“Скелетный алгоритм решения задачи линейного программирования и его применение к задачам оценивания”

Горяинов Александр Владимирович

Кафедра Теории вероятностей Московского Авиационного Института

научный руководитель Бахшиян Борис Цолакович

Постановка задачи

$$L^* = \min_{x_i} \left\{ L = \sum_{i=1}^{n} c_i x_i : \quad \sum_{i=1}^{n} x_i a_i = b,\ x_i \geq 0, \quad i = 1, \ldots, n \right\}.$$

x_i – скалярные переменные оптимизации,

c_i – коэффициенты целевой функции,

$a_i \in \mathbf{R}^m$ – столбцы матрицы ограничений,

$b \in \mathbf{R}^m$ – вектор правой части, причем $b \neq 0$.

Эквивалентная расширенная задача

Эквивалентная расширенная задача линейного программирования имеет один дополнительный столбец a_0 и дополнительную переменную x_0:

$$\tilde{L}^* = \min_{x_i} \left\{ \tilde{L} = c_0 x_0 + \sum_{i=1}^{n} c_i x_i : \quad x_0 a_0 + \sum_{i=1}^{n} x_i a_i = b,\ x_i \geq 0,\ i = 0,1,\ldots,n \right\},$$

где $a_0 = \sum_{i \in I_B} x_i a_i = b, \quad c_0 = \sum_{i \in I_B} c_i x_i$,

$x_i,\ i \in I_B$ – допустимое базисное решение.

Теорема 1

1. Допустимое решение $x_0 = 1$, $x_1 = 0$, ..., $x_n = 0$ эквивалентной задачи даёт то же значение целевой функции, что и базисное решение исходной задачи, соответствующее базису $\{a_i,\ i \in I_B\}$.

2. Решения исходной и эквивалентной задач совпадают, т.е. $\tilde{L}^* = L^*$.

Вспомогательная задача меньшей размерности

Используя приведённую выше расширенную задачу и её строго вырожденное базисное решение, можно построить вспомогательную задачу с числом ограничений, на единицу меньше, чем в исходной:

$$\min_{\tilde{x}_i}\left\{\sum_{i=1}^{n}\tilde{c}_i\tilde{x}_i : \quad \sum_{i=1}^{n}\tilde{x}_i\tilde{a}_i=\tilde{b}, \quad \tilde{x}_i\ge 0 \;\; \forall\, i\right\},$$

$a_i \in \mathbf{R}^{m-1}$ – столбцы матрицы ограничений,

$b \in \mathbf{R}^{m-1}$ – вектор правой части, причем $b \neq 0$.

Теорема 2

Если вспомогательная задача имеет решение, то текущее вырожденное базисное решение эквивалентной задачи оптимально. В противном случае (целевая функция вспомогательной задачи не ограничена) можно либо уменьшить целевую функцию эквивалентной задачи, либо установить её неразрешимость.

Если целевая функция вспомогательной задачи не ограничена, то находится небазисный вектор $\tilde{a}_p = \sum_{j \in I_{\tilde{B}}} \alpha_j \tilde{a}$, такой, что верно

$$\Delta_p \text{ В } \tilde{c}_p - \sum_{j \in I_{\tilde{B}}} \tilde{c}_j \alpha_j < 0; \quad \alpha_j \le 0, \quad j \in I_{\tilde{B}}.$$

Соответствующий ему в эквивалентной задаче вектор $a_p - \sum_{j \in I_{\tilde{B}}} \alpha_j a_j$ пропорционален вектору a_0. Это можно записать в виде $a_p - \sum_{j \in I_{\tilde{B}}} \alpha_j a_j = \alpha a_0$.

Обозначим $S = \{ j : j \in I_{\tilde{B}}, \alpha_{pj} < 0 \} \cup \{ p \}$.

Теорема 3

Если $\alpha \le 0$, то целевая функция эквивалентной задачи не ограничена на множестве своих допустимых решений. В противном случае при замене строгого базиса a_0 на векторы $a_i,\ \ i \in S$ целевая функция эквивалентной задачи уменьшается на величину $\dfrac{\left|\tilde{\Delta}_p\right|}{\alpha}$.

Указанное в теореме уменьшение будет мало по сравнению с модулем текущего значения целевой функции только в том случае, если мы находимся вблизи оптимума.

Скелетный алгоритм

Шаг 1. Построение серии вспомогательных задач. Если ни в одной из них решение не является оптимальным, то переходим к шагу 2.

Шаг 2. «Подъём». Решаем одномерную задачу. Если она разрешима, то переходим к шагу 4. Если нет, то последовательно вычисляем коэффициенты α_j для $j = 2, 3, \ldots$ пока не получим $\alpha_j > 0$. Переходим к шагу 3.

Шаг 3. «Спуск». Улучшаем значение целевой функции в задаче размерности j. Переходим к шагу 2.

Шаг 4. Окончание решения задачи. Решение задачи дает текущий строгий базис задачи размерности m.

Численные эксперименты

Рассмотрим тригонометрическую модель измерений третьего порядка:

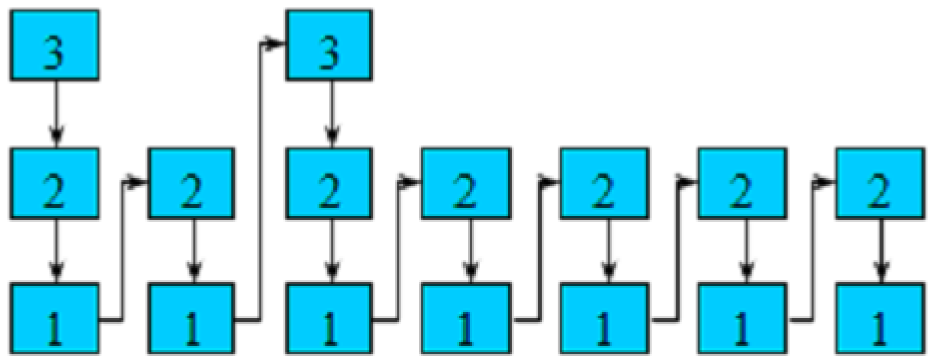
$$y(t)=\theta_1+\theta_2\cdot\sin t+\theta_3\cdot\cos t+\xi(t),\ t\in[0,1]$$

В качестве контролируемого параметра возьмем θ_2. Начальный базис образуем из векторов, соответствующих моментам времени {0,88; 0,888; 0,8888}. Этот случай неблагоприятен для симплекс-метода, так как базисная матрица плохо обусловлена.

Результаты решения задачи

№ итерации	Симплекс-метод		Скелетный алгоритм	
	Целевая Функция	Базис	Целевая Функция	Базис
1	483039,19	{0,88; 0,888; 0,8888}	483039,19	{0,88; 0,888; 0,8888}
2	2502,10	{0; 0,888; 0,8888}	**7,83**	{0; 05; 1}
3	8,85	{0; 0,444; 0,8888}		
4	7,93	{0; 0,444; 1}		
5	**7,83**	{0; 05; 1}		

Схема спусков и подъемов



Сравнение эффективности алгоритмов

Количество элементарных операций при решении скелетным алгоритмом составило 995, при решении задачи симплекс-методом – 1245.