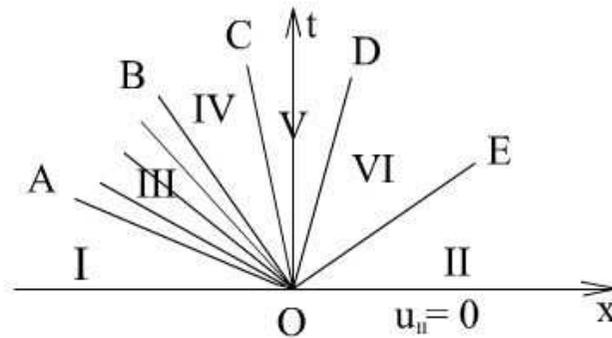


$$u_{1I} - c_{gI} \leq u_{1IV} - c_{gIV} < u_{1IV} - |B_{1IV}| < u_{1IV} + |B_{1IV}| \leq D$$

$$h_{II} \leq h_{IV} \leq h_I$$



УСЛОВИЯ РЕАЛИЗАЦИИ КОНФИГУРАЦИЙ



$$u_{1IV}^{(1)} = u_{1I} + \varphi(h_I) - \varphi(h_{IV}) \quad h_{II} \leq h_{IV} \leq h_I$$

$$u_{1IV}^{(2)} = -(h_{II} - h_{IV}) \sqrt{\frac{g / 2(h_{II} + h_{IV}) + (B_{1I} h_I)^2 / (h_{II} h_{IV})}{h_{II} h_{IV}}}$$

Убывает по h_{IV} *Возрастает по h_{IV}*

Для существования и единственности корня на отрезке $[h_{II}, h_I]$

$$u_{1IV}^{(1)}(h_{II}) \geq u_{1IV}^{(2)}(h_{II}) \quad u_{1IV}^{(1)}(h_I) \leq u_{1IV}^{(2)}(h_I)$$

$$\varphi(h_{II}) - \varphi(h_I) \leq u_{1I} \leq (h_I - h_{II}) \sqrt{\frac{g / 2(h_I + h_{II}) + (B_{1I} h_I)^2 / (h_I h_{II})}{h_I h_{II}}}$$



УСЛОВИЯ РЕАЛИЗАЦИИ КОНФИГУРАЦИЙ

*Две ударные волны,
две альфвеновские волны*

$$u_{1I} \geq (h_I - h_{II}) \sqrt{\frac{g/2(h_I + h_{II}) + (B_{1I}h_I)^2 / (h_I h_{II})}{h_I h_{II}}}$$

*Ударная волна, волна понижения уровня,
две альфвеновские волны*

$$\begin{cases} u_{1I} > \varphi(h_{II}) - \varphi(h_I) \\ u_{1I} < (h_I - h_{II}) \sqrt{\frac{g/2(h_I + h_{II}) + (B_{1I}h_I)^2 / (h_I h_{II})}{h_I h_{II}}} \end{cases}$$

Две волны понижения уровня, две альфвеновские волны

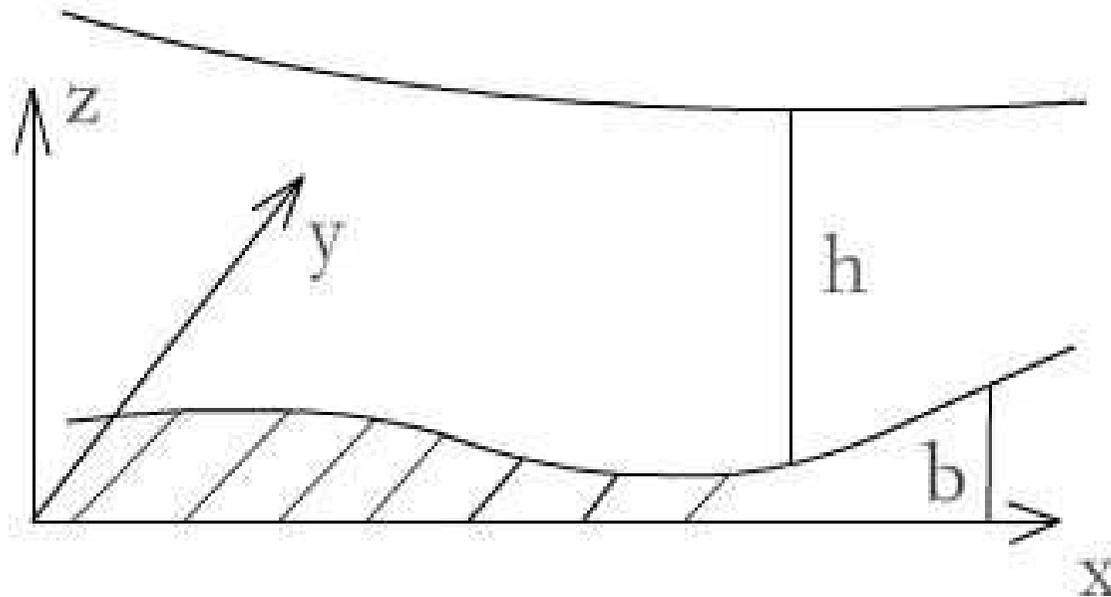
$$u_{1I} \leq \varphi(h_{II}) - \varphi(h_I)$$

