# Неклассические релаксационные колебания

Глызин С.Д.
glyzin@uniyar.ac.ru

Ярославский государственный университет им. П.Г. Демидова

# Пример

$$\dot{x} = \alpha - x(y+1), \qquad \varepsilon\dot{y} = \left[x - 1 - \frac{\beta}{1+\gamma y}\right] y, \tag{1}$$

$0 < \varepsilon \ll 1$, $\alpha, \beta, \gamma > 0$ имеют порядок единицы и кроме того выполняется условие

$$\alpha > \beta + 1. \tag{2}$$

# Пример

$$\dot{x} = \alpha - x(y+1), \qquad \varepsilon\dot{y} = \left[x - 1 - \frac{\beta}{1+\gamma y}\right] y, \tag{1}$$

$0 < \varepsilon \ll 1$, $\alpha, \beta, \gamma > 0$ имеют порядок единицы и кроме того выполняется условие

$$\alpha > \beta + 1. \tag{2}$$

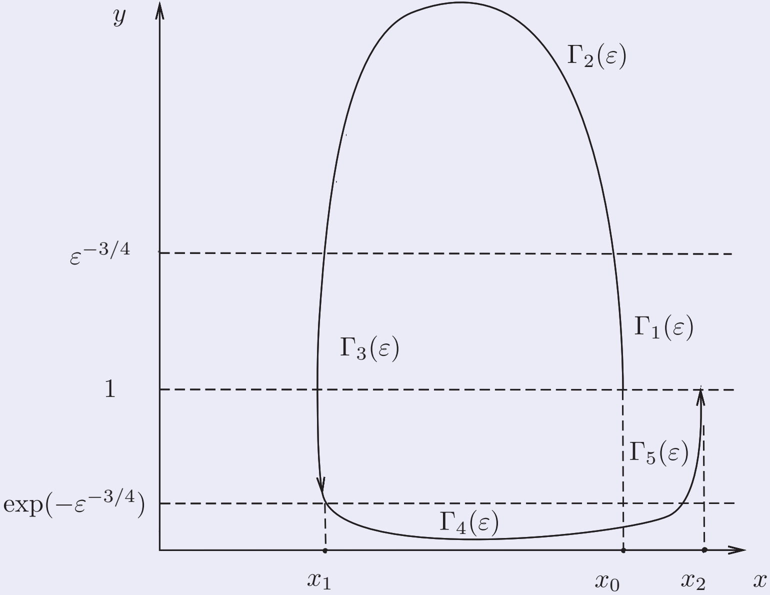

$y$
$\Gamma_2(\varepsilon)$
$\varepsilon^{-3/4}$
$\Gamma_1(\varepsilon)$
$\Gamma_3(\varepsilon)$
$1$
$\Gamma_5(\varepsilon)$
$\exp(-\varepsilon^{-3/4})$
$\Gamma_4(\varepsilon)$
$x_1$
$x_0$
$x_2$
$x$

Рис.: 1

Для отыскания циклов системы (13) фиксируем произвольно $x_0 \in [\beta+1, \alpha]$ и обозначим через

$$\Gamma(\varepsilon) = \{(x, y) : \ \ x = x(t, x_0, \varepsilon), \ \ y = y(t, x_0, \varepsilon), \ \ t \geq 0\} \tag{3}$$

ее траекторию с начальными условиями $x(0, x_0, \varepsilon) = x_0, \ y(0, x_0, \varepsilon) = 1$. Рассмотрим второй положительный корень $t = T(x_0, \varepsilon)$ уравнения $y(t, x_0, \varepsilon) = 1$ (если он существует) и определим оператор последования Пуанкаре

$$x_0 \to \Pi(x_0, \varepsilon) \stackrel{\text{def}}{=} x(t, x_0, \varepsilon)\Big|_{t=T(x_0,\varepsilon)}. \tag{4}$$

Наша задача – выяснить асимптотическое поведение при $\varepsilon \to 0$ оператора (4).

Справедливо неравенство

$$x_0 - 1 - \beta/(1+\gamma y) > 0 \quad \forall\, y \geq 0. \tag{5}$$

А отсюда и из (13) заключаем, что сначала движение фазовой точки $(x, y)$ происходит в асимптотически малой окрестности луча $\{(x,y):\ x = x_0,\ y \geq 1\}$, причем компонента $y(t, x_0, \varepsilon)$ за асимптотически малое время (порядка $\varepsilon \ln(1/\varepsilon)$) достигает значения $y = \varepsilon^{-3/4}$. Соответствующий участок траектории $\Gamma(\varepsilon)$ обозначим через $\Gamma_1(\varepsilon)$ (см. рис 1) и назовем участком взлета.