Две волны понижения уровня, зона вакуума

$$\begin{cases} B_{1I} = B_{1II} = 0 \\ u_{1I} < -2c_{gI} - 2c_{gII} \end{cases}$$



МГД МЕЛКАЯ ВОДА НАД НЕРОВНОЙ ПОВЕРХНОСТЬЮ



Вводится новый параметр:

b – высота подстилающей поверхности



Уравнения МГД мелкой воды

Одномерный случай

$$\left\{ \begin{array}{l} \frac{\partial h}{\partial t} + \frac{\partial hu_1}{\partial x} = 0 \\ \frac{\partial hu_1}{\partial t} + (c_g^2 - u_1^2) \frac{\partial h}{\partial x} + 2u_1 \frac{\partial hu_1}{\partial x} = -gh \frac{\partial b}{\partial x} \\ \frac{\partial hu_2}{\partial t} + (B_1 B_2 - u_1 u_2) \frac{\partial h}{\partial x} + u_2 \frac{\partial hu_1}{\partial x} + u_1 \frac{\partial hu_2}{\partial x} - B_1 \frac{\partial h B_2}{\partial x} = 0 \\ \frac{\partial h B_1}{\partial t} = 0 \\ \frac{\partial h B_2}{\partial t} = (u_2 B_1 - u_1 B_2) \frac{\partial h}{\partial x} + B_2 \frac{\partial hu_1}{\partial x} - B_1 \frac{\partial hu_2}{\partial x} + u_1 \frac{\partial h B_2}{\partial x} = 0 \end{array} \right.$$

$$\frac{\partial h B_1}{\partial x} = 0$$

h – глубина жидкости
 u_1, u_2 – скорость жидкости
 B_1, B_2 – приведённая напряжённость магнитного поля (\tilde{B} / ρ)
 $c_g = \sqrt{B_1^2 + gh}$ – скорость распространения малых возмущений
 b – высота дна



УРАВНЕНИЯ В ИНВАРИАНТАХ РИМАНА

$$\frac{\partial r}{\partial t} + (u_1 + c_g) \frac{\partial r}{\partial x} = -g \frac{\partial b}{\partial x}$$

$$\frac{\partial s}{\partial t} + (u_1 - c_g) \frac{\partial s}{\partial x} = -g \frac{\partial b}{\partial x}$$

$$\frac{\partial p}{\partial t} + (u_1 - B_1) \frac{\partial p}{\partial x} = 0$$

$$\frac{\partial q}{\partial t} + (u_1 + B_1) \frac{\partial q}{\partial x} = 0$$

$$\frac{\partial B_1 h}{\partial t} = 0$$

$$r = u_1 + \varphi(h)$$

$$s = u_1 - \varphi(h)$$

$$p = u_2 + B_2$$

$$q = u_2 - B_2$$

$$c_g = \sqrt{B_1^2 + gh}$$

$$\varphi(h) = \int \frac{c_g}{h} dh$$



РЕШЕНИЯ ТИПА ВОЛН РИМАНА

- Классические волны Римана не являются решениями
- Решения типа волны Римана тождественно удовлетворяют три из четырёх уравнений

$$\begin{aligned}\frac{\partial r}{\partial t} + (u_1 + c_g) \frac{\partial r}{\partial x} &= -g \frac{\partial b}{\partial x} & \frac{\partial p}{\partial t} + (u_1 - B_1) \frac{\partial p}{\partial x} &= 0 \\ \frac{\partial s}{\partial t} + (u_1 - c_g) \frac{\partial s}{\partial x} &= -g \frac{\partial b}{\partial x} & \frac{\partial q}{\partial t} + (u_1 + B_1) \frac{\partial q}{\partial x} &= 0\end{aligned}$$

- Существуют только для наклонных плоскостей

$$\frac{\partial b}{\partial x} = k \equiv \text{const}$$



ВОЛНЫ РИМАНА

Альфвеновские волны

Уравнения на s , r , p

выполнены тождественно

$$u_2(x,t) + B_2(x,t) = u_2(x_0,0) + B_2(x_0,0)$$

$$u_1(x,t) + gkt = u_1(x_0,0)$$

$$B_1(x,t) = B_1(x_0,0)$$

$$h(x,t) = h(x_0,0)$$

$$u_2(x,t) - B_2(x,t) = u_2(x_0,0) - B_2(x_0,0)$$

вдоль

$$\frac{dx}{dt} = u_1 + B_1$$

характеристик

Уравнения на r , s , q

выполнены тождественно

$$u_2(x,t) - B_2(x,t) = u_2(x,0) - B_2(x,0)$$

$$u_1(x,t) + gkt = u_1(x,0)$$

$$B_1(x,t) = B_1(x,0)$$

$$h(x,t) = h(x,0)$$

$$u_2(x,t) + B_2(x,t) = u_2(x_0,0) + B_2(x_0,0)$$

вдоль

$$\frac{dx}{dt} = u_1 - B_1$$

характеристик



ВОЛНЫ РИМАНА

Магнитогравитационные волны

Волна, бегущая влево

*Уравнения на r, p, q
выполнены тождественно*

$$u_1(x, t) + \varphi(h(x, t)) + gkt =$$

$$= u_1(x|_{t=0}, 0) + \varphi(h(x|_{t=0}, 0))$$

$$u_2(x, t) = u_2(x|_{t=0}, 0)$$

$$B_2(x, t) = B_2(x|_{t=0}, 0)$$

$$B_1(x, t)h(x, t) = B_1(x|_{t=0}, 0)h(x|_{t=0}, 0)$$

$$u_1(x, t) - \varphi(h(x, t)) = u_1(x|_{t=0}, 0) - \varphi(h(x|_{t=0}, 0))$$

вдоль характеристик $\frac{dx}{dt} = u_1 - c_g - gkt$

Волна, бегущая вправо

*Уравнения на s, p, q
выполнены тождественно*

$$u_1(x, t) - \varphi(h(x, t)) + gkt =$$

$$= u_1(x|_{t=0}, 0) - \varphi(h(x|_{t=0}, 0))$$

$$u_2(x, t) = u_2(x|_{t=0}, 0)$$

$$B_2(x, t) = B_2(x|_{t=0}, 0)$$

$$B_1(x, t)h(x, t) = B_1(x|_{t=0}, 0)h(x|_{t=0}, 0)$$

$$u_1(x, t) + \varphi(h(x, t)) = u_1(x|_{t=0}, 0) + \varphi(h(x|_{t=0}, 0))$$

вдоль характеристик $\frac{dx}{dt} = u_1 + c_g - gkt$

ВОЛНЫ РИМАНА

Автомодельные решения

*Магнитогравитационная
волна разрежения, бегущая
влево*

$$u_1(x,t) + \varphi(h(x,t)) + gkt =$$

$$= u_1(x_0,0) + \varphi(h(x_0,0))$$

$$u_2(x,t) = u_2(x_0,0)$$

$$B_2(x,t) = B_2(x_0,0)$$

$$B_1(x,t)h(x,t) = B_1(x_0,0)h(x_0,0)$$

$$u_1(x,t) - \varphi(h(x,t)) + gkt = u_1(x_0,0) - \varphi(h(x_0,0))$$

*вдоль характеристик $\frac{dx}{dt} = u_1 - c_g - gkt$
выходящих из точки $(x_0,0)$*