Справедливо неравенство

$$x_0 - 1 - \beta/(1 + \gamma y) > 0 \quad \forall\, y \geq 0. \tag{5}$$

А отсюда и из (13) заключаем, что сначала движение фазовой точки $(x, y)$ происходит в асимптотически малой окрестности луча $\{(x, y): \ x = x_0, \ y \geq 1\}$, причем компонента $y(t, x_0, \varepsilon)$ за асимптотически малое время (порядка $\varepsilon \ln(1/\varepsilon)$) достигает значения $y = \varepsilon^{-3/4}$. Соответствующий участок траектории $\Gamma(\varepsilon)$ обозначим через $\Gamma_1(\varepsilon)$ (см. рис 1) и назовем участком взлета.

Следующий участок, лежащий в полуплоскости $y \geq \varepsilon^{-3/4}$, обозначим через $\Gamma_2(\varepsilon)$ и будем называть участком поворота. Сделаем в (13) замену $u = \varepsilon y$ и возьмем $x$ за новое время. После отбрасывания асимптотически малых добавок имеем

$$\frac{du}{dx} = -\frac{x-1}{x}, \quad u|_{x=x_0} = 0. \tag{6}$$

Решение задачи (6) задается равенством

$$u(x) = -(x - x_0) + \ln\frac{x}{x_0}, \quad 0 < x \leq x_0. \tag{7}$$

Следующий участок, лежащий в полуплоскости $y \geq \varepsilon^{-3/4}$, обозначим через $\Gamma_2(\varepsilon)$ и будем называть участком поворота. Сделаем в (13) замену $u = \varepsilon y$ и возьмем $x$ за новое время. После отбрасывания асимптотически малых добавок имеем

$$\frac{du}{dx} = -\frac{x-1}{x}, \quad u|_{x=x_0} = 0. \tag{6}$$

Решение задачи (6) задается равенством

$$u(x) = -(x - x_0) + \ln\frac{x}{x_0}, \quad 0 < x \leq x_0. \tag{7}$$

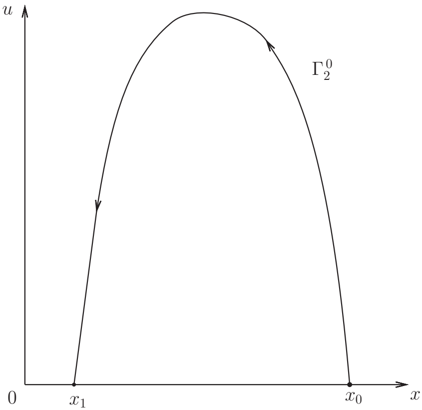



Рис.: 2

Поскольку $u(x_0) = 0$, $u'(x) < 0$ при $1 < x \le x_0$, $u'(x) > 0$ при $0 < x < 1$, $u(x) \to -\infty$ при $x \to +0$, то на интервале $(0, 1)$ уравнение $u(x) = 0$ допускает единственное решение $x = x_1$, причем $u(x) > 0$ при $x_1 < x < x_0$. А это значит, что, двигаясь по кривой $\Gamma_2(\varepsilon)$, фазовая точка системы (13) сначала покидает прямую $y = \varepsilon^{-3/4}$, а затем снова возвращается на нее. После перехода к переменным $(x, u)$ участок $\Gamma_2(\varepsilon) \subset \Gamma(\varepsilon)$ имеет пределом при $\varepsilon \to 0$ кривую $\Gamma_2^0 = \{(x, u) : \ u = u(x),\ x_1 \le x \le x_0\}$.

Время движения по $\Gamma_2(\varepsilon)$ имеет порядок $\varepsilon \ln(1/\varepsilon)$. Любой кусок $\Gamma_2(\varepsilon)$, отвечающий значениям $x \in [a, b] \subset (x_1, x_0)$, где $a, b = \mathrm{const} > 0$, фазовая точка $(x, y)$ проходит за время порядка $\varepsilon$.

$\Gamma_3(\varepsilon)$ соответствует значениям переменной $y$ из отрезка $\exp(-\varepsilon^{-3/4}) \leq y \leq \varepsilon^{-3/4}$, и аналогичен уже рассмотренному случаю $\Gamma_1(\varepsilon)$. $x_1 - 1 - \beta/(1+\gamma y) < 0 \quad \forall\, y \geq 0$, следовательно кривая $\Gamma_3(\varepsilon)$ асимптотически близка к отрезку

$\{(x,y):\ x = x_1, \exp(-\varepsilon^{-3/4}) \leq y \leq \varepsilon^{-3/4}\}$

$\Gamma_3(\varepsilon)$ — участок «падения» и время «падения» имеет порядок $\varepsilon^{1/4}$.