*Магнитогравитационная
волна разрежения, бегущая
вправо*

$$u_1(x,t) - \varphi(h(x,t)) + gkt =$$

$$= u_1(x_0,0) - \varphi(h(x_0,0))$$

$$u_2(x,t) = u_2(x_0,0)$$

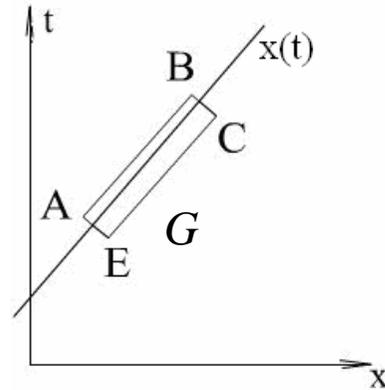
$$B_2(x,t) = B_2(x_0,0)$$

$$B_1(x,t)h(x,t) = B_1(x_0,0)h(x_0,0)$$

$$u_1(x,t) + \varphi(h(x,t)) + gkt = u_1(x_0,0) + \varphi(h(x_0,0))$$

*вдоль характеристик $\frac{dx}{dt} = u_1 + c_g - gkt$
выходящих из точки $(x_0,0)$*

РАЗРЫВНЫЕ РЕШЕНИЯ



$$\left\{ \begin{array}{l} \frac{\partial h}{\partial t} + \frac{\partial hu_1}{\partial x} = 0 \\ \frac{\partial hu_1}{\partial t} + \frac{\partial (hu_1^2 - hB_1^2 + 1/2 gh^2)}{\partial x} = -g \frac{\partial b}{\partial x} \\ \frac{\partial hu_2}{\partial t} + \frac{\partial (hu_1 u_2 - hB_1 B_2)}{\partial x} = 0 \\ \frac{\partial hB_1}{\partial t} = 0 \\ \frac{\partial hB_2}{\partial t} + \frac{\partial (hu_1 B_2 - hB_1 u_2)}{\partial x} = 0 \end{array} \right.$$

$$\oint_{\partial G} h dx - (hu_1) dt = 0$$

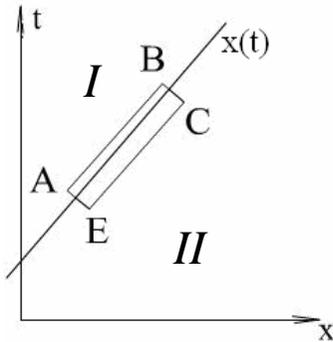
$$\oint_{\partial G} (hu_1) dx - (hu_1^2 - hB_1^2 + \frac{g}{2} h^2) dt = \oint_{\partial G} -gb dt$$

$$\oint_{\partial G} (hu_2) dx - (hu_1 u_2 - hB_1 B_2) dt = 0$$

$$\oint_{\partial G} (hB_1) dx = 0$$

$$\oint_{\partial G} (hB_2) dx - (hu_1 B_2 - hB_1 u_2) dt = 0$$

РАЗРЫВНЫЕ РЕШЕНИЯ



$$D = D(t) = x'(t)$$

$$u_{1I}(t) = \lim_{x \rightarrow x(t)-0} u_1(x, t)$$

$$u_{2I}(t) = \lim_{x \rightarrow x(t)-0} u_2(x, t)$$

$$B_{1I}(t) = \lim_{x \rightarrow x(t)-0} B_1(x, t)$$

$$B_{2I}(t) = \lim_{x \rightarrow x(t)-0} B_2(x, t)$$

$$h_I(t) = \lim_{x \rightarrow x(t)-0} h(x, t)$$

$$u_{1II}(t) = \lim_{x \rightarrow x(t)+0} u_1(x, t)$$

$$u_{2II}(t) = \lim_{x \rightarrow x(t)+0} u_2(x, t)$$

$$B_{1II}(t) = \lim_{x \rightarrow x(t)+0} B_1(x, t)$$

$$B_{2II}(t) = \lim_{x \rightarrow x(t)+0} B_2(x, t)$$

$$h_{II}(t) = \lim_{x \rightarrow x(t)+0} h(x, t)$$

$$\left\{ \begin{array}{l} Dh_I - h_I u_{1I} = Dh_{II} - h_{II} u_{1II} \\ Dh_I u_{1I} - h_I u_{1I}^2 + h_I B_{1I}^2 - g / 2h_I^2 = Dh_{II} u_{1II} - h_{II} u_{1II}^2 + h_{II} B_{1II}^2 - g / 2h_{II}^2 \\ Dh_I B_{1I} = Dh_{II} B_{1II} \\ Dh_I u_{2I} - h_I u_{1I} u_{2I} + h_I B_{1I} B_{2I} = Dh_{II} u_{2II} - h_{II} u_{1II} u_{2II} + h_{II} B_{1II} B_{2II} \\ Dh_I B_{2I} - h_I u_{1I} B_{2I} + h_I u_{2I} B_{1I} = Dh_{II} B_{2II} - h_{II} u_{1II} B_{2II} + h_{II} u_{2II} B_{1II} \end{array} \right.$$



РАЗРЫВНЫЕ РЕШЕНИЯ

Альфвеновские волны

$$\left\{ \begin{array}{l} Dh_I - h_I u_{1I} = Dh_{II} - h_{II} u_{1II} \\ Dh_I u_{1I} - h_I u_{1I}^2 + h_I B_{1I}^2 - g / 2h_I^2 = Dh_{II} u_{1II} - h_{II} u_{1II}^2 + h_{II} B_{1II}^2 - g / 2h_{II}^2 \\ Dh_I B_{1I} = Dh_{II} B_{1II} \\ Dh_I u_{2I} - h_I u_{1I} u_{2I} + h_I B_{1I} B_{2I} = Dh_{II} u_{2II} - h_{II} u_{1II} u_{2II} + h_{II} B_{1II} B_{2II} \\ Dh_I B_{2I} - h_I u_{1I} B_{2I} + h_I u_{2I} B_{1I} = Dh_{II} B_{2II} - h_{II} u_{1II} B_{2II} + h_{II} u_{2II} B_{1II} \end{array} \right.$$

$$h_I = h_{II} \quad u_{1I} = u_{1II} \quad B_{1I} = B_{1II}$$

$$D = u_1 \pm B_1$$

$$B_{2I} - B_{2II} = \mp (u_{2I} - u_{2II})$$



РАЗРЫВНЫЕ РЕШЕНИЯ

Магнитогравитационные волны

$$\left\{ \begin{array}{l} Dh_I - h_I u_{1I} = Dh_{II} - h_{II} u_{1II} \\ Dh_I u_{1I} - h_I u_{1I}^2 + h_I B_{1I}^2 - g / 2h_I^2 = Dh_{II} u_{1II} - h_{II} u_{1II}^2 + h_{II} B_{1II}^2 - g / 2h_{II}^2 \\ Dh_I B_{1I} = Dh_{II} B_{1II} \\ Dh_I u_{2I} - h_I u_{1I} u_{2I} + h_I B_{1I} B_{2I} = Dh_{II} u_{2II} - h_{II} u_{1II} u_{2II} + h_{II} B_{1II} B_{2II} \\ Dh_I B_{2I} - h_I u_{1I} B_{2I} + h_I u_{2I} B_{1I} = Dh_{II} B_{2II} - h_{II} u_{1II} B_{2II} + h_{II} u_{2II} B_{1II} \end{array} \right.$$

$$B_{2I} = B_{2II}, u_{2I} = u_{2II}$$

$$h_I B_{1I} = h_{II} B_{1II}$$

$$D = \frac{h_I u_{1I} - h_{II} u_{1II}}{h_I - h_{II}}$$

$$u_{1I} - u_{1II} = \pm (h_I - h_{II}) \sqrt{\frac{g / 2(h_I + h_{II}) + (B_{1I} h_I)^2 / (h_I h_{II})}{h_I h_{II}}}$$