$\Gamma_4(\varepsilon)$ лежит в полуплоскости $y \leq \exp(-\varepsilon^{-3/4})$ и называется участком медленного движения. Для его описания перейдем в системе (13) к новой переменной $v = \varepsilon \ln y$ и возьмем $x$ за новое время.
Для нахождения $v = v(x)$ после отбрасывания асимптотически малых слагаемых имеем

$$\frac{dv}{dx} = \frac{x - 1 - \beta}{\alpha - x}, \quad v|_{x=x_1} = 0, \tag{8}$$

из которой, в свою очередь, выводим:

$$v(x) = -(x - x_1) - (\alpha - 1 - \beta) \ln \frac{\alpha - x}{\alpha - x_1}, \quad x_1 \leq x < \alpha. \tag{9}$$

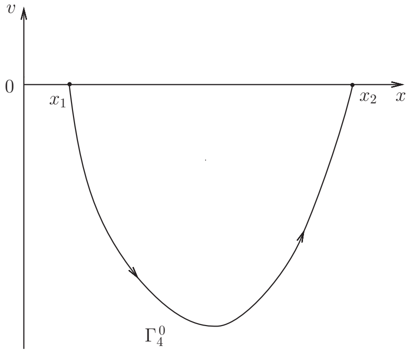



Рис.: 3

Функция $v(x)$ такая, что $v'(x) < 0$ при $x_1 \le x < \beta + 1$, $v'(x) > 0$ при $\beta + 1 < x < \alpha$, $v(x) \to +\infty$ при $x \to \alpha - 0$. Следовательно, у уравнения $v(x) = 0$ на интервале $\beta + 1 < x < \alpha$ существует единственное решение $x = x_2$, причем $v(x) < 0$ при $x_1 < x < x_2$. После перехода к переменным $(x, v)$ кривая $\Gamma_4(\varepsilon)$ стремится при $\varepsilon \to 0$ к пределу $\Gamma_4^0 = \{(x, v) : \ v = v(x), \ x_1 \le x \le x_2\}$ (см. рис. 3).

Заключительный этап — участок подъема $\Gamma_5(\varepsilon) \subset \Gamma(\varepsilon)$. Время "подъема" асимптотически мало (имеет порядок $\varepsilon^{1/4}$).

## Лемма

*При всех достаточно малых* $\varepsilon > 0$ *оператор* (4) *определен на отрезке* $\beta + 1 \le x_0 \le \alpha$ *и удовлетворяет предельным равенствам*

$$\begin{aligned}&\lim_{\varepsilon\to 0}\max_{\beta+1\le x_0\le\alpha}|\Pi(x_0,\varepsilon)-\Pi(x_0)|=0,\\&\lim_{\varepsilon\to 0}\max_{\beta+1\le x_0\le\alpha}|\Pi'(x_0,\varepsilon)-\Pi'(x_0)|=0.\end{aligned}\tag{10}$$

*Здесь штрих – производная по* $x_0$*, а оператор* $\Pi(x_0)$ *задается соотношениями:*

$$\Pi = \Pi_2\circ\Pi_1,\ \Pi_1:\ x_0\to x_1=x_1(x_0),\ \Pi_2:\ x_1\to x_2=x_2(x_1),\tag{11}$$

*где* $x_1$ *и* $x_2$ *– введенные выше корни уравнений* $u(x)=0$ *и* $v(x)=0$ *соответственно.*

### Лемма

*Отображение* (11) *имеет на отрезке* $\beta + 1 \le x_0 \le \alpha$ *единственную экспоненциально устойчивую неподвижную точку* $x_0 = x_0^*$.