РАЗРЫВНЫЕ РЕШЕНИЯ

Контактные разрывы

Для случая $B_1 \equiv 0$

$$h_I = h_{II} \quad u_{1I} = u_{1II} \quad B_{1I} = B_{1II} = 0$$

$$D = u_1$$

слева B_{2I}, u_{2I}

справа B_{2II}, u_{2II}

Для случая $B_1 \neq 0$ все величины непрерывны

СРАВНЕНИЕ РЕШЕНИЙ

Наклонная плоскость

Ровное дно

Характеристики

$$X(t) = -\frac{1}{2} gkt^2 + (u_1 + c_g)t + X(0)$$

$$X(t) = (u_1 + c_g)t + X(0)$$

$$\begin{cases} \tilde{x} = x + \frac{1}{2} gkt^2 \\ \tilde{t} = t \end{cases}$$



ЗАМЕНА ПЕРЕМЕННЫХ

Невырожденная замена переменных

$$\tilde{x} \rightarrow x + gkt^2 / 2$$

$$\tilde{t} \rightarrow t$$

$$\tilde{u}_1 = u_1 + gkt$$

сводит систему уравнений МГД мелкой воды на наклонной плоскости к системе уравнений на ровной плоскости (в дальнейшем знак тильды опущен)



ПОСТАНОВКА ЗАДАЧИ РАСПАДА РАЗРЫВА

$$\left\{ \begin{array}{l} \frac{\partial h}{\partial t} + \frac{\partial hu_1}{\partial x} = 0 \\ \frac{\partial hu_1}{\partial t} + (c_g^2 - u_1^2) \frac{\partial h}{\partial x} + 2u_1 \frac{\partial hu_1}{\partial x} = -g \frac{\partial b}{\partial x} \\ \frac{\partial hu_2}{\partial t} + (B_1 B_2 - u_1 u_2) \frac{\partial h}{\partial x} + u_2 \frac{\partial hu_1}{\partial x} + u_1 \frac{\partial hu_2}{\partial x} - B_1 \frac{\partial h B_2}{\partial x} = 0 \\ \frac{\partial h B_1}{\partial t} = 0 \\ \frac{\partial h B_2}{\partial t} = (u_2 B_1 - u_1 B_2) \frac{\partial h}{\partial x} + B_2 \frac{\partial hu_1}{\partial x} - B_1 \frac{\partial hu_2}{\partial x} + u_1 \frac{\partial h B_2}{\partial x} = 0 \end{array} \right.$$

$$\frac{\partial h B_1}{\partial x} = 0$$

$$\left\{ \begin{array}{l} t = 0 \\ h = h_I, u_1 = u_{1I}, u_2 = u_{2I}, B_1 = B_{1I}, B_2 = B_{2I} \text{ where } x < 0 \\ h = h_{II}, u_1 = u_{1II}, u_2 = u_{2II}, B_1 = B_{1II}, B_2 = B_{2II} \text{ where } x > 0 \\ B_{1I} h_I = B_{1II} h_{II} \end{array} \right.$$

h – глубина жидкости
*u*₁, *u*₂ – скорость жидкости
*B*₁, *B*₂ – приведённая напряжённость магнитного поля (\tilde{B} / ρ)
*c*_g = $\sqrt{B_1^2 + gh}$ – скорость распространения малых возмущений
b – высота дна



УСЛОВИЯ СОВМЕСТИМОСТИ КОНФИГУРАЦИЙ

*Две ударные волны,
две альфвеновские волны*

$$u_{1I} \geq (h_I - h_{II}) \sqrt{\frac{g/2(h_I + h_{II}) + (B_{1I}h_I)^2 / (h_I h_{II})}{h_I h_{II}}}$$

Ударная волна, волна разрежения, две альфвеновские волны

$$\begin{cases} u_{1I} > \varphi(h_{II}) - \varphi(h_I) \\ u_{1I} < (h_I - h_{II}) \sqrt{\frac{g/2(h_I + h_{II}) + (B_{1I}h_I)^2 / (h_I h_{II})}{h_I h_{II}}} \end{cases}$$

Две волны разрежения, две альфвеновские волны

$$u_{1I} \leq \varphi(h_{II}) - \varphi(h_I)$$

Две волны разрежения, зона вакуума

$$\begin{cases} B_{1I} = B_{1II} = 0 \\ u_{1I} < -2c_{gI} - 2c_{gII} \end{cases}$$