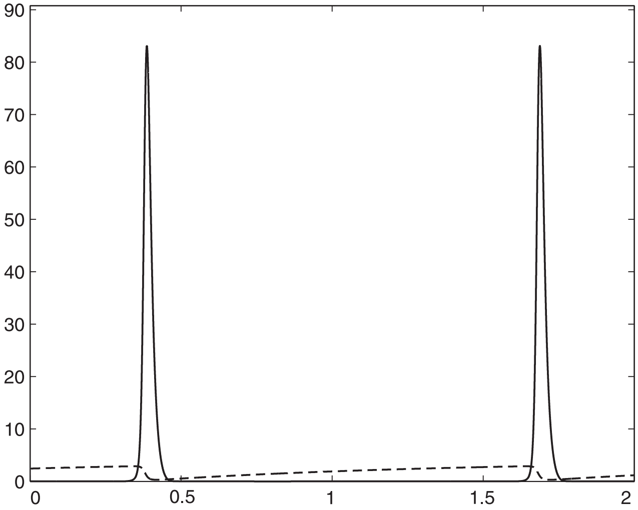


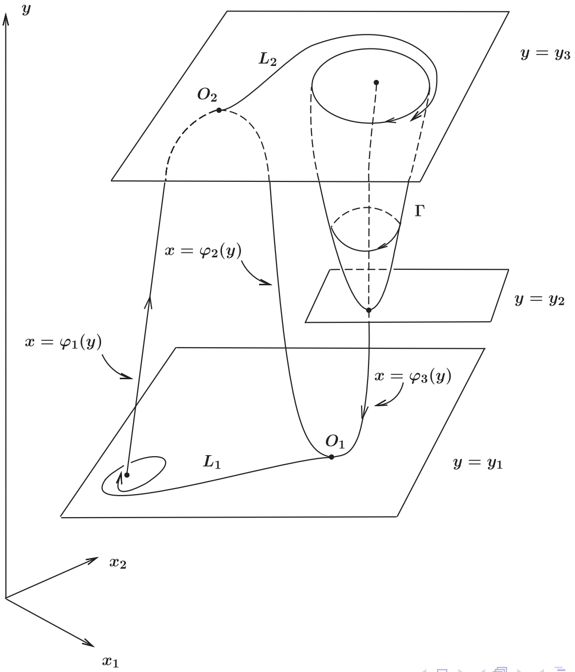

Рис.:

$$\begin{aligned}\dot{x} &= f(x,y),\\ \varepsilon\dot{y} &= [g(x,y) - y(t-h)]y,\end{aligned} \tag{12}$$

где $0 < \varepsilon \ll 1$, $h = \text{const} > 0$; $f, g \in C^\infty(K)$,
$K = \{(x,y):\ x > -\delta_0,\ y > -\delta_0\}$, $\delta_0 > 0$.
Установлено, что при некоторых дополнительных ограничениях на функции $f$, $g$ и запаздывание $h$ в системе (12) существует устойчивый релаксационный цикл.

# Катастрофа голубого неба

Рассмотрим гладкое однопараметрическое семейство векторных полей $X_\mu$ в $\mathbb{R}^3$ и предположим, что при $\mu = 0$ поток $X_\mu$ имеет периодическую траекторию $L_0$ типа простой седло-узел. Рассмотрим, далее, некоторую достаточно малую окрестность $\mathscr{U}$ траектории $L_0$, разделяемую двумерным сильно устойчивым многообразием $W^{ss}(L_0)$ на две области: узловую $\mathscr{U}^+$, все траектории из которой стремятся к $L_0$ при $t \to +\infty$, и седловую $\mathscr{U}^-$, в которой лежит двумерное неустойчивое многообразие $W^u_{loc}(L_0)$ с краем $L_0$. Следующее ограничение носит существенно нелокальный характер и состоит в том, что все траектории системы $X_0$ с начальными условиями из $W^u_{loc}(L_0)$ при увеличении $t$ сначала покидают окрестность $\mathscr{U}$, а затем снова возвращаются в нее, попадая в узловую область $\mathscr{U}^+$. Тогда, очевидно, каждая из упомянутых траекторий оказывается двоякоасимптотической к $L_0$. И наконец, будем считать, что множество $W^u(L_0)$, получающееся из $W^u_{loc}(L_0)$ после продолжения по траекториям потока $X_0$, не является топологическим многообразием.



y
$y = y_3$
$L_2$
$O_2$
$\Gamma$
$x = \varphi_2(y)$
$y = y_2$
$x = \varphi_1(y)$
$x = \varphi_3(y)$
$O_1$
$L_1$
$y = y_1$
$x_2$
$x_1$

$$\dot{x} = f(x, y, \mu), \quad \varepsilon \dot{y} = g(x, y), \quad x = (x_1, x_2) \in \mathbb{R}^2, \quad y \in \mathbb{R}, \qquad (13)$$

где $0 < \varepsilon \ll 1$, $|\mu| \ll 1$, а на функции $f, g \in C^\infty$ были наложены стандартные ограничения, обеспечивающие существование так называемых классических релаксационных колебаний. Напомним, что классическими называются колебания, у которых при $\varepsilon \to 0$ медленные компоненты $x_1$, $x_2$ стремятся к некоторым непрерывным по $t$ функциям, а быстрая компонента $y$ сходится поточечно к разрывной функции.