ОБРАТНАЯ ЗАМЕНА ПЕРЕМЕННЫХ

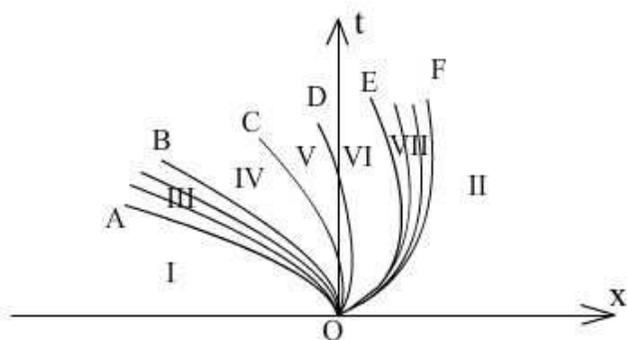
Используя обратную замену координат

$$\begin{cases} x = \tilde{x} - \frac{1}{2} gkt^2 \\ t = \tilde{t} \\ u = \tilde{u} - gkt \end{cases}$$

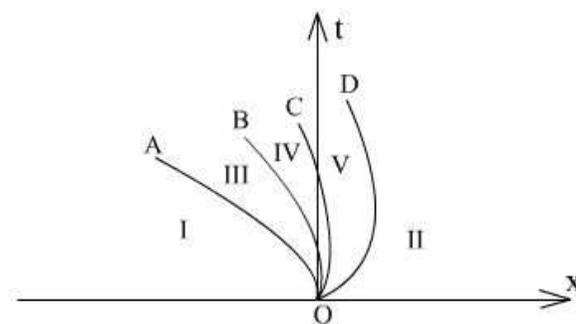
*можно получить решение задачи распада разрыва
на наклонной плоскости*



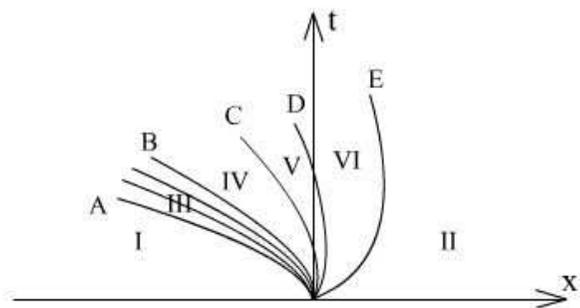
РАСПАД РАЗРЫВА НА НАКЛОННОЙ ПЛОСКОСТИ



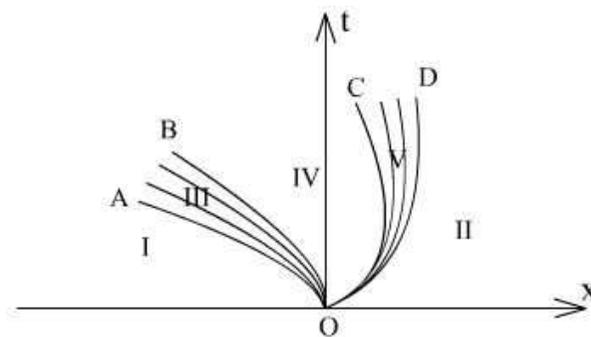
Две магнитогравитационные волны разрежения, две альфвеновские волны



Две магнитогравитационные ударные волны, две альфвеновские волны



Магнитогравитационная волна разрежения, магнитогравитационная ударная волна, две альфвеновские волны



Две гидродинамические волны разрежения, зона вакуума



РЕЗУЛЬТАТЫ И ВЫВОДЫ

Получены частные решения уравнений магнитной гидродинамики в приближении мелкой воды над ровной поверхностью и наклонной плоскостью: магнитогравитационные и альфвеновские волны.

Показано, что над другими подстилающими поверхностями не существует решений типа простой волны Римана.

Найдено решение задачи распада разрыва в магнитной гидродинамике в приближении мелкой воды. Оно является суперпозицией двух альфвеновских волн и решения гидродинамической задачи распада разрыва с скоростью звука, соответствующей распространению слабых возмущений в МГД мелкой воде.



СПАСИБО ЗА ВНИМАНИЕ