Рассмотрим аналогичную (13) трехмерную систему

$$\dot{x} = f_1(x,\mu) + \sqrt{\varepsilon}\, y^2 f_2(x), \quad \varepsilon\,\dot{y} = g(x) - h(y), \tag{14}$$

где $x = (x_1, x_2) \in \mathbb{R}^2$, $y \in \mathbb{R}$, $0 < \varepsilon \ll 1$, $|\mu| \leq \mu_0$, а $\mu_0 > 0$ – некоторая достаточно малая константа. $f_1(x,\mu) \in C^\infty(\mathbb{R}^2 \times [-\mu_0, \mu_0]; \mathbb{R}^2)$, $f_2(x) \in C^\infty(\mathbb{R}^2; \mathbb{R}^2)$, $g(x) \in C^\infty(\mathbb{R}^2)$, $h(y) \in C^\infty(\mathbb{R})$ удовлетворяют специальным условиям, гарантирующим реализуемость неклассических релаксационных колебаний.

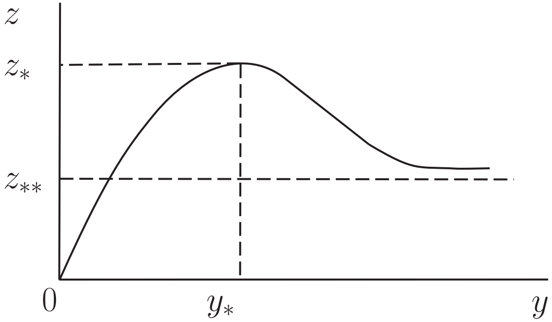



Рис.:

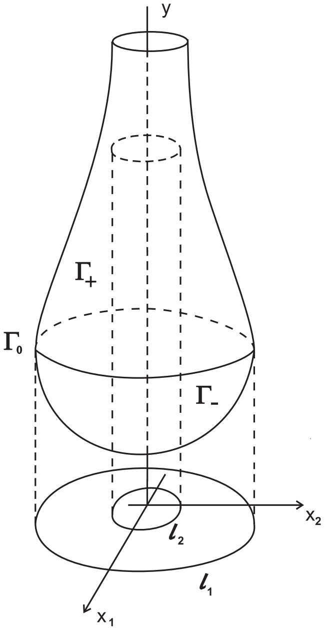



Рис.:

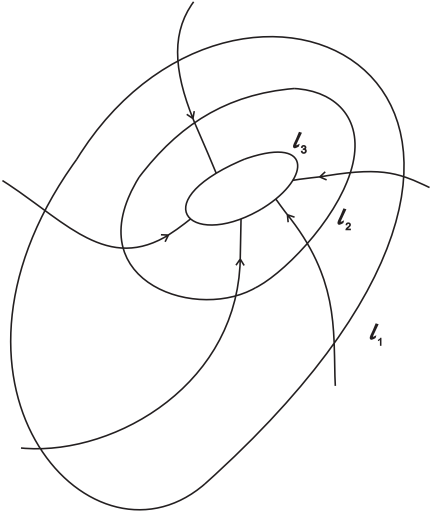



Рис.:

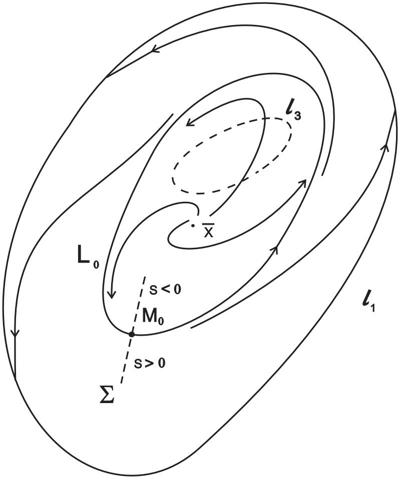



Рис.:

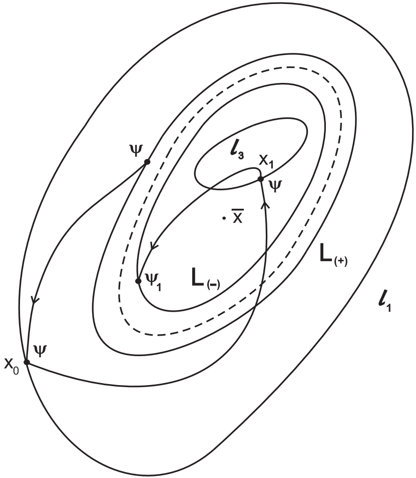



Рис.:

# Благодарю за внимание!